Vysoká škola ekonomická v Praze
Fakulta mezinárodních vztahů
Hlavní specializace: Mezinárodní obchod

Název práce:

Exaktní metody v obchodě (modelový přístup)

DISERTAČNÍ PRÁCE

Vypracoval: Ing. Tomáš Zeithamer
Vedoucí práce: doc. Ing. František Drozen, CSc.
Rok: 2010

Prohlášení

Prohlašuji na svou čest, že jsem práci vypracoval samostatně, s použitím uvedené literatury a vyznačil všechny citace z pramenů.

V Praze 29. srpna 2010 Podpis: ……

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce, Doc. Ing. F. Drozenovi, CSc., za veškerou pomoc, kterou mi poskytl a za trpělivost a pochopení při mém úsilí proniknout do podstaty problematiky rozpracovávané v této práci.

V Praze 29. srpna 2010

Ing. Tomáš Zeithamer

„FELIX QUI POTUIT RERUM COGNOSCERE CAUSAS“

Publius Vergilius Maro
(*15. října 70 př. n. l, Andes u Mantovy – 21. září 19 př. n. l., Brindisi).*

Obsah

Úvod 7

1. Kleinovo a Cartanovo pojetí geometrie – krátká charakteristika 17

2. Předpoklady pro vytvoření „Erlangenského programu“ 23

2.1 Fyzikální základy jednotlivých geometrií 25

2.1.1 Euklidova (elementární) geometrie 25

2.1.2 Analytická geometrie 26

2.1.3 Deskriptivní a projektivní geometrie 26

3. Geometrie (univerzálních) abstraktních ekonomických veličin 28

3.1 Kvantitativní a kvalitativní vyjádření skalárních abstraktních ekonomických veličin 28

3.2 Průměrná a mezní skalární abstraktní ekonomická veličina 31

3.2.1 Definice skalární průměrné abstraktní ekonomické veličiny 31

3.2.2 Definice skalární mezní abstraktní ekonomické veličiny 32

3.2.3 Definice mezní průměrné abstraktní ekonomické veličiny 34

3.2.4 Definice průměrné mezní abstraktní ekonomické veličiny 40

3.2.5 Některé další vlastnosti kvantitativních vyjádření abstraktních ekonomických veličin 44

3.3 Elastičnost (pružnost) skalární abstraktní ekonomické veličiny 52

4. Krátkodobá obchodní marže 54

4.1 Základní definice 54

4.2 Celková obchodní marže TGP v krátkém období 63

4.2.1 Obecná východiska 63

4.2.2 Restrikce obecných východisek 64

4.2.3 Pomalu proměnná jednotková obchodní marže 65

4.2.4 Konvexní celková obchodní marže TGP 66

4.2.5 Konkávní celková obchodní marže TGP 67

4.2.6 Lineární celková obchodní marže TGP 68
4.2.7 Celková obchodní marže TGP s inflexním bodem 69
4.2.8 Vývojová stadia celkové obchodní marže TGP s jedním inflexním bodem.. 77
Závěr 81
Literatura použitá ke studiu a sepsání práce 84
Seznam vybraných publikací Ing. Tomáš Zeithamer ……91

Úvod

Základní výzkum je metafyzicky řečeno živou vodou vědy. O významu základního výzkumu svědčí i specializovaná pracoviště zakládaná za účelem tohoto výzkumu.[1]

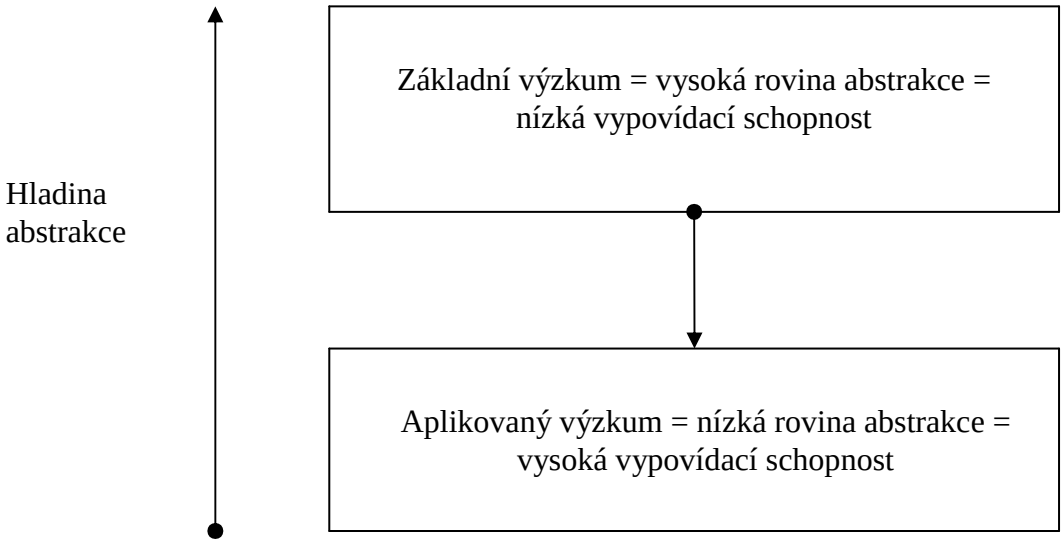
Základní výzkum je často konfrontován s výzkumem aplikovaným, který je v současné době výrazně preferován zejména v ekonomických vědách pro svoje konkrétní zaměření a okamžitý možný přínos např. pro rozhodovací procesy, byť prováděný např. na úrovni výzkumných agentur. Odpůrci základního výzkumu argumentují dále především:

- vysokými náklady na tento výzkum (to platí více pro přírodní vědy),
- neužitečností základního výzkumu respektive jeho zbytečností,
- jde spíše o zálibu určité skupiny lidí, kteří dávají přednost vysoké abstrakci, ale pro normální život jsou nepoužitelní,
- výsledky nejsou přímo aplikovatelné v praxi,
- ze základního výzkumu nepřichází bezprostřední zisk, investice do něj jsou přinejmenším sporadické nebo zbytečné.

Jako pracovník, který převážnou část svého života pracoval v oblasti právě základního výzkumu musím říci, že výše uvedené argumenty mohou být předmětem širší diskuse, ale nejeví se životaschopné. V tomto momentu, rovněž na základě svých

[1] V oboru věd ekonomických stojí za zmínku nepochybně Centrum základního výzkumu pro dynamickou ekonomii a ekonometrii při Vysoké škole ekonomické. Centrum sdružuje Fakultu financí a účetnictví, Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakultu sociálních věd, Univerzity Karlovy v Praze, Fakultu ekonomickou, Západočeské univerzity v Plzni a Ústav teorie informace a automatizace Akademie věd České republiky za účelem výzkumu podstaty složitého aperiodického vývoje ekonomických veličin. Dosažení aplikovatelných výsledků v této oblasti je podmíněno důkladným studiem a rozvojem dynamické ekonomické teorie s následnou aplikací výsledků částečně v ekonometrii nebo přímou aplikací při národohospodářských předpovědích. Převzato a částečně upraveno ze zdroje http://czvdee.utia.cas.cz/?main=31.

zkušeností, mohu konstatovat, že badatelé základního výzkumu téměř nikdy nezbohatnou (měřeno penězi). Výstupy základního výzkumu přinášejí poznatky do širokého informačního systému, kde jsou nabídkou pro ty, kterým základní výzkum není cizí pro další zpracování a případně i možné využití na nižší rovině abstrakce. I přes tuto argumentaci nelze hovořit o přímém propojení základního a aplikovaného (poznávacího) výzkumu. Schématicky lze znázornit postavení základního a aplikovaného výzkumu následovně.



Kde je věda? „Věda začíná poznáním, že věci, které se nám jeví jako stejné, se nechovají vždy stejným způsobem, a že u věcí, které se nám jeví jako rozdílné, se někdy ukazuje, že se ve všech ostatních ohledech chovají stejně; a od této zkušenosti postupuje Věda k nahrazovaní té klasifikace, kterou poskytují naše smysly, klasifikací novou, která neseskupuje to, co se jeví jako podobné, nýbrž to, u čehož se ukazuje, že se to chová stejným způsobem ve stejných podmínkách.“[2] Spor o vědu je ve své podstatě sporem o použitých metodách. Vymezení věd v užším slova smyslu je známé podle Hayeka[3], sem patří vědy s velkým „V“, disciplíny fyzikální a biologické.

[2] Hayek, F., A.: Kontrarevoluce vědy. Liberální institut, Praha, 1995, str. 21

[3] Friedrich August von Hayek (1899 Vídeň – 1992 Freiburg) významný ekonom, politiolog a sociolog tzv. Rakouské školy. Proslul zejména svou obhajobou liberální demokracie a tržního hospodářství.

V díle Hayeka Kontrarevoluce vědy se píše: „Fyzik, který chce pochopit problémy společenských věd pomocí analogie ze svého vlastního oboru, by si musel představit svět, ve kterém by přímým pozorováním poznal vnitřek atomů, avšak neměl by ani možnost experimentovat s kusy hmoty, ani příležitost pozorovat víc než vztahy poměrně malého počtu atomů v omezeném časovém úseku. Na základě svých znalostí různých druhů atomů by mohl budovat modely všech různých způsobů, jimiž se atomy mohou spojovat do větších jednotek, a těmito modely stále přesněji reprodukovat všechny charakteristiky těch několika málo případů, v nichž mohl pozorovat komplexnější jevy. Avšak zákony makrokosmu, které by mohl odvodit ze svého poznání mikrokosmu, by zůstaly vždy „deduktivní“, v důsledku jeho omezeného poznání dat komplexní situace by mu tyto zákony sotva kdy umožnily předvídat přesný výsledek konkrétní situace, a nikdy by je nemohl potvrdit řízeným experimentem- třebaže by je bylo možné vyvrátit pozorováním takových jevů, které by byly podle jeho teorie nemožné.“[4]

Hayek dále říká „Specifické obtíže společenských věd ... pocházejí z toho, že ideje v nich vystupují jaksi ve dvojí funkci, jednak jako součást předmětu zkoumání a jednak jako ideje o předmětu zkoumání. Zatímco v přírodních vědách rozdíl mezi předmětem poznání a naším vysvětlením tohoto předmětu koinciduje s rozdílem mezi idejemi a objektivními fakty, ve společenských vědách musíme rozlišovat mezi myšlenkami, které jsou konstitutivní pro jevy, jež chceme vysvětlit, a těmi idejemi, které máme o těchto jevech buďto my anebo právě ti lidé, jejichž činnost musíme vysvětlit, a které tedy nejsou příčinami společenských struktur, nýbrž teoriemi o nich.“[5]

Hayek ve svých úvahách o metodologii vědy vychází mimo jiné z komparace společenských věd s fyzikou Souhně lze říci, že ve svých úvahách souhlasí s dalším představitelem moderního liberalismu K. R. Popperem[6], jehož hlavní myšlenky najdeme v díle Logika vědeckého zkoumání vydané v Praze nakladatelstvím

---

[4] Hayek, F., A.: Kontrarevoluce vědy. Liberální institut, Praha, 1995, str. 41

[5] Hayek, F., A.: Kontrarevoluce vědy. Liberální institut, Praha, 1995, str .37

[6] Sir Ka**r**l Raimund Popper (1902 Vídeň – 1994 Londýn), filosof rakouského původu, představitel moderního liberalismu, teorie vědy a filosofie. Jeho vědecká činnost je zastoupena i na poli logiky, fyziky, biologie, sociologie a politologie. Svůj filozofický systém sám označuje jako kritický racionalismus.

Oikoymenh v roce 1997 (Popper, 1997). Nelze nahradit pramenná díla, ale závěrem lze říci, že podle těchto učenců je základem vědy metoda hypoteticko deduktivní.

V roce 1998 se konalo v Maďarsku „inaugurační“ symposium věnované metodám ekonofyziky. Na toto symposium byla přihlášena řada příspěvků, které se zabývaly aplikacemi analogickými aplikacím statistických metod ve fyzice. Uvažovalo se o analogii mezi interagujícími molekulami resp. atomy a interagujícími molekulárními a atomárními systémy a interagujícími mikroekonomickými systémy zejména v oblasti finančnictví. Klasickým příkladem je dnes Black-Scholesova rovnice, která popisuje časový vývoj ceny derivátu akcie na finančním trhu a vychází z analogie s fyzikální koncepcí Brownova pohybu a vedení tepla. Vzhledem k řadě dalších nalezených analogií tedy vyvstává otázka, **zda-li je možné formulovat základní pojmy a postupy v ekonomii exaktním způsobem obdobně jako je tomu ve fyzice.** Odpověď na tuto otázku není snadné nalézt. Jedním z důvodů je, že řada ekonomických objektů je nejen samoorganizujících se, ale také samozdokonalujících se, přičemž v jejich chování jsou přítomny subjektivní vlastnosti (hlediska), které zatím neumíme rozeznat již ve stadiu jejich vznikání uvnitř ekonomického objektu, nýbrž je dovozujeme z pozorování vnějších interakcí objektu s okolním prostředím.

„Termín ekonofyzika (econophysics) vznikl spojením názvů dvou vědních oborů, ekonomie a fyziky, přičemž ekonomie stojí na místě prvním a fyzika na místě druhém, čímž je charakterizována skutečnost, že v ekonomii jsou aplikovány metody matematické fyziky a fyziky teoretické. V současném vývojovém stadiu ekonofyziky se jedná spíše o obohacení metod ekonomického výzkumu metodami teoretického fyzikálního výzkumu. Metody teoretického fyzikálního výzkumu jsou považovány mnoha ekonomy za velmi zjednodušující a jsou jimi odmítány z toho důvodu (jak bylo již uvedeno v předcházejícím odstavci), že byly vyvíjeny pro výzkum systémů, které nemají výrazně zastoupenu vlastnost (složku) samozdokonalování v porovnání se systémy ekonomickými (charakteru mikroekonomického resp. makroekonomického). Samozdokonalování je třeba chápat vždy ve spojení s danými počátečními a okrajovými podmínkami, tedy samozdokonalování může být kladné nebo záporné ve srovnání se stavem předchozím. Řada ekonomů odmítá teoretické fyzikální metody výzkumu ekonomických systémů také z toho důvodu, že ekonomické procesy nelze opakovat za přesně stejných počátečních a okrajových podmínek pro daný proces, jako je tomu s určitou mírou přesnosti v některých případech ve fyzice. Procesy, které nelze

opakovat za přesně stejných podmínek nejsou ovšem výsadou pouze ekonomie. Například v astrofyzice se setkáváme se skutečností, že vývojová stadia životního cyklu hvězd jedné populace se také neopakují za přesně stejných podmínek. Obdobná situace se vyskytuje při opakovaném vzniku cirkulačních konfigurací (stavů) atmosféry Země. Nalezli bychom ještě mnoho dalších příkladů z oblasti fyzikálních procesů, které dosvědčují nemožnost zajistit přesně stejné počáteční a okrajové podmínky při opakování určitého procesu. Je však třeba na tomto místě uvést, že analýza historického vývoje vědy nás seznamuje s obdobnými genezemi dnes již renomovaných styčných vědních odvětví, jakými jsou například astrofyzika, geofyzika, biofyzika, přičemž do této skupiny styčných vědních odvětví patří též například biomatematika, biometrie (též nazývaná biometrika), biostatistika a další. Jsme dnes přímými účastníky, pasivními či aktivními, počátečního stadia procesu přechodu od „přesně“ diferenciovaných vědních oborů k jejich postupné syntéze (vzájemnému propojování), přičemž sjednocujícím prvkem je jazyk matematiky“ (Zeithamer, 2010 a).

„Období konce třetí a začátku čtvrté čtvrtiny devatenáctého století, do kterého spadají počátky rozvoje aplikování metod matematické a teoretické fyziky na popis ekonomických jevů a procesů samotnými ekonomy, lze dnes považovat za rané období postupného vznikání ekonofyziky a to i navzdory skutečnosti, že užití těchto metod bylo zastíráno tvrzeními o výhradních aplikacích pouze matematiky v ekonomii, což postupně vyústilo do termínu matematická ekonomie. Nazvěme využití metodických postupů matematické a teoretické fyziky k analýze a popisu ekonomických jevů a procesů na přelomu třetí a čtvrté čtvrtiny devatenáctého století ekonofyzikou v širším slova smyslu. Obdivuhodným způsobem bylo k popisu ekonomických jevů a procesů použito analogické metodiky jako v teoretické fyzice včetně fyzikálního a matematického významu diferenciálu proměnné veličiny[7]. Například relativní podélné prodloužení tělesa a Hookeův zákon, analyzované v teorii pružnosti pevných těles, inspirovaly Alfreda Marshalla k zavedení pružnosti (elastičnosti) poptávky (Marshall, 1890)“ (Zeithamer, 2010 b).

„Z biografických údajů řady významných ekonomů tohoto období vyplývá, že získali nejprve matematické resp. fyzikální resp. fyzikálně matematické vysokoškolské

[7] V prvním přiblížení je diferenciál fyzikální veličiny změna hodnoty fyzikální veličiny, vyjádřená v příslušných jednotkách, která je dostatečně malá pro to, aby splňovala matematický význam diferenciálu a současně dostatečně velká, aby ji bylo možné s určitou mírou přesnosti měřit. Stejným způsobem je chápán diferenciál veličiny ekonomické.

vzdělání. Giovanni Battista Antonelli (17. 9. 1858 – 12. 5. 1944) zahájil svá raná studia na Technical Institute of Leghorn a pokračoval ve studiu na University of Pisa, kde získal v roce 1882 doktorát z matematiky a v roce 1884 akademickou hodnost profesora matematiky. Po té absolvoval inženýrské studium na Polytechnic School in Milan, kde získal akademickou hodnost inženýra se zaměřením na stavební inženýrství (Antonelli, 1998). Marie Esprit Léon Walras (16. 12. 1834 – 5. 1. 1910) vystudoval École de Mines v Paříži v oboru důlní inženýrství, kde získal znalosti nejen z matematiky a obecné fyziky, ale také ze statiky a dynamiky důlních staveb (Jaffé, 1965). Alfred Marshall (26. 7. 1842 – 13. 7. 1924) absolvoval studium matematiky a fyziky na University of Cambridge, kde rovněž matematiku vyučoval (Zemánek, 2006). Vilfredo Pareto (15. 7. 1848 – 19. 8. 1923) vystudoval Polytechnic Institute of Turin, který absolvoval disertační prací z teorie pružnosti „Principi fondamentali della teoria della elasticitá de corpi solidi v roce 1869 (Pareto, 1869).

Poslední čtvrtina devatenáctého století je obdobím, ve kterém docházelo k syntéze dílčích poznatků ekonomických zákonitostí, formulovaných předcházejícími generacemi ekonomů a sílila v něm snaha tyto zákonitosti popsat jazykem fyzikálně matematickým s významem diferenciálu proměnné, ve kterém byl zahrnut jak jeho matematický tak fyzikální význam; vyjádřeno souhrnně jsou upevňovány a rozšiřovány základy ekonofyziky v širším slova smyslu. V tomto období vznikají souhrnná díla významných ekonomů, mezi která řadíme práci Antonelliho *„Sulla Teoria Matematica della Economia Politica“* (vydanou vlastním nákladem v Pise roku 1886, přeloženou v roce 1971 do angličtiny pod názvem „Mathematical Theory of Political Economy (Antonelli, 1886). Antonelli v podstatě užívá teorii vektorových funkcí n reálných proměnných k popisu idealizovaného modelu dokonalého trhu, jehož komponentami jsou pouze kupující s příslušnými reálnými funkcemi poptávky a prodávající s příslušnými reálnými funkcemi nabídky. Roku 1874 vychází první vydání práce Walrasovy *„Élements d´économie politique pure“* (Walras, 1874), přeložené do angličtiny pod názvem „Elements of Pure Economics, or the theory of social wealth“ (první vydání anglického překladu vychází v roce 1954 (Walras, 1954)). Walrasovo fyzikálně matematické vzdělání se v této práci projevuje v řadě formulací vystihujících vynikajícím způsobem analogii mezi fyzikálními a ekonomickými procesy. Uveďme například jeho analogii mezi dokonale konkurenčním trhem a mechanickým strojem v němž zanedbáváme zcela síly tření (Part II, Lesson 5, pp. 83-91 prvního anglického vydání (Walras, 1954)). Rovněž teorii všeobecné ekonomické rovnováhy

Walras zakládá na analogii s fyzikální koncepcí mechanické rovnováhy. V prvním vydání Marshallových *„Principles of Economics“*, z roku 1890, je zaváděn mimo jiné například pojem „elastičnost (pružnost) poptávky“, pojem který je založen na analogii s teorií mechanické pružnosti látek (speciálně se zde implicite uplatňuje význam relativního podélného prodloužení a Hookeova zákona). Také v Paretově dvousvazkovém díle *„Cours d´économie politique“*, vydaném v Lausanne v letech 1896-1897 (Pareto, 1896-1897), lze vysledovat vliv teorie pružnosti tuhých těles na popis ekonomických systémů (Pareto, 1896)“ (Zeithamer, 2010 b).

„V první polovině dvacátého století pokračuje prohlubování propojení ekonomie, matematiky, fyziky. V české ekonomické škole první poloviny dvacátého století nebyly dosud nalezeny spolehlivé prameny, dokazující uvedené interdisciplinární propojení a k němu vázané získání původních výsledků. Závěr druhé poloviny dvacátého století je obdobím, kdy rovněž v české ekonomické škole nalézáme ekonoma, jehož výsledky reprezentují ekonofyziku v širším slova smyslu. Tímto ekonomem je František Drozen (nar. 30. 5. 1949), který byl inspirován pracemi německého inženýra Augusta Wöhlera (22. 6. 1819 - 21. 3. 1914) (Wöhler, 1855, 1870; Timoshenko, 1983; Schutz, 1996). V rozmezí let 1855 - 1871 se August Wöhler zabýval příčinami vzniku únavových trhlin v hřídelích kol železničních vagonů a v souvislosti s tím závislostí amplitudy napětí na počtu cyklických zatížení do lomu nápravy. Grafické zpracování Wöhlerových výsledků ve formě Wöhlerových křivek je dodnes užíváno při vyšetřování únavy kovových částí nejrůznějších konstrukcí. František Drozen zkonstruoval následující analogii mezi procesem růstu únavové trhliny v hřídeli a procesem snižování ceny zboží: okamžité délce **m** únavové trhliny v železniční nápravě v čase **t** odpovídá okamžitá cena **n** zboží v čase **t.** Doba sledování **t** trhliny v nápravě je součinem doby trvání jednoho cyklického zatížení a počtu cyklů zatížení. Tedy diferenciální změna ceny zboží **dn** za časový interval **dt** (diferenciální změnu času **t**) je přímo úměrná součinu okamžité ceny **n** a diferenciální změny času **dt** obdobně jako diferenciální změna **dm** okamžité délky trhliny za diferenciální změnu počtu cyklických zatížení **dN** je přímo úměrná součinu okamžité délky trhliny **m** a diferenciální změny počtu cyklických zatížení **dN**, kde **dN . T = dt; T** je časový interval v sekundách, po který trvá jedno cyklické zatížení. Tento přístup k modelování procesu snižování ceny zboží lze v konečné uspořádané formě nalézt v následujících Drozenových pracech (Drozen 1993, 1995, 2003, 2008)“ (Zeithamer, 2010 a).

„Pro úplnost se velmi stručně zmiňme o ekonofyzice v užším slova smyslu, tedy o přístupu fyziků k ekonomii na základě statistické mechaniky (tato problematika bude podrobněji rozpracována v práci navazující na článek „ The Incorporation of Physics into Economic Thought“ (Zeithamer, 2010)). Vzhledem k zamýšlenému rozsahu tohoto odstavce není možné uvést výsledky ekonofyziky v širším slova smyslu v průběhu 20. století. Důležité však je, že výsledky ekonofyziky v širším slova smyslu v uvedeném období postupně směrovaly pozornost teoretických fyziků rostoucí měrou k ekonomii. To pak vedlo ve spolupráci s ekonomy k výzkumu analogií mezi ekonomickými procesy a fyzikálními procesy, kterými se zabývala statistická mechanika a současně k výzkumu popsatelnosti makroekonomických i mikroekonomických procesů metodami statistické mechaniky. Statistická mechanika ve své podstatě popisuje složité časově proměnné konfigurace velkého počtu podsystémů, kterými je tvořen sledovaný fyzikální systém a které se řídí určitými interakčními zákony. Složitost časového vývoje vnitřní struktury fyzikálního systému má svůj původ v interakci a neuspořádanosti podsystémů. Vyjádříme-li se již částečně v analogii s ekonomií, v interakci a konkurování si podsystémů. Finanční trhy jsou dostatečně složité systémy, které jsou posuzovány jak podle jejich výstupu, tak dle jejich vnitřní struktury. Velký počet investorů přítomných na mnoha různých trzích vytváří směnami akcií, dluhopisů, komodit a dalších produktů vnitřní strukturu trhu. Investiční rozhodnutí mění ceny obchodovaných aktiv a tyto ceny zpětně ovlivňují obchodní rozhodování investorů, přičemž téměř všechny obchodní transakce jsou elektronicky zaznamenávány. Základní zjednodušení pro nalezení analogie mezi vývojem vnitřní struktury trhu a vývojem vnitřní struktury fyzikálního systém (s velkým počtem podsystémů) spočívalo v tom, že obchodník má celkem tři základní možnosti jak zacházet s daným produktem: koupit, prodat, neobchodovat (Voit, 2005). Tímto postupem byla stanovena analogie mezi časovým vývojem vnitřní struktury trhu a Isingovým modelem (resp. Pottsovým modelem). Ve své podstatě Isingův model popisuje takové zapojení sledovaného fyzikálního podsystému do celkové vnitřní struktury fyzikálního systému, kterým se sledovaný podsystém snaží přizpůsobit k již existující vnitřní struktuře podsystémů v blízkém okolí sledovaného podsystému. Význačným představitelem aplikací statistické mechaniky v ekonomii je například německý fyzik a matematik Johannes Voit, který souhrnným způsobem popsal výsledky aplikací statistické mechaniky na finanční trhy ve své monografii z roku 2001 a jejích dalších přepracovaných a rozšířených vydáních (Voit, 2001, 2003, 2005). Právě takto konstruované analogie jsou

základem, ze kterého vzniká současná ekonofyzika, ekonofyzika v užším slova smyslu, jako nové vědní odvětví současné ekonomie“ (Zeithamer, 2010 b).

Základní cíl práce je stanovit (konstruovat) abstraktní (univerzální ⇔ abstraktní) veličiny a nalézt vztahy mezi těmito veličinami a zákonitosti vývoje těchto vztahů mezi těmito veličinami a tím přispět k systematickému základnímu výzkumu na hranici věd ekonomických a teoreticko-fyzikálních a upevnění základů ekonofyziky.

V souladu s cílem práce člením její kapitoly i subkapitoly. První tři kapitoly jsou věnovány teoreticko metodologickým předpokladům a definicím průměrné a mezní sklární veličimy. Čtvrtá kapitola je podle mého názoru kapitolou přechodovou a vytváří po obecných pasážích vstup do konkrétní analýzy obchodní marže.

V první kapitole (*Kleinovo a Cartanovo pojetí geometrie-krátká charakteristika*) jsem se snažil stručně analyzovat a hodnotit Kleinovu systematickou konstrukci geometrie, sjednocující jednotlivé různorodé a do vypracování Kleinovy konstrukce odděleně se vyvíjející geometrie a zakládající se na teorii grup transformací (zobrazení) mezi jednotlivými soustavami souřadnic a teorii invariantů těchto transformací. Tato kapitola společně s kapitolou druhou naznačuje pouze velmi schematicky cestu pronikání „Erlangenského programu“ a jeho zobecnění Eli Cartanem do fyziky. Zakladatelé lausannské a cambridgeské ekonomické školy pak na základě svého vzdělání v oblasti fyziky a matematiky umožnili v pozdějším období zahájení procesu relativně nenápadného pronikání „Erlangenského programu“ a jeho zobecnění do ekonomie.

Kapitola druhá (*Předpoklady pro vytvoření „Erlangenského programu“*) se zabývá vzájemným a postupně sílícím prolínáním geometrie, fyziky a inženýrských úloh z praxe (např. ve stavebnictví, architektuře, lodˇařství, aeronautice, vojenství, kriminalistice a dalších oborech lidské činnosti). Úvodní část této kapitoly zdůvodňuje na základě velmi stručného chronologického přehledu důvody, které vyústily ve formulaci „Erlangenského programu“. Jsou sledovány fyzikální základy Euklidovy geometrie, analytické geometrie, deskriptivní a projektivní geometrie s přihlédnutím k omezeným možnostem poznatelnosti objektivní reality našimi smysly, zejména zrakem. Uveďme na tomto místě pro úplnost, že v dalších částech pojednání pracujeme v prostorech s Euklidovou metrikou, neboť byla dedukována našimi smyslovými

orgány z každodenního sledování obklopující nás reality jako první modelové přiblížení, užívané k popisu průběhu procesů ekonomických. To ovšem neznamená, že „ekonomické prostory“ musí být nutně prostory nezakřivené, ve kterých se vzdálenost určuje jako druhá odmocnina ze součtu čtverců rozdílů souřadnic dvou bodů. Takový přístup je pouze prvním krokem při konstrukci abstraktních prostorů a dopouštíme se tím určitých kvantitativních chyb, které však v důsledku neznalosti správných metrik „ekonomických prostorů“ neumíme posoudit. Diferenciální geometrií ekonomických prostorů se tato práce nezabývá.

Kapitola třetí (*Geometrie (univerzálních) abstraktních ekonomických veličin*) se zabývá konstrukcí základních skalárních ekonofyzikálních veličin a odvozením některých jejich vlastností a vztahů mezi nimi (abstraktními ekonomickými veličinami vektorovými popřípadě tenzorovými se tato práce nezabývá). Jsou to průměrná skalární abstraktní ekonomická veličina a mezní skalární abstraktní ekonomická veličina. Z těchto veličin jsou pak konstruovány mezní průměrná skalární abstraktní ekonomická veličina, průměrná mezní skalární abstraktní ekonomická veličina a elastičnost skalární abstraktní ekonomické veličiny. Pro úplnost uveďme na tomto místě skutečnost, že abstraktní ekonomické veličiny jsou zaváděny postupem užitým v třetí kapitole práce z důvodu jejich využití při konstruování kvantové ekonomie, kterou se tato práce rovněž nezabývá.

Kapitola čtvrtá (*Krátkodobá obchodní marže*) se zabývá aplikací některých výsledků kapitoly třetí na konstrukci množiny modelů celkové obchodní marže pro případ, kdy je obchodováno s dvěma komoditami.

1. Kleinovo a Cartanovo pojetí geometrie – krátká charakteristika

Postupné pronikání „Erlangenského programu“ do fyziky nejen obohatilo fyzikální poznávání objektivní reality, ale rovněž zpětnou vazbou na matematiku vedlo k rozvoji poznatků matematických. Tento vzájemný rozvoj matematiky a fyziky vedl stručně řečeno k postupnému pronikání matematické fyziky do jiných vědních oborů a vzniku nových vědních odvětví těchto oborů a tedy také pronikání geometrických metod do těchto odvětví. Kromě astrofyziky, geofyziky, biofyziky a dalších odvětví jsme v současném období svědky formování ekonofyziky (v užším slova smyslu), přičemž je třeba mít na paměti, že základy ekonofyziky byly postupně a po malých krůčcích pokládány významnými ekonomy zhruba po tři století (ekonofyzika v širším slova smyslu). Tato geometrizace ekonomie je z mého pohledu matematika a fyzika obdivuhodná a dle mého názoru vyžadovala značnou dávku odvahy ekonomů tuto cestu ekonomického poznání postupně prosazovat. Věnujme tedy krátce na několika následujících stránkách pozornost zmíněnému počátečnímu období geometrizace věd fyzikálních, tj. „Erlangenskému programu“. Erlangenskému programu“ a posouzení jeho významu je věnována rozsáhlá literatura (viz např. Norden, 1956; Bell, 1945; Coolidge, 1940; Wussing, 1968; Schouten, 1926; Sharpe, 1997). Z toho důvodu není nezbytně nutná jeho detailní analýza a je možné se zabývat některými nejdůležitějšími myšlenkami tvůrce tohoto programu Felixe Kleina a v návaznosti na „Erlangenský program“ také s nimi souvisejícími závěry významného francouzského geometra (matematika) Eli Cartana.

Kořeny Kleinovy představy jsou spojeny s nejstaršími pojmy vědeckého zkoumání objektivní reality. Euklidovská geometrie studuje vlastnosti objektů, které nezávisí na jejich konkrétní poloze v prostoru a bylo třeba mnoha staletí k tomu, aby byla tato formulace převedena do následujícího přesnějšího vyjádření. Vlastnosti zkoumané euklidovskou geometrií jsou takové vlastnosti, které jsou invariantní vzhledem k určité množině transformací (zobrazení), která je grupou přemístění (grupa

G je algebraická struktura definovaná na množině $\mathfrak{G}$ jediným vnitřním zákonem kompozice **T** na $\mathfrak{G}$, který je asociativní, má neutrální prvek e $\in$ $\mathfrak{G}$ a ke každému prvku z$\in$ $\mathfrak{G}$ existuje prvek z´ , symetrický k prvku z vzhledem k vnitřnímu zákonu kompozice **T**, z**T**z´**=e**) . Projektivní geometrie, která byla zpočátku součástí euklidovské geometrie a posléze vykrystalizovala v samostatnou vědeckou disciplinu, je z Kleinova hlediska studiem geometrických vlastností objektů, vlastností invariantních vzhledem k jisté množině zobrazení, která je odlišná od grupy zobrazení euklidovské geometrie, avšak tvoří opět grupu zobrazení.

Lze obecně tvrdit, že jakákoliv grupa spojitých zobrazení definuje samostatnou geometrii. Jestliže uvažujeme proměnné, generované touto grupou zobrazení, jako veličiny určující bod prostoru odpovídajícího počtu dimenzí, pak taková geometrie vyšetřuje vlastnosti objektů, které jsou invariantní vzhledem k zobrazením z grupy **G**, přičemž tato zobrazení hrají tutéž úlohu, jako přemístění v euklidovské geometrii resp. projektivní zobrazení v projektivní geometrii. Grupa **G** se nazývá fundamentální (základní) grupa uvažované geometrie. Takovým způsobem jsou generovány různé druhy geometrií, tedy afinní geometrie, konformní geometrie, annalagmatická geometrie, Laguerova geometrie, hermitovská geometrie a další (Cartan, 1927 in Norden, 1956, str. 486).

Nejpodstatnější pojem, který je nezbytný pro další výklad, je dle Kleina v 1§ jeho „Erlangenského programu pojem grupy prostorových zobrazení (transformací) (Klein, 1872; Klein,1974). Existují taková zobrazení prostoru, která ponechávají obecně beze změny geometrické vlastnosti prostorových objektů. Geometrické vlastnosti, dle svého určení (svého definování), nezávisí na poloze, kterou v prostoru zaujímá vyšetřovaný objekt, nezávisí na jeho absolutní velikosti a nakonec nezávisí na orientaci při rozložení jeho částí. Proto se nemění vlastnosti prostorového obrazce v závislosti na všech přemístěních v prostoru, na podobných zobrazeních, na zrcadlovém zobrazení a na všech zobrazeních, které z nich mohou být složeny (dle příslušného zákona vnitřní kompozice). Množina všech těchto zobrazení bývá nazývána hlavní grupa přemístění

v prostoru; Geometrické vlastnosti se nemění v závislosti na zobrazeních z hlavní grupy a obráceně je možné říci: geometrické vlastnosti jsou charakterizovány svou neměnností vzhledem k zobrazením z hlavní grupy (Klein, 1872, 1974, §1). Poznamenejme, že se jedná o euklidovskou geometrii, jejíž grupa zobrazení obsahuje mimo zobrazení

přemístění a zrcadlového (reflexního) zobrazení ještě podobná zobrazení. Přejdeme-li od 3-dimenzionálního prostoru elementární geometrie k n-rozměrné číselné varietě a od hlavní grupy k různým jiným grupám zobrazení na varietě, pak k tomuto Klein poznamenává: „Nyní již nemáme, tak jako v euklidově prostoru, grupu, která by vystupovala do popředí svým významem mezi ostatními grupami, – každá grupa je stejně významná. Jako zobecnění euklidovské geometrie získáváme tímto způsobem následující úlohu: Je dána varieta a na ní grupa zobrazení. Je nutné vyšetřit ty vlastnosti obrazců z variety, které se nemění v závislosti na zobrazení z grupy zobrazení (Klein, 1872,1974,§1). V tomtéž §1 v následujícím textu dále Klein ještě abstraktněji formuluje „erlangenský“ přístup ke geometrii: „Je dána varieta a na ní grupa zobrazení. Je nutné vyvinout teorii invariantů této grupy“ (Klein, 1872, 1974, §1).

Tímto způsobem odpovídá Klein na otázku: Co je to geometrie? Je to teorie invariantů určité grupy, uvažované jako grupa zobrazení zadané variety. Za výchozí (dle Cartana fundamentální) grupu je možné považovat libovolnou myslitelnou grupu zobrazení zadané variety, což vede k rozmanitosti geometrií a jejich ekvivalenci, přičemž vzájemný vztah těchto grup popisuje vzájemnou souvislost odpovídajících geometrií. Takový přístup, jak Klein dále ukazuje, dovoluje zahrnout „nikoli pouze (obvyklou) euklidovskou geometrii, ale i novější geometrické metody a rovněž různé přístupy vyšetřování variet libovolné dimenze (Klein, 1872, 1974, §2). Přirozeným ale závažným důsledkem Kleinova přístupu je, jak zdůrazňuje on sám, „libovolnost ve výběru přidružené grupy zobrazení a odtud vyplývající a v tomto smyslu přijímaná rovnoprávnost všech typů geometrických vyšetřování, které podléhají tomuto společnému požadavku“ (Klein, 1872, 1974, §2).

Je možno říci, že geometrie jako vědecká teorie, musí obsahovat logické soudy, které mají určitý stupeň obecnosti, to znamená, že se vztahují nikoli k výjimečným situacím, ale k celé třídě „vztažných soustav“, nebo-li „soustavám souřadnic“, ve kterých se zapisují zobrazení, která uvádějí do souvislosti tyto „soustavy“. Odtud mimo jiné vyplývá nezbytnost teoretického grupového přístupu k jakékoliv vědecké teorii, přístupu, který byl deklarován v geometrii a o něco dříve v méně rozvinuté formě a značně specializovanější oblasti – teorii řešitelnosti algebraických rovnic E. Galoiseho. Klein jasně chápal tuto skutečnost a ve vztahu k elementární geometrii ji vyjádřil následujícími slovy: „představme si na okamžik, že prostor je nehybný (neprobíhá v něm pohyb) je ztuhlou varietou, pak každý obrazec má *individuální*

význam; z vlastností, které má jako individuum, jsou geometrickými vlastnostmi pouze ty, které zůstávají neměnné vzhledem ke všem zobrazením hlavní grupy“ (Klein, 1872, 1974, §1). Cartan vyjadřuje tuto myšlenku mnohem průzračněji a obecněji: „Všechny tak zvané Kleinovy prostory jsou ***homogenní*** v tom smyslu, že jejich vlastnosti jsou invariantní vzhledem k zobrazením z odpovídající fundamentální grupy: v určitém smyslu je tato grupa mírou homogennosti prostoru (to znamená mírou obecnosti tvrzení odpovídajících této grupě zobrazení)“ (Cartan, 1927). Dále pak Cartan říká:

„V prostoru, který není homogenní, tj. jehož fundamentální grupu je možné převést na identické zobrazení, není možné ve smyslu „Erlangenského programu“ konstruovat obecné (tj. vědecké) závěry: celá geometrie by se zúžila na speciální fakta bez souvislosti jedněch s druhými“ (Cartan, 1927, část I).

V souladu s Kleinovou definicí geometrie, závisí tato geometrie na výchozí varietě a na ní zadané fundamentální grupě zobrazení (tj. grupě zobrazení této variety). Avšak již v §5 „Programu“ Klein zdůrazňuje zejména určující úlohu grupy a druhořadou úlohu – variety: „Pokud základem vyšetřování je jedna a tatáž grupa přemístění, pak obsah geometrie zůstává neměnným, tj. každý teorém, který se získá při jednom výběru prvku, bude teorémem při jakémkoli jiném výběru, – mění se pouze uspořádání a souvislosti teorémů. To tedy znamená, že podstata spočívá v grupě zobrazení; počet rozměrů, připisovaných varietě, je druhořadý“ (Klein, 1872, 1974, §5).

V tomto Kleinově vyjádření je obsažen podstatný geometrický princip, který je zobecněním principu duality projektivní geometrie, přičemž Klein jej nazývá princip přenosu (Tento termín, jakož i samotný princip pro případ přenosu faktů projektivní metrickou geometrií v rovině do teorie binárních forem zavedl L. O. Hesse (Hesse, 1866, 1876)**.).** Podle tohoto principu přenosu není podstatným rozdíl mezi geometriemi s izomorfními fundamentálními grupami a různými výchozími varietami z toho důvodu, že v důsledku platnosti izomorfizmu grup odpovídá každému faktu jedné geometrie analogický fakt jiné geometrie, což lze chápat tak, že máme vlastně dva exempláře jedné a téže geometrie.

Rozsáhlá třída geometrií, jakoby vložených jedna do druhé, je tvořena grupou projektivních zobrazení a jejích postupně do sebe vložených podgrup:afinní grupa, grupa podobností, grupa přemístění prostoru s konstantní křivostí (speciálně Euklidova grupa a grupa přemístění hyperbolického a eliptického prostoru) a další. Do tohoto

schématu projektivních zobrazení, je zařazena řada geometrií, které jsou ekvivalentní z geometrického hlediska s geometriemi Poincarého grupy (s fundamentální grupou speciální teorie relativity) a Galileiho-Newtonovou grupou (fundamentální grupa klasické fyziky). Uvedená hierarchie geometrií je organizována principem přidružení, který dle slov Eli Cartana je „principem, hrajícím základní úlohu v „Erlangenském programu“ (Cartan, 1927, část II). Klein tento princip vyjádřil v následujícím tvaru: „Jestliže hlavní grupu zaměníme obsáhlejší grupou, pak se zachovává pouze část geometrických vlastností. Ty vlastnosti, které zůstanou, nejsou již vlastnostmi prostorových objektů samotných, ale vlastnostmi systému (objektu), který je získán tím, že je k němu přidružen zvláštní (výjimečný) obraz. Tento zvláštní (výjimečný) obraz (protože je obecně určen) je určen tím, že při jeho připevnění do prostoru jsou možné pouze zobrazení hlavní grupy“ (Klein, 1872, 1974, §2).

Obecně řečeno, jestliže **G** je výchozí grupa zobrazení (například projektivní) a $\mathbf{G}_1$ je její podgrupa (například grupa přemístění prostoru konstantní křivosti), pak geometrie podgrupy $\mathbf{G}_1$ je vložena do geometrie grupy **G** v tom smyslu, že do vyšetřování se při tom zavádí ještě určitý „výjimečný obraz“ Ω (tj. určitá plocha druhého řádu), který je invariantní vzhledem k zobrazením z grupy $\mathbf{G}_1$. Proto studování určitého geometrického obrazce ω v geometrii $\mathbf{G}_1$ se převádí na studium $\Omega \cup \omega$ v geometrii **G**.

To tedy znamená, že v rámci „Erlangenského programu“ máme v podstatě dočinění s konečnými spojitými Lieovými grupami (konečnými v tom smyslu, že závisí na konečném počtu parametrů) a odpovídajícími geometriemi.

Ovšem do rámce „Erlangenského programu“ je možné zahrnout i rozsáhlejší spojité grupy, mezi nimiž je obsažena grupa projektivních zobrazení, avšak nepatřící do skupiny Lieových grup s konečným počtem parametrů. Odpovídající prostory mají vyšší stupeň homogennosti než projektivní prostor, ale v geometrickém porovnání jsou mnohem chudší. Jedná se především o nekonečnou grupu spojitých zobrazení; odpovídající geometrie je topologie a odpovídající prostor, topologický prostor, je maximálně homogenní. Nekonečná grupa všech diferencovatelných zobrazení poskytuje podstatně bohatší geometrii. Princip přidružení působí i zde: „Projektivní geometrii je možné odvodit rovněž z geometrie bodových zobrazení (tj. geometrie, která odpovídá grupě všech spojitých nebo diferencovatelných zobrazení) přidružením

variety rovin, tak jako se elementární geometrie vyvozuje z projektivní geometrie přidružením nekonečně vzdálené kružnice na kouli“ (Klein, 1872, 1974, §8.3).

Na závěr tohoto paragrafu řekněme několik slov o vztahu „Erlangenského programu“ a druhé základní geometrické koncepce, koncepce B. Riemanna (Riemann, 1866) ve které je základním pojmem fundamentální grupa a fundamentální diferenciální kvadratická forma, která představuje zobecnění pojmu vzdálenosti mezi dvěma nekonečně blízkými body. Omezíme se přitom na vyjádření E. Cartana o nemožnosti zahrnout (v širokém smyslu) Riemannovu geometrii do rámce „Erlangenského programu“: „I když by bylo možné pokusit se podřídit riemannovskou geometrii ústřední Kleinově myšlence tak, že bychom využili princip, který hraje základní úlohu v „Erlangenském programu“, totiž principem přidružení. Skutečně, Riemannova geometrie studuje invarianty nekonečné grupy všech bodových zobrazení s proměnnými, ke které je přidružena určitá kvadratická forma. Takové pojetí této otázky by bylo odklonem od Kleinova principu přidružení v jeho současném významu, protože vlastnosti studované Riemannovou geometrií nelze zkoumat jako invariantní vzhledem k zobrazením, která zachovávají přidruženou kvadratickou formu a to v důsledku toho, že v obecném případě taková zobrazení neexistují“ (Cartan, 1927, část II).

Ve 20-tých letech XX. století byla rozpracována syntetická koncepce (Levi-Civita, Weyl, Cartan, Schouten a další), která spojuje směry Kleina a Riemanna, avšak s nezpochybnitelným primátem teoreticko-grupového přístupu, což dovoluje hovořit o originálním rozšíření „Erlangenského programu“ (Cartan, 1927, část II). Prvotní formulace „Erlangenského programu“ je plně schopna obsáhnout základní fyzikální teorie s výjimkou obecné teorie relativity a geometrizovaných jednotných teorií pole.

2. Předpoklady pro vytvoření „Erlangenského programu“

Předchozí odstavec shrnuje základní logické konstrukční postupy, které vedly ke vzniku „Erlangenského programu“ jako zákonitého výsledku rozvoje geometrie XIX. století. Podrobnosti týkající se historie vývoje geometrie lze nalézt v literatuře (Wussing, 1969; Norden, 1956; Bell, 1945; Coolidge, 1940; Klein, 1926; Weyl, 1930; Caratheodory, 1919; Sommerfeld, 1919). Uveďme pouze resumé tohoto výzkumného snažení a předcházejícího odstavce.

Základní hybnou silou Kleinovy syntézy je proces rozdělení geometrie na řadu různých geometrických odvětví, které se někdy rozvíjely nezávisle na sobě, jenž dosáhl svého maxima na přelomu XIX. století. Hlavní úlohu v tom sehrálo formování projektivní geometrie do samostatného odvětví geometrie a to nezávisle na geometrii metrické. Objevení neeuklidovské geometrie bylo druhým důležitým rysem procesu rozdělování geometrie. Počáteční stadium rozpracovávání vícerozměrné geometrie, rozšíření pojmu souřadnic geometrie na přímce, kruhové, kulové a dalších geometrií, první topologické výzkumy, rychlý vývoj diferenciální geometrie ploch atd., to vše jsou různé stránky vzpomenutého procesu diferenciace geometrie.

Na druhé straně postupně vznikají v samotné geometrii a algebře prostředky k překonání postupující diferenciace a nalezení cesty k syntéze. Je to především vynikající Möbiusova koncepce „geometrické příbuznosti“, předchůdkyně Kleinova „Erlangenského programu“ (Wussing, 1969) a společně s ní systematická aplikace metody transformací a invariantů. Následně pak algebraická teorie invariantů, která vděčí za své rozpracování především anglické škole. Zdůrazněme, že zejména práce, jejichž autorem je Arthur Cayley, které se úzce vázaly na teoreticko-invariantní algebraické výzkumy anglické školy a měly určující úlohu v rozvíjení myšlenek, vedly

k „Erlangenskému programu“. Posléze to byly také základy teorie grup substitucí, které vznikly v algebře v souvislosti s teoreticko-číselnými a geometrickými výzkumy. Vnitřní logika vývoje geometrie na přelomu XVIII. a XIX. století docházela k závěru, že je třeba syntézy jednotlivých specializovaných odvětví geometrie, přičemž rozvoj matematiky jako celku připravil prostředky nezbytné k realizaci této syntézy.

Následující chronologický přehled poskytuje odpověď na otázku, z jakých důvodů byl „Erlangenský program“ předložen právě v 70-tých letech XIX. století:

- 1857 **Karl Georg Christian von Staudt** (24. 1. 1798 – 1. 6. 1867) základy projektivní geometrie nezávislé na metrické geometrii;
- 1854 – 1859 **Arthur Cayley** (16. 8. 1821 – 26. 1. 1895) – základy teorie invariantů;
- 1858 – 1861 **Heinrich Siegfried Aronhold** (16. 7. 1819 – 13. 3. 1884) a **Rudolf Friedrich Alfred Clebsh** (19. 1. 1833 – 7. 11. 1872) – symbolická (formální) teorie invariantů;
- 1859 **Arthur Cayley** (16. 8. 1821 – 26. 1. 1895) – Cayleyho koncepce definici míry pomocí projektivní geometrie;
- 1860 – 1863 zveřejnění korespondence mezi **Carl Friedrichem Gaussem** a **Heinrichem Christianem Schumacherem** (3. 9. 1780 – 28. 12. 1850) o neeuklidovské geometrii;
- 1866 – 1868 **Eugenio Beltrami** (16. 11. 1835 – 18. 2. 1900), **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (17. 9. 1826 – 20. 7. 1866), **Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz** (31. 8. 1821 – 8. 9. 1894) – zásadní výsledky bádání v neeuklidovské geometrii a kinematický základ geometrie;
- 1865 – **Marie Ennemond Camille Jordan** (5. 1. 1838 – 22. 1. 1922) – první Jordanovy práce o Galoiseově teorii;
- 1870 – **M. E. C. Jordan** – Traité des substitutions et des équations algébriques, Gauthier-Villars;
- 1870 – první důkladný výklad teorie grup substitucí.

Z uvedeného je patrné, že zásadní výsledky, získané v projektivní geometrii, algebraické teorii invariantů, teorii grup substitucí a dalších oborech, které tvoří základ „Erlangenského programu“, byly formulovány přibližně během 15-cti let před konečnou

formulací programu. Závažné práce von Helmholtze, Riemanna, Beltramiho, Jordana byly publikovány v intervalu 3-4 let před zveřejněním „Erlangenského programu“.

Na základě uvedených skutečností lze o „Erlangenském programu“ říci, že je zákonitým a nevyhnutelným, tedy až překvapivě deterministickým důsledkem vývoje geometrie.

2.1 Fyzikální základy jednotlivých geometrií

Existuje poměrně početná skupina prací, které popisují vývoj různých odvětví geometrie (Klein, 1926; Wussing, 1969; Coolidge, 1940). Zabývejme se dále některými ze základních geometrií, které jsou spojeny s různými přírodními a technickými vědami majícími vliv na jejich vznik a rozvoj.

2.1.1 Euklidova (elementární) geometrie

Prvním systematickým zpracováním elementární geometrie jsou Euklidovy základy (Elementa). Jedním ze způsobů důkazů, které užíval, byla metoda skládání nebo posouvání, která byla realizována pomocí přemístění rovinných nebo prostorových útvarů, to znamená pomocí pohybu, což je pojem mechanický. Kinematický přístup ke geometrii byl svázán s charakteristickou skutečností, že geometrické konstrukce byly prováděny pouze pravítkem a kružítkem. Metrický aspekt elementární geometrie, který byl spojován s měřením délek, ploch a objemů, rozvinul Archimédes v úzké návaznosti na úlohy mechaniky, zejména pak statické mechaniky. Elementární geometrie byla pak dále rozvíjena pracemi významných antických astronomů Hipparchos, Menelaos, Ptolemaius, kteří svými astronomickými výzkumy rozvinuly značnou část trigonometrie a sférické geometrie. Získali některé důležité výsledky, vztahující se na základy projektivní a konformní geometrie (např. Menelaova věta a stereografická projekce Ptolemaiova), které se až do XIX. století rozvíjely v rámci elementární geometrie. Těchto několik příkladů je dostatečným svědectvím o významu přírodních věd a praxe pro vznik a rozvoj elementární geometrie.

2.1.2 Analytická geometrie

Rozvoj algebry v rozmezí XV. – XVII. století a zejména pak na počátku století XVII. -tého vytvořil vhodné prostředí pro rozšíření bádání o kuželosečkách. Rozhodujícím přínosem pro tuto oblast byly výsledky, které získal **René (Renatus Cartesius) Descartes** (31. 3. 1596 – 11. 2. 1650) a **Pierre de Fermat** (17. 8. 1601 – 12. 1. 1665). V široké odborné veřejnosti je celkem dobře znám fakt, že rozpracování analytické geometrie jak Descartesem tak de Fermatem bylo ve značné míře vázáno na řešení úloh přírodních tak i technických věd. Zvláště se to týká Descartese, jehož analytická geometrie byla velkou měrou výsledkem studia kinematiky a kinematických mechanismů. Na konstrukci analytické geometrie měla vliv nejen algebraická symbolika ale rovněž přístroje, které Descartes vynalezl pro grafické znázornění různých křivek.

2.1.3 Deskriptivní a projektivní geometrie

Deskriptivní geometrie vznikala bezprostředně na základě řešení praktických úloh. Teorie grafického zobrazování byla neustále úzce propojována s geometrickou optikou a výrazně ji rozpracoval římský architekt **Marcus Vitruvius Pollio** (narozen přibližně v letech 80 – 70 př. n. l. – zemřel přibližně roku 25 př. n. l.). V období renesance dochází k rozvoji nauky o perspektivě (**Leonardo da Vinci** (15. 4. 1452 – 2. 5. 1519)**, Albrecht Dürer** (21. 5. 1471 – 6. 4. 1528)) a **Gérard Desargues** (1591 – říjen 1661) se v epoše moderního věku stává jedním ze zakladatelů axonometrie a posléze projektivní geometrie. **Gaspard Monge** (10. 5. 1746 – 28. 7. 1818), jehož rozpracování deskriptivní geometrie je úzce spojeno s inženýrskou praxí, se rovněž podílí významnou měrou na vytvoření základů projektivní geometrie.

Projektivní geometrii formuje jako samostatné odvětví geometrie na počátku XIX. století svými pracemi vojenský inženýr (žák Mongeův) **Jean-Victor Poncelet** (1. 7. 1788 – 22. 12. 1867). Výchozím bodem Ponceletovy konstrukce bylo využití metody středového promítání, přičemž řeší úlohu nalézt takové vlastnosti geometrických objektů, které jsou invariantní vzhledem k operaci středového promítání. V období 20 -tých až 50 -tých let XIX. století pak nastává bouřlivý rozvoj projektivní geometrie a zavedení projektivního způsobu myšlení do algebraické geometrie,

algebraické teorie invariantů a dalších. Projektivní metody se aplikují úspěšně v mechanice, přičemž mechanika nejen tyto metody úspěšně aplikuje, ale také simuluje další rozvoj projektivní geometrie pracemi, jejichž autory jsou například **August Ferdinand Möbius** (17. 11. 1790 – 26. 9. 1868), **Michel Chales** (15. 11. 1793 – 18. 12. 1880), **Julius Plücker** (16. 6. 1801 – 22. 5. 1868), **Jakob Steiner** (18. 3. 1796 – 1. 4. 1863), **Karl Georg Christian von Staudt** (24. 1. 1867 – 1. 6. 1867) a další. **Luigi Cremona** (7. 10. 1830 – 10. 6. 1903) formuluje grafickou statiku, která vyšetřuje metodami projektivní geometrie podmínky rovnováhy tyčových systémů nedlouho před začátkem erlangenského období.

Fyzikálním základům jednotlivých geometrií by bylo možné věnovat mnoho stránek, přistupme však ke konstrukci obecných ekonomických veličin in medias res v následující kapitole.

3. Geometrie (univerzálních) abstraktních ekonomických veličin

3.1 Kvantitativní a kvalitativní vyjádření skalárních abstraktních ekonomických veličin

Označme $\mathfrak{S}$ množinu všech možných stavů ekonomického systému a označme $\mathfrak{B}(\langle 0, a\rangle)$ množinu všech reálných funkcí F jedné reálné proměnné definovaných na $\langle 0, a\rangle$, které mají tyto vlastnosti:

1) nechť $F \in \mathfrak{B}(\langle 0, a\rangle)$ a pro každé $x \in (0, a)$ je $F(x) > 0$;

2) nechť $F \in \mathfrak{B}(\langle 0, a\rangle)$, funkce F může (ale ne vždy musí) nabývat nulových funkčních hodnot pouze v krajních bodech intervalu $\langle 0, a\rangle$;

3) každá funkce $F \in \mathfrak{B}(\langle 0, a\rangle)$ má na intervalu $\langle 0, a\rangle$ spojitou a vlastní derivaci až do řádu čtvrtého včetně (funkci s touto vlastností nazýváme v této práci také hladkou čtvrtého řádu).

Skalární abstraktní ekonomická veličina $\mathfrak{F}$ je zobrazení (operátor), které každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jednu funkci F z množiny $\mathfrak{B}(\langle 0, a\rangle)$. Tato funkce F popisuje preferované vlastnosti skutečného ekonomického systému a je modelem vývoje stavu ekonomického systému v závislosti na stavových proměnných v daném časovém okamžiku. Konkrétní funkci F nazýváme kvantitativní vyjádření abstraktní ekonomické veličiny $\mathfrak{F}$ v daném čase a považujeme ji za jedno z možných kvantitativních vyjádření abstraktní ekonomické veličiny. Pro jiný čas se může kvantitativní vyjádření abstraktní ekonomické veličiny změnit. Právě metodologie kvantové mechaniky může nabídnout parciální diferenciální rovnici pro nalezení

časového vývoje kvantitativního vyjádření abstraktní ekonomické veličiny, podobnou např. Schrödingerově rovnici, tj. $\partial F/\partial t = \hat{H}\ F$, kde $\hat{H}$ je operátor, který ovšem nemusí být nutně lineární. Jinými slovy bylo by možné uspořádat množinu statických kvantitativních vyjádření dle rostoucího fyzikálního času.

Jednotlivým abstraktním ekonomickým veličinám přiřazujeme množiny jejich kvantitativních vyjádření H(𝔉). H(𝔉) je obor hodnot (zobrazení 𝔉) skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 a D(𝔉) = 𝔖 je definiční obor skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉. Jak jsme již uvedli, každé konkrétní kvantitativní vyjádření F abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 je předpokládáno ve tvaru nezáporné reálné funkce jedné reálné proměnné x, přičemž F má vlastnosti 1), 2) a 3) z definice množiny 𝔅(⟨0, a⟩). Každá funkční hodnota F(x) kvantitativního vyjádření F je vyjádřena na základě provedených ekonomických šetření ve vhodně zvolených jednotkách. Funkční hodnoty kvantitativních vyjádření skalární abstraktní ekonomické veličiny umožňují kvantitativně (číselně) porovnávat vyšetřovanou ekonomickou vlastnost v jednom a tomtéž čase nebo v různých časech. Zvolenou jednotku pro kvantitativní porovnávání různých hodnot kvantitativního vyjádření F skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 označme [F(x)]. Číslo, které udává kolikrát je zvolená jednotka [F(x)] obsažena v hodnotě F(x) ,budeme nazývat velikost hodnoty kvantitativního vyjádření skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 a značit {F(x)}. Mezi hodnotou F(x) , velikostí {F(x)} a zvolenou jednotkou [F(x)] hodnoty kvantitativního vyjádření abstraktní skalární ekonomické veličiny 𝔉 platí vztah

$$F(x) = \{F(x)\} \,.\, [F(x)]. \qquad (1)$$

Hodnota F(x) kvantitativního vyjádření F skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 je dle vztahu (1) určena jednoznačně dvěma činiteli, kteří ji určují jak po stránce kvantitativní, tak po stránce kvalitativní. Kvalita hodnoty kvantitativního vyjádření skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 je určena její jednotkou [F(x)] , kvantita hodnoty kvantitativního vyjádření skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 je dána její velikostí {F(x)}.

Závislost skalární abstraktní ekonomické veličiny 𝔉 na skalární abstraktní ekonomické veličině 𝔛 symbolicky zapíšeme 𝔉(𝔛). Skalární abstraktní

ekonomickou veličinu **F** nazýváme závisle proměnnou skalární abstraktní ekonomickou veličinou. Skalární abstraktní ekonomickou veličinu **X** nazýváme nezávisle proměnnou skalární abstraktní ekonomickou veličinou.

Poznámka 1

Termín „skalární nezávisle proměnná abstraktní ekonomická veličina“ resp. „skalární závisle proměnná abstraktní ekonomická veličina“ budeme, pokud nenastane nedorozumění, zkracovat takto: „skalární závisle proměnná abstraktní ekonomická veličina“ = „závisle proměnná ekonomická veličina“ = „závislá ekonomická veličina“ a obdobně „skalární nezávisle proměnná abstraktní ekonomická veličina“ = „nezávisle proměnná ekonomická veličina“ = „nezávislá ekonomická veličina“.

Poznámka 2

Graf kvantitativního vyjádření F skalární abstraktní ekonomické veličiny **F**

v n+1 – rozměrném Euklidově prostoru je množina bodů $[x_1, x_2, ..., x_n, z]$, jejichž souřadnice vyhovují vztahu $z = F(x_1, x_2, . . .,x_n)$, F je reálná funkce n reálných proměnných; o funkci F budeme předpokládat, že je hladká dostatečného řádu, přičemž její graf v n+1 – rozměrném Euklidově prostoru nazýváme nadplochou, v třírozměrném Euklidově prostoru plochou, v dvourozměrném Euklidově prostoru grafem funkce.

Přejděme nyní opět k případu, kdy kvantitativní vyjádření skalární abstraktní ekonomické veličiny jsou nezáporné reálné funkce jedné reálné proměnné. Ekonomickým šetřením zjištěná konkrétní hodnota kvantitativního vyjádření závislé ekonomické veličiny **F** je funkční hodnota F(x) reálné funkce jedné reálné proměnné x, kde x je hodnota kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny **X**, tedy pro zjednodušení předpokládáme X(x) = x pro

$x \in \langle 0, a\rangle \subset E_1$, přičemž E_1 je metrický prostor, jehož prvky jsou reálná čísla a vzdálenost dvou bodů $C[x_C]$ a $D[x_D]$ o souřadnicích x_C a x_D je dána metrikou $\rho(C,D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2} = |x_C - x_D|$.

3.2 Průměrná a mezní skalární abstraktní ekonomická veličina

Předpokládejme, že je dána závisle proměnná skalární ekonomická veličina $\mathbf{F}$ závisející na nezávisle proměnné skalární ekonomické veličině $\mathbf{X}$ (též značíme $\mathbf{F}(\mathbf{X})$). Závislá skalární abstraktní ekonomická veličina $\mathbf{F}$ přiřazuje každému stavu vyšetřovaného ekonomického systému kvantitativní vyjádření F, které je reálnou funkcí jedné reálné proměnné x, $x \in \langle 0, a\rangle$, přičemž předpokládáme v dalším, že X(x) = x. K závislé ekonomické veličině $\mathbf{F}$ budeme dále definovat závisle proměnnou průměrnou skalární abstraktní ekonomickou veličinu $\mathbf{F_A}$ a závisle proměnnou mezní skalární abstraktní ekonomickou veličinu $\mathbf{F_M}$.

3.2.1 Definice průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny

Závisle proměnná průměrná skalární bstraktní ekonomická veličina $\mathbf{F_A}$ je zobrazení, které každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jednu reálnou funkci jedné reálné proměnné, kterou označíme AF (Average Function) a budeme nazývat průměrná funkce, přičemž v návaznosti na definici abstraktní ekonomické veličiny (odst. 3.1.) lze AF nazvat také kvantitativní vyjádření závisle proměnné průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_A}$. Libovolná funkční hodnota AF(x) funkce AF je podíl funkční hodnoty F(x) kvantitativního vyjádření F závisle proměnné abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$ v bodě x a funkční hodnoty X(x) = x kvantitativního vyjádření X nezávislé abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{X}$

(kvantitativní vyjádření $F \in \mathfrak{B}(\langle 0,a\rangle)$. To jest, pak pro funkční hodnoty průměrné funkce AF platí

$$AF(x) = \frac{F(x)}{X(x)} = \frac{F(x)}{x} \qquad (2)$$

kde $x \in D(AF) = D(F) = \langle 0,a \rangle$, $a \in E_1$, $a > 0$. D(AF) resp. D(F) značí definiční obory funkcí AF resp. F, přičemž dále předpokládáme $\lim_{x \to 0_+} \frac{F(x)}{x} \geq 0$ Předpokládejme dále, že v metrickém prostoru E_2 je zavedena obvyklá pravoúhlá soustava souřadnic se souřadnicovými osami $\hat{x}$, $\hat{y}$ a metrikou $\rho(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, kde A, B jsou dva body metrického prostoru E_2, které jsou zadány svými x-ovými a y-ovými souřadnicemi, tj. $A = [x_A, y_A]$, $B = [x_B, y_B]$. Číselná hodnota podílu $\frac{F(x)}{x}$, tj. $\{\frac{F(x)}{x}\}$, nebo-li velikost hodnoty kvantitativního vyjádření $\{AF(x)\}$ průměrné ekonomické veličiny $\mathbf{F}_A$, je také rovna hodnotě funkce tangens pro úhel φ, který svírá úsečka s krajními body [0,0] a [x,F(x)] s úsečkou s krajními body [0,0] a [0,x], která leží na souřadnicové ose $\hat{x}$, tj.

$$\operatorname{tg} \varphi(x) = \frac{\{F(x)\}}{\{x\}} .$$

3.2.2 Definice mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny

Závisle proměnná skalární mezní ekonomická veličina $\mathbf{F}_M$ je zobrazení, které každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jednu reálnou funkci jedné reálné proměnné, kterou označíme MF a budeme nazývat mezní funkce (Marginal Function), přičemž v návaznosti na definici abstraktní ekonomické veličiny (odst. 3.1.) lze funkci MF nazývat také kvantitativní vyjádření závisle proměnné mezní abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_M$. Každé kvantitativní vyjádření MF závisle proměnné mezní abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_M$ je první derivace kvantitativního vyjádření F na intervalu $\langle 0,a \rangle$ závisle proměnné abstraktní veličiny $\mathbf{F}$. Libovolná funkční hodnota mezní funkce MF(x) je funkční hodnota derivace kvantitativního vyjádření F závisle proměnné abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$, tj.

$$MF(x) = \frac{dF}{dx}(x) = F'(x) \qquad (3)$$

pro $x \in$ D(MF) = D(AF) = D(F´) = D(F) = $\langle 0, a \rangle$, $a \in E_1$, $a > 0$, kde F´ označuje první derivaci funkce F na intervalu $\langle 0, a \rangle$ a F´(x) funkční hodnotu funkce F´ v bodě $x \in \langle 0, a \rangle$, písmeno D značí definiční obor funkce uvedené za ním v kulatých závorkách. Dále předpokládáme, že funkce MF má vlastní spojitou derivaci až do řádu třetího včetně na svém definičním oboru $\langle 0, a \rangle$.

S ohledem na fyzikální význam diferenciálu funkční hodnota MF(x) je počet (množství) jednotek o které se změní funkční hodnota F(x) kvantitativního vyjádření F závislé abstraktní ekonomické veličiny **F**, změníme-li o dx funkční hodnotu X(x) = x kvantitativního vyjádření X nezávislé abstraktní ekonomické veličiny **X** . Také lze říci, že MF(x) je počet jednotek o které se změní F(x), jestliže se x zvětší o jednotkové množství.

Diferenciální změny hodnot chápeme následovně. Je-li dF(x) změna funkční hodnoty F(x) a dx změna funkční hodnoty X(x) = x, pak jsou to změny tak malé, aby je bylo možné považovat za diferenciály a zároveň tak velké, aby je bylo možné považovat za měřitelné hodnoty. Vztah (3) můžeme tedy vyjádřit podrobněji pomocí vztahu (1) takto

$$MF(x) = \{MF(x)\}.\,[MF(x)] = \{\frac{dF}{dx}(x)\}.[\frac{dF}{dx}(x)] = \frac{\{dF(x)\}}{\{dx\}} \,.\frac{[dF(x)]}{[dx]}, \qquad (4)$$

přičemž pro jednotku [MF(x)] platí vyjádření

$$[MF(x)] = \frac{[dF(x)]}{[dx]} \,. \qquad (5)$$

Spojíme-li významy vztahů (3), (4) a (5), je pak zřejmá již jednou uvedená formulace významu hodnoty MF(x) kvantitativního vyjádření MF závislé mezní ekonomické veličiny $\mathbf{F_M}$: funkční hodnota F´(x) funkce F´ určuje o kolik jednotek se změní hodnota závislé ekonomické veličiny F(x) , jestliže hodnota X(x) = x nezávislé ekonomické veličiny **X** se změní o jednotkové množství.

Poznamenejme pro úplnost, nezávislá resp. závislá ekonomická veličina nemusí být vždy pouze ekonomickou veličinou, ale může být i veličinou fyzikální; příkladem může sloužit veličina ekonomická i fyzikální, nesoucí název práce, jejíž jednotka je ve

fyzikálních vědách nazývána joule (J) a vědách ekonomických je kromě této jednotky užívána (mimo jiné) také měnová jednotka.

Předpokládejme, podobně jako v definici průměrné ekonomické veličiny (odstavec 2.2.1), že v metrickém prostoru E_2 je zavedena pravoúhlá soustava souřadnic se souřadnicovými osami $\hat{x}$ a $\hat{y}$, přičemž vzdálenost dvou bodů A=$[x_A, y_A]$ a B= =$[x_B, y_B]$ je určována metrikou $\rho(x,y) = \sqrt{(x_A - y_A)^2 + (x_B - y_B)^2}$. Číselná hodnota funkce MF = F´ v bodě x, tedy $\{MF(x)\} = \{F'(x)\}$, je rovna hodnotě funkce tangens pro úhel ψ, který svírá tečna grafu funkce F v bodě $[x, F(x)]$ se souřadnicovou osou $\hat{x}$ metrického prostoru E_2, tj. tg $\psi(x) = \{MF(x)\} = \{F'(x)\}$ (geometrický význam derivace).

3.2.3 Definice mezní průměrné abstraktní ekonomické veličiny

Závisle proměnná mezní průměrná skalární abstraktní ekonomická veličina, značená $\mathbf{F}_{MA}$ (též lze značit $\mathbf{F}_{MA} = \mathbf{F}_{MA}(\mathbf{X})$) je zobrazení, které každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jednu reálnou funkci jedné reálné proměnné, kterou označíme MAF a budeme nyzývat mezní průměrná funkce (Marginal Average Function), přičemž v návaznosti na definici abstraktní ekonomické veličiny (odst. 3.1.) lze MAF nyzývat také kvantitativní vyjádření závisle proměnné mezní průměrné skalární ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{MA}$ **.** Kvantitativní vyjádření MAF závisle proměnné mezní průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{MA}$ je první derivace kvantitativního vyjádření (průměrné funkce) AF na intervalu $\langle 0, a\rangle$ závisle proměnné průměrné abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{A}$. Libovolná funkční hodnota MAF(x) funkce MAF je funkční hodnota derivace průměrné funkce AF´ pro x z intervalu $\langle 0, a\rangle$. Budeme předpokládat, že mezní průměrná funkce MAF má spojité vlastní derivace až do třetího řádu včetně na svém definičním oboru D(MAF) = D(AF) = D(F) =$\langle 0,\ a\rangle$, Skutečnost, že kvantitativní vyjádření MAF mezní průměrné abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{MA}$ je (první) derivace kvantitativního vyjádření AF průměrné ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{A}$, vyjádříme pomocí rovnosti funkcí na intervalu $\langle 0, a\rangle$

$$MAF = AF' . \qquad (6)$$

Vztah (6) lze vyjádřit pomocí funkčních hodnot takto

$$\mathrm{MAF(x)} = \mathrm{AF'(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\mathrm{F(x)}}{\mathrm{x}}\right) \tag{7}$$

pro $\mathrm{x} \in \mathrm{D(MAF)} = \mathrm{D(F)} = \langle 0, \mathrm{a} \rangle$, kde opět D(MAF) je definiční obor funkce AMF a D(F) je definiční obor funkce F a oba definiční obory jsou rovny témuž uzavřenému intervalu $\langle 0, \mathrm{a} \rangle$.

Provedeme-li derivaci podílu funkcí ve vztahu (7), lze kvantitativní vyjádření mezní průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny zapsat pomocí kvantitativních vyjádření mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny a průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny na uzavřeném intervalu $\langle 0, a \rangle$

$$\mathrm{MAF(x)} = \frac{\mathrm{F'(x)} - \frac{\mathrm{F(x)}}{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{MF(x)} - \mathrm{AF(x)}}{\mathrm{x}} . \tag{8}$$

Poznámka 1

Je třeba však dodat ještě tyto předpoklady z hlediska matematického a reality chování ekonomických systémů. Za předpokladu existence vlastní limity $\lim_{\mathrm{x} \to 0_+} \mathrm{F'(x)} = \mathrm{F'(0)}$ obdržíme užitím L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{\mathrm{x} \to 0_+} \mathrm{AF(x)} = \lim_{\mathrm{x} \to 0_+} \frac{\mathrm{F(x)}}{\mathrm{x}} = \lim_{\mathrm{x} \to 0_+} \mathrm{F'(x)} = \mathrm{F'(0)}, \tag{9}$$

tedy budeme předpokládat, že existuje vlastní limita funkce AF pro x jdoucí k nule zprava, která je rovna funkční hodnotě mezní funkce MF v bodě nula $\lim_{\mathrm{x} \to 0+} \mathrm{AF(x)} = \mathrm{MF(0)}.$ Dle vztahu (8) lze také zapsat funkcionální vyjádření funkce MAF

$$\mathrm{MAF} = \frac{\mathrm{MF} - \mathrm{AF}}{\mathrm{X}} \tag{10}$$

resp. pomocí příslušných skalárních abstraktních ekonomických veličin lze vztah (10) zapsat takto

$$\mathbf{F}_{MA} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{F}_{M} - \mathbf{F}_{A} \,. \tag{11}$$

Vztah (11) je zapsán v součinovém tvaru, neboť pokud bychom příslušná zobrazení $\mathbf{F}_{MA}$, $\mathbf{F}_{M}$, $\mathbf{F}_{A}$ linearizovali, pak vztah (10) by vedl k podílu matic, který se nedefinuje v teorii maticových reprezentací lineárních zobrazení. V dalších krocích dále předpokládáme, že $\mathbf{F}_{MA} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{X} \,.\, \mathbf{F}_{MA}$.

Nulové funkční hodnoty kvantitativního vyjádření MAF (viz vztah (7)) závislé mezní průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{MA}$ určují ty funkční hodnoty x kvantitativního vyjádření X nezávislé skalární abstraktní ekonomické veličiny X, které jsou podezřelé z toho, že v nich nastává ostrý lokální extrém průměrné funkce AF na uzavřeném intervalu $\langle 0, a \rangle$. Vzhledem k tomu, že funkce AF je spojitá (dokonce se svými derivacemi do čtvrtého řádu) na intervalu $\langle 0, a \rangle$, nabývá na tomto intervalu svých extremálních hodnot, avšak nemusí to být nutně vnitřní body intervalu $\langle 0, a \rangle$. Z tohoto důvodu předpokládejme existenci jediného vnitřního bodu x_0 intervalu $\langle 0, a \rangle$ (tzn. x_0 je prvkem otevřeného intervalu $(0, a)$, $x_0 \in (0, a)$), kde průměrná funkce AF nabývá své ostré extremální hodnoty $AF(x_0)$. Stanovme si postačující podmínky vyjádřené pomocí průměrné, mezní a mezní průměrné funkce, jejichž důsledkem je existence takového bodu. V tomto vnitřním bodě x_0 intervalu $\langle 0, a \rangle$ platí

$$MAF(x_0) = AF'(x_0) = 0 \,. \tag{12}$$

Na základě platnosti vztahů (8) a (12) je v bodě x_0 funkční hodnota mezní funkce $MF(x_0)$ rovna funkční hodnotě průměrné funkce $AF(x_0)$

$$MF(x_0) = AF(x_0), \tag{13}$$

tj. změna počtu jednotek funkční hodnoty $F(x_0)$ kvantitativního vyjádření F závislé skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$, která připadá na jednotkové zvětšení

hodnoty x_0, je rovna průměrnému počtu jednotek funkční hodnoty $F(x_0)$, připadajícímu na jednu jednotku hodnoty x_0.

Předpokládejme dále, že v bodě x_0 je funkční hodnota první derivace mezní průměrné funkce záporná

$$MAF'(x_0) = AF''(x_0) = \frac{d^2AF}{dx^2}(x_0) < 0, \tag{14}$$

pak v bodě x_0 skutečně nastává ostré lokální maximum funkce AF. Požadujeme-li, aby toto ostré lokální maximum bylo ostrým absolutním maximem na intervalu $\langle 0, a\rangle$, znamená to, že požadavky (13) a (14) doplníme např. takto $\lim_{x\to 0_+} AF(x) = MF(0) = F'(0) < AF(x_0)$ a $AF(a) < AF(x_0)$, tedy pak pro ostré absolutní maximum funkce AF platí

$$AF(x_0) = \max_{x\in\langle 0,a\rangle} AF(x). \tag{15}$$

Pokud budeme předpokládat, že ve vnitřním bodě x_0 intervalu $\langle 0, a\rangle$ platí (13), přičemž

$$MAF'(x_0) = AF''(x_0) = \frac{d^2AF}{dx^2}(x_0) > 0, \tag{16}$$

potom v bodě x_0 nastává ostré lokální minimum funkce AF. Požadujeme-li, aby toto ostré lokální minimum bylo ostrým absolutním minimem na intervalu $\langle 0, a\rangle$, je třeba doplnit požadavky (13) a (16) např. takto $\lim_{x\to 0_+} AF(x) = MF(0) = F'(0) > AF(x_0)$ a $AF(a) > AF(x_0)$, tudíž v bodě x_0 nastává ostré absolutní minimum na intervalu $\langle 0, a\rangle$ a pak platí

$$AF(x_0) = \min_{x\in\langle 0,a\rangle} AF(x). \tag{17}$$

Shrnutí

a) Nechť mezní průměrná funkce MAF má spojité vlastní derivace až do řádu třetího včetně na intervalu $\langle 0, a\rangle$ (tzn., že v bodě 0 existují spojité vlastní derivace zprava až do řádu třetího včetně; v bodě a existují spojité vlastní derivace zleva až do řádu třetího včetně). Nechť existuje vnitřní bod x_0 intervalu $\langle 0, a\rangle$, ve kterém $MAF'(x_0) < 0$ a $\max\{MF(0), AF(a)\} < AF(x_0)$. Pak platí, že průměrná funkce AF nabývá v bodě x_0 ostrého maxima vzhledem k intervalu $\langle 0, a\rangle$.

b) Nechť mezní průměrná funkce MAF má spojité vlastní derivace až do řádu třetího včetně na intervalu $\langle 0, a\rangle$. Nechť existuje vnitřní bod x_0 intervalu $\langle 0, a\rangle$, ve kterém $MAF'(x_0) > 0$ a $\min\{MF(0), AF(a)\} > AF(x_0)$. Pak platí, že průměrná funkce AF nabývá v bodě x_0 ostrého minima vzhledem k intervalu $\langle 0, a\rangle$.

Vnitřní bod x_0 uzavřeného intervalu $\langle 0, a\rangle$ dělí tento interval na dva částečné intervaly $\langle 0, x_0\rangle$ a $\langle x_0, a\rangle$. Vyšetříme vzájemný vztah mezi funkčními hodnotami mezní a průměrné funkce na jednotlivých intervalech. Předpokládejme nejprve, že ve vnitřním bodě x_0 uzavřeného intervalu $\langle 0, a\rangle$ nabývá funkce AF svého absolutního maxima vzhledem k intervalu $\langle 0, a\rangle$. V každém vnitřním bodě intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ existuje dle uvedených předpokladů (předpokládáme, že kvantitativní vyjádření ekonomických veličin jsou reálné funkce mající vlastní derivace až do čtvrtého řádu včetně na intervalu $\langle 0, a\rangle$) vlastní kladná derivace průměrné funkce AF (AF je na intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ rostoucí), tudíž dle (8) je

$$MAF(x) = AF'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = \frac{F'(x) - \frac{F(x)}{x}}{x} = \frac{MF(x) - AF(x)}{x} > 0 \qquad (18)$$

odkud

$$MF(x) > AF(x) \qquad (19)$$

pro $x \in (0, x_0)$. **Funkční hodnoty mezní funkce převyšují funkční hodnoty průměrné funkce v každém vnitřním bodě intervalu** $\langle 0, x_0 \rangle$. Vzhledem ke vztahu (9) v krajních bodech intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ je AF(0) = MF(0) = F´(0), AF(x_0) = MF(x_0) (viz vztah (13)). V každém vnitřním bodě intervalu $\langle x_0, a \rangle$ existuje dle předpokladu vlastní záporná derivace průměrné funkce AF (AF je v intervalu $\langle x_0, a \rangle$ klesající), pak dle (8) je

$$MAF(x) = AF'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = \frac{F'(x) - \frac{F(x)}{x}}{x} = \frac{MF(x) - AF(x)}{x} < 0, \qquad (20)$$

odkud

$$MF(x) < AF(x) \qquad (21)$$

pro $x \in (x_0, a)$. **Funkční hodnoty průměrné funkce převyšují funkční hodnoty mezní funkce v každém vnitřním bodě intervalu** $\langle x_0, a \rangle$. V pravém krajním bodě x_0 intervalu $\langle x_0, a \rangle$ platí AF(x_0) = MF(x_0) (vztah (13)), AF(a)≥ MF(a). Předpokládejme nyní, že ve vnitřním bodě x_0 uzavřeného intervalu $\langle 0, a \rangle$ nabývá funkce AF svého absolutního minima vzhledem k uzavřenému intervalu $\langle 0, a \rangle$. V každém vnitřním bodě intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ existuje dle předpokladu vlastní záporná derivace průměrné funkce AF (AF je na intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ klesající), tedy dle (8) je

$$MAF(x) = AF'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = \frac{F'(x) - \frac{F(x)}{x}}{x} = \frac{MF(x) - AF(x)}{x} < 0, \qquad (22)$$

odkud obdržíme závěr

$$MF(x) < AF(x) \qquad (23)$$

pro $x \in (0, x_0)$. **Funkční hodnoty průměrné funkce převyšují funkční hodnoty mezní funkce v každém vnitřním bodě intervalu** $\langle 0, x_0 \rangle$. Vzhledem ke vztahu (9) v krajních bodech intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ opět platí AF(0) = MF(0) = F´(0), dále pak platí AF(x_0) = MF (x_0) (viz vztah (13)). V každém vnitřním bodě uzavřeného intervalu $\langle x_0, a \rangle$ existuje dle předpokladu vlastní kladná derivace průměrné funkce AF (AF je v intervalu $\langle x_0, a \rangle$ rostoucí), pak dle (8) je

$$MAF(x) = AF'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = \frac{F'(x) - \frac{F(x)}{x}}{x} = \frac{MF(x) - AF(x)}{x} > 0, \qquad (24)$$

odkud bezprostředně plyne

$$MF(x) > AF(x) \qquad (25)$$

pro $x \in (x_0, a)$. **Funkční hodnoty mezní funkce převyšují funkční hodnoty průměrné funkce v každém vnitřním bodě intervalu** $\langle x_0, a \rangle$ .V bodě x_0 platí AF(x_0) = = MF(x_0) (viz vztah (13), $MF(a) \geq AF(a)$).

3.2.4 Definice průměrné mezní abstraktní ekonomické veličiny

Závisle proměnná průměrná mezní abstraktní ekonomická veličina $\mathbf{F}_{AM}$ (též lze značit $\mathbf{F}_{AM}$ = $\mathbf{F}_{AM}(\mathbf{X})$) je zobrazení, které každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jednu reálnou funkci jedné reálné proměnné, kterou značíme AMF a nazýváme průměrná mezní funkce (Average Marginal Function), přičemž v návaznosti na definici abstraktní ekonomické veličiny (odst. 3. 1.) lze AMF nazývat také kvantitativní vyjádření závisle proměnné průměrné mezní abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{AM}$. Libovolná funkční hodnota AMF(x) průměrné mezní funkce AMF je podíl funkční hodnoty MF(x) kvantitativního vyjádření MF mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{M}$ a funkční hodnoty X(x) = x kvantitativního vyjádření X nezávislé abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{X}$.

Předpokládáme, že AMF má spojité vlastní derivace až do řádu třetího včetně na svém definičním oboru D(AMF) = D(F) = $\langle 0, a \rangle$. Funkční hodnotu průměrné mezní funkce AMF v bodě x lze vyjádřit takto

$$AMF(x) = \frac{MF(x)}{X(x)} = \frac{MF(x)}{x} = \frac{F'(x)}{x} \qquad (18\ a)$$

pro $x \in D(AMF) = D(F) = \langle 0, a \rangle$, přičemž předpokládáme existenci vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to 0_+} F''(x) = F''(0)$. Dle L´Hospitalova pravidla obdržíme totiž

$$\lim_{x \to 0_+} AMF(x) = \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{MF(x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{F'(x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0_+} F''(x) = F''(0)\ . \qquad (19\ a)$$

Vzhledem k tomu, že průměrná mezní funkce AMF je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle 0, a \rangle$, nabývá v jistých bodech tohoto intervalu absolutních extremálních hodnot vzhledem k intervalu $\langle 0, a \rangle$. Body ve kterých průměrná mezní funkce nabývá absolutního maxima resp. absolutního minima vzhledem k intervalu $\langle 0, a \rangle$, nemusí být nutně vnitřními body tohoto uzavřeného intervalu. Předpokládejme tedy, že x_1 je jediným vnitřním bodem uzavřeného intervalu $\langle 0, a \rangle$, ve kterém průměrná mezní funkce nabývá svého absolutního ostrého extrému, např. maxima. Bod x_1 dělí interval $\langle 0, a \rangle$ na dva částečné uzavřené intervaly $\langle 0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, a \rangle$. Vyšetříme vzájemný vztah mezi odpovídajícími si funkčními hodnotami průměrné mezní funkce AMF a derivace mezní funkce MF´na jednotlivých intervalech. V bodě x_1 jsou splněny tyto podmínky:

$$AMF'(x_1) = 0, \qquad (20\ a)$$

$$AMF''(x_1) < 0, \qquad (21\ a)$$

dále s ohledem na vztah (19 a)

$$\lim_{x \to 0_+} AMF(x) = \lim_{x \to 0_+} F''(x) = F''(0) = MF'(0) = AMF(0) < AMF(x_1), \qquad (22\ a)$$

$$\mathrm{AMF}(a) \; < \; \mathrm{AMF}(x_1). \tag{23 a}$$

V každém vnitřním bodě uzavřeného intervalu $\langle 0, x_1 \rangle$ existuje vlastní kladná derivace AMF´ mezní průměrné funkce AMF (AMF je na intervalu $\langle 0, x_1 \rangle$ rostoucí). Odtud plyne

$$\mathrm{AMF}'(x) \; = \; \frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{x}\right) \; = \; \frac{F''(x)x - F'(x)}{x^2} \; = \; \frac{\mathrm{MF}'(x) - \mathrm{AMF}(x)}{x} \; > \; 0 \tag{24 a}$$

pro $x \in (0, x_1)$, tudíž

$$\mathrm{MF}'(x) > \mathrm{AMF}(x). \tag{25 a}$$

V počátečním bodě intervalu $\langle 0, x_1 \rangle$ je MF´(0) = AMF(0) (viz (22 a)) a v koncovém bodě intervalu MF´(x_1) = AMF(x_1) (viz (20 a)) . **Funkční hodnoty derivace mezní funkce převyšují funkční hodnoty průměrné mezní funkce v každém vnitřním bodě intervalu** $\langle 0, x_1 \rangle$. V každém vnitřním bodě uzavřeného intervalu $\langle x_1, a \rangle$ existuje vlastní záporná derivace AMF´ průměrné mezní funkce AMF (AMF je klesající na intervalu $\langle x_1, a \rangle$). Odtud plyne

$$\mathrm{AMF}'(x) \; = \; \frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{x}\right) \; = \; \frac{\mathrm{MF}'(x) - \mathrm{AMF}(x)}{x} \; < \; 0 \tag{26}$$

pro $x \in (x_1, a)$, tudíž

$$\mathrm{MF}'(x) < \mathrm{AMF}(x). \tag{27}$$

Funkční hodnoty průměrné mezní funkce převyšují funkční hodnoty derivace mezní funkce v každém vnitřním bodě intervalu $\langle x_1, a \rangle$. V počátečním bodě intervalu $\langle x_1, a \rangle$ MF´(x_1) = AMF(x_1) (viz (20), AMF(a) $\geq$ MF´(a)). Předpokládejme nyní platnost takových podmínek, které jsou nutné a postačující k tomu, aby v bodě x_1 nastalo ostré absolutní minimum průměrné mezní funkce vzhledem k intervalu $\langle 0, a \rangle$, tj.

$$AMF'(x_1) = 0 \text{ (viz (20))}, \tag{28}$$

$$AMF''(x_1) > 0, \tag{29}$$

dále s ohledem na vztah (19 a)

$$\lim_{x \to 0_+} AMF(x) = MF'(0) = AMF(0) > AMF(x_1) \tag{30}$$

a

$$AMF(a) > AMF(x_1) \ . \tag{31}$$

V každém vnitřním bodě uzavřeného intervalu $\langle 0, x_1 \rangle$ existuje vlastní záporná derivace AMF´ průměrné mezní funkce AMF (AMF je klesající na $\langle 0, x_1 \rangle$) Odtud plyne

$$MF'(x) < AMF(x) \ , \tag{32}$$

tj. **funkční hodnoty průměrné mezní funkce převyšují funkční hodnoty derivace mezní funkce v každém vnitřním bodě intervalu** $\langle 0, x_1 \rangle$. Dále platí MF´(0) = = AMF(0), $MF'(x_1) = AMF(x_1)$. V každém vnitřním bodě intervalu $\langle x_1, a \rangle$ existuje kladná vlastní derivace AMF´ průměrné mezní funkce AMF (AMF je rostoucí na intervalu $\langle a, x_1 \rangle$). Odtud obdržíme

$$MF'(x) > AMF(x) \ , \tag{33}$$

tj. **funkční hodnoty derivace mezní funkce převyšují funkční hodnoty průměrné mezní funkce v každém vnitřním bodě intervalu** $\langle x_1, a \rangle$, přičemž $MF'(x_1) = AMF(x_1)$, $MF'(a) \geq AMF(a)$.

3.2.5 Některé další vlastnosti kvantitativních vyjádření abstraktních ekonomických veličin

Kvantitativní vyjádření abstraktní ekonomické veličiny, které má vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého včetně v uzavřeném intervalu, je v tomto intervalu omezené.

Nechť je dáno kvantitativní vyjádření F abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$ mající vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého včetně v uzavřeném intervalu $\langle 0, a\rangle$, $a \in E_1$. Potom existují v tomto uzavřeném intervalu body c_1, c_2 tak, že $F(c_1) = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} F(x) = \max_{x\in\langle 0,a\rangle} F(x)$, $F(c_2) = \inf_{x\in\langle 0,a\rangle} F(x) = \min_{x\in\langle 0,a\rangle} F(x)$.

Je dáno kvantitativní vyjádření F abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$, které má vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého včetně v uzavřeném intervalu $\langle 0, a\rangle$. Nechť dále $F(0) \neq F(a)$. Potom funkční hodnoty kvantitativního vyjádření F nabývají všech hodnot ležících mezi čísly F(0), F(a).

Poznámka 1

Říkáme,že číslo α leží mezi čísly $F(0)$ a $F(a)$, jestliže číslo α leží v otevřeném intervalu, jehož krajní body jsou $F(0)$, $F(a)$.

Odvoďme platnost uvedených tvrzení alespoň pro některá kvantitativní vyjádření abstraktních ekonomických veličin. Matematické postupy zde užité, vznikly aplikací obecných matematických postupů na kvantitativní vyjádření skalárních abstraktních ekonomických veličin.

Věta 3.2.5.1

Nechť kvantitativní vyjádření MF (nazývané mezní funkce) závislé mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_M}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$ pak mezní funkce MF je omezená na intervalu $\langle 0, a\rangle$.

Důkaz:

Mezní funkce MF je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$, $a \in E_1$, neboť dle předpokladu má na uzavřeném intervalu vlastní spojitou první derivaci. Označme $\mathfrak{M}$ množinu čísel c intervalu $(0,a\rangle$ s vlastností, že mezní funkce MF je omezená v intervalu $\langle 0,c)$. Mezní funkce MF je spojitá zprava v bodě 0. Z této skutečnosti plyna existence dostatečně malého čísla $\delta > 0$ (číslo δ zvolíme menší než a, $\delta < a$) tak, že pro $0 \leq x < \delta$ je MF(0) – 1 < MF(x) < MF(0) + 1. Jelikož je 0 < $< \delta < a$ a mezní funkce je omezená v intervalu $\langle 0,\delta\rangle$, je $\delta \in \mathfrak{M}$, tedy množina $\mathfrak{M}$ je neprázdná a shora omezená; položme ξ = sup $\mathfrak{M}$. Vzhledem k tomu, že $\delta \in \mathfrak{M}$ a žádné číslo množiny $\mathfrak{M}$ není větší než číslo a, je $\delta \leq \xi \leq a$, tedy $0 < \xi \leq \delta$. Předpokládejme nyní, že $0 < \xi < \delta$. Ze spojitosti mezní funkce MF v bodě ξ plyne existence čísla $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna x z intervalu $J_1 = (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ je MF(ξ) – 1 < MF(x) < MF(ξ) + 1, přičemž δ_1 zvolíme tak malé, aby interval J_1 ležel celý v $(0,a)$, Protože je $\xi - \delta_1 < \xi$ = sup $\mathfrak{M}$, existuje v $\mathfrak{M}$ číslo c_1 tak, že $\xi - \delta_1 < c_1 \leq \xi$. V intervalu $J_2 = \langle 0,c_1)$ je mezní funkce MF omezená, neboť $c_1 \in \mathfrak{M}$, takža existují čísla K_1 a K_2 tak, že pro všechna $x \in J_2$ je K_1 < MF(x) < K_2. Každý bod intervalu $\langle 0,\xi+\delta_1)$ leží však v intervalu J_1 nebo v J_2, což tedy znamená, že min (K^1, MF(ξ) – 1) < MF(x) < max (K_2, MF(ξ) + 1) . Funkční hodnoty mezní funkce MF(x) jsou tedy omezené v intervalu $\langle 0,\xi+\delta_1)$, takže $\xi+\delta_1 \in \mathfrak{M}$. To je ovšem nemožné, neboť $\xi+\delta_1 > \xi =$ sup $\mathfrak{M}$, což je spor. To ovšem vede nutně k závěru, že ξ = a . Mezní funkce MF je spojitá v bodě a zleva a proto existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $a - \delta_2 < x \leq a$ je MF(a) – 1 < < MF(x) < MF(b) + 1; volme ihned $\delta_2 < a$. Protože platí a = sup $\mathfrak{M}$, $a - \delta_2 <$ a, existuje pak $c_2 \in \mathfrak{M}$ tak, že $a - \delta_2 < c_2 \leq a$.

V intervalu $\langle a, c_2)$ je tedy mezní funkce FM omezená, tj. existují čísla K_3 a K_4 tak, že pro $0 \leq x < c_2$ je K_3 < MF(x) < K_4. Ovšem každá funkční hodnota x

kvantitativního vyjádření X nezávisle proměnné ekonomické veličiny **X** z intervalu $\langle 0,a\rangle$ leží buď v $(a-\delta_2,a\rangle$ nebo v $\langle 0,c_2)$; pro všechny hodnoty x intervalu $\langle 0,a\rangle$ je tedy min (K_3, MF(a) – 1) < MF(x) < max (K_4, MF(a) +1), tj. mezní funkce MF je omezená v intervalu $\langle 0,a\rangle$.

Q.E.D.

Obdobně bychom dokázali následující věty (Věta 3.2.5.2, Věta 3.2.5.3, Věta 3.2.5.4)) o omezenosti kvantitativního vyjádření AF (průměrné funkce) průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_A}$, MAF (mezní průměrné funkce) mezní průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_{MA}}$, AMF (průměrné mezní funkce) průměrné mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_{AM}}$.

Věta 3.2.5.2

Nechť kvantitativní vyjádření AF (průměrná funkce) závislé průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_A}$ má vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$, pak průměrná funkce AF je omezená na intervalu $\langle 0,a\rangle$.

Věta 3.2.5.3

Nechť kvantitativní vyjádření MAF (mezní průměrná funkce) závislé mezní průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_{MA}}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$**,** pak mezní průměrná funkce MAF je omezená na intervalu $\langle 0,a\rangle$.

Věta 3.2.5.4

Nechť kvantitativní vyjádření AMF (průměrná mezní funkce) závislé průměrné mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_{AM}}$ má vlastní spojité derivace až do

řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$, pak průměrná mezní funkce AMF je omezená na intervalu $\langle 0,a\rangle$.

Zabývejme se nyní extremálními hodnotami kvantitativních vyjádření abstraktních ekonomických veličin na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$.

Věta 3.2.5.5

Nechť kvantitativní vyjádření MF (mezní funkce) závislé mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_M}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$. Potom existují v intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkční hodnoty c_1 a c_2 $(X(c_1)=c_1,\ X(c_2)=c_2)$ tak, že $MF(c_1)=\sup\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)=\max\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$ a $MF(c_2)=\inf\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)=\min\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$.

Důkaz:

Mezní funkce MF má dle předpokladu vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$, tedy je na tomto intervalu omezená (i se svými vlastními derivacemi až do řádu třetího včetně). Položme $Q=\sup\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)=\max\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$. Pro všechna $x\in\langle 0,a\rangle$ je $MF(x)\le Q$. Je třeba dokázat, že v intervalu $\langle 0,a\rangle$ existuje číslo c_1, pro něž je $MF(c_1)=Q$. Předpokládejme, že takové číslo neexistuje, takže pro všechna $x\in\langle 0,a\rangle$ je $MF(x)<Q$, tj. $Q-MF(x)>0$; vzhledem k tomu, že $Q-MF(x)$ je spojitá a kladná funkce, je funkce $\frac{1}{Q-MF(x)}$ v intervalu $\langle 0,a\rangle$ spojitá i se svými derivacemi až do řádu čtvrtého a tedy shora omezená a stále kladná. To znamená, že existuje kladné číslo W tak, že pro všechna $x\in\langle 0,a\rangle$ je $\frac{1}{Q-MF(x)}<W$, tj. $Q-MF(x)>\frac{1}{W}$, tedy $FM(x)<Q-\frac{1}{W}$ pro všechna $x\in\langle 0,a\rangle$. Číslo $Q-\frac{1}{W}$ je menší než číslo $Q=\max\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$, existuje tedy v intervalu $\langle 0,a\rangle$ číslo x_0 tak, že

$MF(x_0) > Q - \frac{1}{W}$, což je ve sporu se závěrem, že pro všechna $x \in \langle 0, a\rangle$ je $MF(x) < Q - \frac{1}{W}$. Tento závěr znamená, že existuje číslo $c_1 = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x) = \max_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$.

Funkce $-MF(x)$ je spojitá i se svými vlastními derivacemi až do řádu čtvrtého a $\max_{x\in\langle 0,a\rangle}(-MF(x)) = -\min_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$. Podle předchozího existuje číslo $c_2 \in \langle 0, a\rangle$ tak, že $-MF(c_2) = \max_{x\in\langle 0,a\rangle}(-MF(x)) = -\min_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$, tj. $MF(c_2) = \min_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x) = \inf_{x\in\langle 0,a\rangle} MF(x)$.

Q.E.D.

Obdobně jako větu 3.2.5.5 bychom dokázali následující věty (Věta 3.2.5.6, Věta 3.2.5.7, Věta 3.2.5.8) pro průměrnou funkci AF, mezní průměrnou funkci MAF a průměrnou mezní funkci AMF.

Věta 3.2.5.6

Nechť kvantitativní vyjádření AF (průměrná funkce) závislé průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_A}$ má vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$. Potom existují v intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkční hodnoty p_1 a p_2 $(X(p_1) = p_1,\ X(p_2) = p_2)$ tak, že $AF(p_1) = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} AF(x) = \max_{x\in\langle 0,a\rangle} AF(x)$ a $AF(p_2) = \inf_{x\in\langle 0,a\rangle} AF(x) = \min_{x\in\langle 0,a\rangle} AF(x)$.

Věta 3.2.5.7

Nechť kvantitativní vyjádření MAF (mezní průměrná funkce) závislé mezní průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_{MA}}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$. Potom existují v intervalu $\langle 0, a\rangle$

funkční hodnoty q_1 a q_2 ($X(q_1) = q_1$, $X(q_2) = q_2$) tak, že $MAF(q_1) = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} MAF(x) = \max_{x\in\langle 0,a\rangle} MAF(x)$ a $MAF(q_2) = \inf_{x\in\langle 0,a\rangle} MAF(x) = \min_{x\in\langle 0,a\rangle} MAF(x)$.

Věta 3.2.5.8

Nechť kvantitativní vyjádření AMF (průměrná mezní funkce) závislé průměrné mezní ekonomické veličiny $\mathbf{F_{AM}}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$. Potom existují v intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkční hodnoty r_1 a r_2 ($X(r_1) = r_1$, $X(r_2) = r_2$) tak, že $AMF(r_1) = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} AMF(x) = \min_{x\in\langle 0,a\rangle} AMF(x)$ a $AMF(r_2) = \inf_{x\in\langle 0,a\rangle} AMF(x) = \min_{x\in\langle 0,a\rangle} AMF(x)$.

Následující věty (Věta 3.2.5.9, Věta 3.2.5.10, Věta 3.2.5.11 a Věta 3.2.5.12) se zabývají souvislostí oborů hodnot kvantitativních vyjádření skalárních abstraktních ekonomických veličin a souvislostí oborů hodnot derivací těchto kvantitativních vyjádření až do řádu třetího včetně.

Věta 3.2.5.9

Nechť kvantitativní vyjádření MF (mezní funkce) závislé mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F_M}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$. Potom mezní funkce MF nabývá v intervalu $\langle 0, a\rangle$ všech funkčních hodnot ležících mezi čísly $MF(0)$, $MF(a)$.

Důkaz:

Předpokládejme, že pro funkční hodnoty mezní funkce MF v krajních bodech intervalu $\langle 0, a\rangle$ platí $MF(0) < MF(a)$; nechť d je číslo ležící mezi MF(0), MF(a), tj., $MF(0) < d < MF(a)$. Označme M množinu všech funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávisle proměnné ekonomické veličiny X, které leží v intervalu $\langle 0, a\rangle$

a pro něž je FM(x) < d. Množina M je shora omezená a neprázdná (neboť $0 \in M$). Označme c = sup M, tedy je $0 \le c \le a$.

Ze spojitosti mezní funkce MF v bodě 0 zprava a v bodě a zleva plyne: vzhledem k tomu, že $d - MF(0) > 0$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ tak, že pro $0 \le x < \delta_1$ je $|MF(x) - MF(0)| < d - MF(0)$, tedy $MF(x) < MF(0) + (d - MF(0)) = d$; všechny funkční hodnoty x intervalu $\langle 0, \delta_1 \rangle$ patří do $\mathfrak{M}$, tedy $c \ge \delta_1 > 0$. Kromě toho z nerovnosti MF(0) – d > 0 plyne, že existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $a - \delta_2 < x \le a$ je $|MF(x) - MF(a)| < MF(a) - d$, tedy $MF(x) > MF(a) - (MF(a) - d) = d$. Tedy

$$0 < c < a \ . \qquad \text{(I)}$$

Nyní vyšetříme vztah funkční hodnoty mezní funkce MF v bodě c, tj. MF(c) a d. Nechť ε je jakékoliv kladné číslo. Vzhledem k tomu, že mezní funkce MF je funkce spojitá, je také spojitá v bodě $c \in (0,a)$, z toho důvodu existuje číslo $\delta > 0$ tak, že $|MF(x) - MF(c)| < \varepsilon$, tj.

$$MF(x) - \varepsilon < MF(c) < MF(x) + \varepsilon \qquad \text{(II)}$$

pro $c - \delta < x < c + \delta$. Platí $c - \delta < c = \sup M$, tedy existuje číslo $x_1 > c - \delta$, které patří do M ($x_1 \le c < c + \delta$); tedy je $MF(x_1) < d$ a podle (II) je $MF(c) < d + \varepsilon$. Zvolme číslo x_2 tak, aby bylo $c < x_2 < c + \delta$ a současně je $x_2 < a$ (to je možné podle (I)); $x_2 \notin M$ (je totiž $x_2 > c = \sup M$) a proto je $MF(x_2) \ge d$; podle (II) je tedy $MF(c) > d - \varepsilon$. Pro každé kladné ε je tedy $d - \varepsilon < MF(c) < d + \varepsilon$ a tedy $|MF(c) - d| < \varepsilon$; tedy $MF(c) - d = 0$, neboť kdyby tomu tak nebylo, byla by $|MF(c) - d| > 0$ a nerovnost $|MF(c) - d| < \varepsilon$ (která má platit pro libovolné kladné číslo ε, tedy i jakkoli malé) by nebyla například splněna pro $\varepsilon = |MF(c) - d|$.

Pokud je $MF(0) > MF(a)$ a $d \in (MF(0), MF(a))$ je $-d \in (-MF(0), -MF(a))$. Vzhledem k tomu, že mezní funkce $-MF$ je spojitá v $\langle 0, a \rangle$, existuje podle předchozích úvah číslo $c \in (0, a)$ tak, že $-MF(c) = -d$, tj. $MF(c) = d$.

Q.E.D.

Obdobným postupem se dokáží i věty následující včetně vět pro třetí derivace kvantitativních vyjádření abstraktních ekonomických veličin.

Věta 3.2.5.10

Nechť kvantitativní vyjádření AF (průměrná funkce) závislé průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ má vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny X. Potom průměrná funkce AF nabývá v intervalu $\langle 0,a\rangle$ všech funkčních hodnot ležících mezi čísly $AF(0)$ a $AF(a)$.

Věta 3.2.5.11

Nechť kvantitativní vyjádření MAF (mezní průměrná funkce) závislé mezní průměrné skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{\mathbf{MA}}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$. Potom mezní průměrná funkce MAF nabývá v intervalu $\langle 0,a\rangle$ všech hodnot ležících mezi čísly $MAF(0)$ a $MAF(a)$.

Věta 3.2.5.12

Nechť kvantitativní vyjádření AMF (průměrná mezní funkce) závislé průměrné mezní skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}_{\mathbf{AM}}$ má vlastní spojité derivace až do řádu třetího včetně na uzavřeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ funkčních hodnot x kvantitativního vyjádření X nezávislé ekonomické veličiny $\mathbf{X}$. Potom průměrná mezní funkce AMF nabývá v intervalu $\langle 0,a\rangle$ všech funkčních hodnot ležících mezi čísly $AMF(0)$ a $AMF(a)$.

3.3 Elastičnost (pružnost) skalární abstraktní ekonomické veličiny

Nechť je dána závisle proměnná skalární abstraktní ekonomická veličina $\mathfrak{F}$, která každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jedno kvantitativní vyjádření F z množiny $\mathfrak{B}(\langle 0, a\rangle)$ (odst. 3. 1., str. 29). Definiční obor kvantitativního vyjádření F je $D(F) = \langle 0, a\rangle$ a obor hodnot tohoto kvantitativního vyjádření je číselný interval $H(F) = \langle \min\{F(0), F(a)\}, \max\{F(0), F(a)\}\rangle$. Nechť je dále dána nezávisle proměnná abstraktní ekonomická veličina $\mathfrak{X}$, která každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jedno kvantitativní vyjádření X, jehož funkční hodnoty jsou dány vztahem $X(x) = x$. Definiční obor kvantitativního vyjádření X je interval $D(X) = \langle 0, a\rangle$ a obor hodnot kvantitativního vyjádření X je interval $H(X) = \langle \min\{X(0),X(a)\}, \max\{X(0),X(a)\}\rangle = \langle 0, a\rangle$. Označme absolutní přírůstek funkční hodnoty kvantitativního vyjádření v bodě x takto $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. Relativní přírůstek kvantitativního vyjádření F v bodě x označme jako $\sigma_F(x)$ a definujeme jej vztahem

$$\sigma_F(x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{F(x)} = \frac{\Delta F(x)}{F(x)}. \tag{34}$$

Dále absolutní přírůstek funkční hodnoty kvantitativního vyjádření X v bodě x je $\Delta X(x) = X(x + \Delta(x)) - X(x) = \Delta x$. Relativní přírůstek kvantitativního vyjádření X v bodě x označme $\sigma_X(x)$ a je definován podílem

$$\sigma_X(x) = \frac{X(x + \Delta x) - X(x)}{X(x)} = \frac{\Delta x}{x} \tag{35}$$

pro $x \in (0, a)$. Pro podíl relativních přírůstků $\sigma_F(x)/\sigma_X(x)$ obdržíme

$$\frac{\sigma_F(x)}{\sigma_X(x)} = \frac{\frac{\Delta F(x)}{F(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{F(x)} \cdot \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \tag{36}$$

a provedeme-li limitní proces, získáme

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{F(x)} \cdot \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{x}{F(x)} \cdot F'(x). \tag{37}$$

Vztah (37) je použit k definici elastičnosti závislé skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$ vzhledem k nezávislé abstraktní ekonomické veličině $\mathbf{X}$. Elastičnost závislé skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$ označíme $\mathbf{EF}$. Tedy elastičnost skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{EF}$ je zobrazení, které každému stavu ekonomického systému z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jednu reálnou funkci jedné reálné proměnné EF, jejíž funkční hodnoty jsou pro $x \in \langle 0, a\rangle$ dány vztahem

$$EF(x) = \frac{x}{F(x)} \cdot F'(x). \tag{38}$$

Ve vztahu (38) je $F \in \mathfrak{B}(\langle 0,a\rangle)$ kvantitativní vyjádření skalární abstraktní ekonomické veličiny $\mathbf{F}$, přičemž lze například předpokládat pro to, aby měl vztah (38) z matematického hlediska smysl na celém intervalu $\langle 0, a\rangle$ splnění podmínek, že $F_{+}'(0) > 0$ a $F_{-}'(a) < 0$.

4. Krátkodobá obchodní marže

4.1 Základní definice

Dříve než přikročíme k ryze teoretickému pohledu na obchodní marži považujeme za nutné zmínit alespoň několik poznámek z pohledu nižší roviny abstrakce na tento frekventovaně používaný ekonomický termín. Podívejme se např. do vybraných finančních ukazatelů ČSÚ (viz tabulka č. 1)

Z tabulky je patrné, že hospodářský výsledek po zdanění získáme jako rozdíl mezi výnosy celkem a náklady celkem, přičemž obchodní marže představuje rozdíl mezi tržbami za zboží a náklady na prodané zboží. Účetní přidaná hodnota[8] je charakterizována rozdílem mezi výkony včetně obchodní marže[9] a tzv. výkonovou spotřebou[10].

Z pohledu ekonomického obsahu v dalších pasažích práce budeme budeme obchodní marži chápat pouze jako rozdíl mezi nákupní a prodejní cenou v rámci realizovaného zboží. Chceme se tak vyhnout možným diskusím, zda obchodní marže je výnosem nebo výkonem obchodu či nikoli.

---

[8] Bližší vysvětleni viz: metainformační systém ČSÚ (METIS) – *Účetní přidaná hodnota = (Výkony - Výkonová spotřeba) + Obchodní marže = (Tržby za prodej vlastních výrobků a služeb + Změna stavu vnitropodnikových zásob vlastní výroby + Aktivace + Tržby za prodej zboží) - (Spotřeba materiálu a energie + Služby + Náklady vynaložené na prodané zboží),* tj. účetní přidaná hodnota představuje zvýšení hodnoty vytvořené produkce nebo prodaného zboží proti hodnotě vstupů materiálu, energie a služeb, resp. zboží při nákupu. Tohoto zvýšení je dosahováno efektivním využitím pracovních a kapitálových zdrojů podnikání ve výrobních a obchodních procesech. Účetně přidaná hodnota vyjadřuje rozdíl výkonů a výkonové spotřeby plus obchodní marži.

[9] Výkony včetně obchodní marže zahrnují tržby za prodej vlastních výrobků a služeb, obchodní marži (rozdíl mezi tržbami za prodané zboží a náklady na prodané zboží), změnu stavu zásob vlastní výroby a aktivaci materiálu, zboží, služeb a dlouhodobého majetku. (Převzato z: metainformačního systému ČSÚ (METIS))

[10] Celkové výdaje (náklady) na hospodářskou činnnost bez DPH a spotřební daně zahrnují veškeré výdaje vedené v daňové evidenci, tj. daňové i nedaňové. Synonyma: spotřeba materiálu, energie, služeb na hospodářskou činnost. (Převzato z: metainformačního systému ČSÚ (METIS))

Tabulka č. 1

Maloobchod kromě motorových vozidel; opravy výrobků pro osobní potřebu a převážně pro domácnost (OKEČ 52). Právnické a fyzické osoby celkem

Ukazatel			**MJ**	**2006**	**2007**
Výnosy (příjmy) celkem (A)			mil. Kč	783 540	843 414
z toho	tržby za vlastní výkony a zboží		mil. Kč	750 712	821 047
	v tom	tržby za prodej vlastních výrobků	mil. Kč	3 861	4 586
		tržby za prodej služeb	mil. Kč	30 482	30 282
		tržby za prodej zboží	mil. Kč	716 369	786 179
Náklady (výdaje) celkem			mil. Kč	763 517	818 137
z toho	náklady na prodané zboží		mil. Kč	550 215	604 499
	výkonová spotřeba		mil. Kč	98 115	103 031
	osobní náklady		mil. Kč	58 096	64 877
Výkony vč. obchodní marže			mil. Kč	201 651	218 361
Obchodní marže			mil. Kč	166 154	181 680
Účetní přidaná hodnota			mil. Kč	103 536	115 330
Výsledek hospodaření před zdaněním			mil. Kč	23 153	29 615
Výsledek hospodaření po zdanění			mil. Kč	202 004	25 277

Zdroj: převzato z ČSÚ

Domníváme se, že výkon je konkrétní prodej, výnosem je vystavení faktury a příjmem je její zaplacení. Diskusi by mohlo zkomplikovat tenké propojení výkonu a výnosu nás opravňuje v určitém slova smyslu tyto pojmy ztotožnit, nebo říci, že výnos je peněžním vyjádřením prodeje, tedy tržbou neboli obratem.[11] Výnos je v tomto případě roven tržbám což koresponduje s obsahovou náplní výnosového účtu (účetní pohled). Toto tvrzení si můžeme dovolit – výnosy obchodu jsou převážně tvořeny tržbami za zboží a služby, nicméně je třeba podotknou, že z účetního hlediska jsou výnosy širším pojmem než tržby. Výnosy jsou obsaženy v šesté třídě směrné účtové osnovy[12] a jsou rozděleny do následujících skupin.

Účtová třída 6 – výnosy

Tržby za vlastní výkony a zboží

- Tržby za vlastní výkony a zboží
- Tržby za vlastní výrobky
- Tržby z prodeje služeb
- Tržby za zboží

Jiné provozní výnosy

- Jiné provozní výnosy
- Tržby z prodeje dlouhodobého nehmotného a hmotného majetku
- Tržby z prodeje materiálu
- Smluvní pokuty a úroky z prodlení
- Výnosy z odepsaných pohledávek
- Ostatní provozní výnosy

[11] Tržba = obrat v hodnotovém vyjádření, rozdílnost spočívá v tom, že obrat můžeme vyjádřit i v naturálním vyjádření.

[12] Ve směrné účtové osnově, která je vydána prováděcí vyhláškou č. 500/2002 Sb. k zákonu o účetnictví se určuje uspořádání a označení účtových tříd, případně účtových skupin nebo i syntetických účtů, potřebných pro účtování o předmětu účetnictví.

Finanční výnosy

- Finanční výnosy
- Tržby z prodeje cenných papírů a podílů
- Úroky
- Kurzové zisky
- Výnosy z přecenění majetkových cenných papírů
- Výnosy z dlouhodobého finančního majetku
- Výnosy z krátkodobého finančního majetku
- Výnosy z derivátových operací
- Ostatní finanční výnosy
- Výnosy z podílů v ovládaných osobách a jedn. pod podstatným vlivem

Mimořádné výnosy

- Mimořádné výnosy
- Výnosy ze změny metody
- Zúčtování rezerv
- Ostatní mimořádné výnosy
- Zúčtování opravných položek

Opustíme-li zákonný účetní pohled a definiční vyjádření ČSÚ můžeme výnosy za zboží obchodu definovat i z pohledu obchodního jako rozdíl mezi nákupní a prodejní cenou. Jinými slovy prodejní cenu získáme připočtením tzv. obchodní marže, což je přirážka k nákupní ceně v absolutním vyjádření. Výše obchodní marže musí pokrýt veškeré náklady, rizikový faktor a získat přiměřený zisk. Z lingvistického i praktického hlediska se přikláníme v tomto případě k výkladu slova „výnos“ ve smyslu obsahu většině populace známé „co nám to vynese“. V tržbách jsou zahrnuty přece i nákupní ceny, za které jsme museli zboží nakoupit. V tomto případě můžeme výnos ztotožnit

s obchodní marží, která odráží záměr obchodníka ve všech směrech. Zjednodušeně lze říci, že marži můžeme vypočítat ze znalosti nákupní a prodejní ceny jako rozdíl.

Definice obchodní marže:

Obchodní marže GP (Gross Profit) je rozdíl mezi prodejní a nákupní cenou statku (komodity), vyjádřenou v měnových jednotkách státu na jehož území firma se statkem obchoduje.

Definice jednotkové obchodní marže:

Jednotková obchodní marže UGP (Unit Gross Profit) je rozdíl mezi prodejní a nákupní cenou jednotkového množství statku (komodity), vyjádřenou v měnových jednotkách státu na jehož území firma se statkem obchoduje (alternativně vyjádřeno UGP je počet měnových jednotek směněných za jednotkové množství statku).

Definice celkové obchodní marže v čase t:

Předpokládejme, že firma obchoduje s n komoditami $k_1, k_2, ..., k_n$ a jejich jednotkové marže jsou $x_1, x_2, ..., x_n$. Počet prodaných jednotkových množství jednotlivých komodit je $a_1, a_2, ..., a_n$. Pak celková obchodní marže TGP (Total Gross Profit) je vyjádřena vztahem

$$\begin{aligned} TGP(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) &= a_1(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))\ x_1(t) + \\ &+ a_2(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))\ x_2(t) + \ldots + a_n(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))\ x_n(t), \end{aligned} \quad (1)$$

který lze alternativně zapsat ve tvaru

$$TGP = a_1(x_1, x_2, ..., x_n)UGP_1 + a_2(x_1, x_2, ..., x_n)UGP_2 + ... + a_n(x_1, x_2, ..., x_n)UGP_n \ . \quad (2)$$

Definice abstraktní celkové obchodní marže **TGP**

Nechť $\mathfrak{S}$ je množina všech stavů vyšetřovaného ekonomického systému – např. obchodní firmy, která obchoduje s komoditami $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Nechť $\mathfrak{B}(\langle 0, w_1\rangle \times \ldots \times \langle 0, w_n\rangle) = \mathfrak{B}(w_1, \ldots, w_n)$ je množina reálných funkcí $TGP(x_1, \ldots, x_n)$ n reálných proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kterými jsou jednotkové obchodní marže jednotlivých komodit. Dále platí, že definiční obor funkcí TGP je množina $D(TGP) = \langle 0, w_1\rangle \times \ldots \times \langle 0, w_n\rangle$. Abstraktní celková obchodní marže **TGP** je zobrazení, které každému stavu obchodní firmy z množiny $\mathfrak{S}$ přiřazuje právě jednu funkci TGP z množiny $\mathfrak{B}(w_1,\ldots, w_n)$. Předpokládáme, že funkce TGP jsou kladné na množině $(0, w_1) \times \ldots \times (0, w_n)$ a na hranici této množiny jsou funkce TGP nezáporné.

Definice efektivní produktivity (variabilní) jednotkové obchodní marže $\underline{x_m}$:

Průměrná produktivita jednotkové obchodní marže x_m (**A**verage **P**roductivity of **UGP** x_m) je dána vztahem (kde m je některý z indexů $1, \ldots, n$, tj. $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$)

$$APUGP_M(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{TGP(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))}{x_m}, \qquad (3)$$

což je počet jednotek komodity k_m, který při jednotkové obchodní marži x_m zajistí stejnou celkovou obchodní marži TGP, jakou zajistí počty prodaných jednotek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ komodit $k_1, k_2, \ldots, k_n$ s odpovídajícími jednotkovými maržemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v čase t.

Poznámka

využitím vztahu (1) lze efektivní produktivitu jednotkové obchodní marže x_m ze vztahu (3) vyjádřit alternativním vztahem

$$APUGP_M(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = a_m(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) + \qquad (3a)$$

$$+ \frac{\sum_{i=1, i\neq m}^{n} a_i(x_1(t), ..., x_n(t))\, \mathbf{x_i(t)}}{x_m(t)} .$$

První sčítanec ve vztahu (3a) lze interpretovat jako průměrnou produktivitu jednotkové obchodní marže x_m v čase t. Druhý sčítanec ve vztahu (3a) je počet jednotek komodity k_m s jednotkovou obchodní marží x_m, který nahradí počty jednotek $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n$ komodit $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_{m+1}, \ldots, k_n$ s jednotkovými obchodními maržemi $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_n$ v čase t.

Definice průměrné produktivity celkové obchodní marže:

Proveďme součet všech jednotkových marží $\sum_{l=1}^{n} x_l$, pak pro průměrnou produktivitu celkové obchodní marže (**A**verage **P**roductivit**y** of **T**otal **G**ross **P**rofit) $APTGP_T(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ získáme následující vztah, který poskytuje jiné číselné výsledky než vztah (3), neboť ve jmenovateli stojí součet všech jednotkových marží

$$APTGP_T(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = \frac{TGP(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))}{\sum_{l=1}^{n} x_l} . \quad (4)$$

Vztah (4) je možné s ohledem na (1) vyjádřit také takto

$$APTGP_T(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = \frac{\sum_{r=1}^{n} a_r(x_1(t), ..., x_n(t)) x_r(t)}{\sum_{l=1}^{n} x_l(t)} . \quad (5)$$

Definice mezní produktivity měnové jednotky jednotkové obchodní marže

Mezní produktivita jednotkové obchodní marže x_m (**M**arginal **P**roductivity of **C**urrency **U**nit of **U**nit **G**ross **P**rofit) MPCUUGP je definována vztahem

$$\mathrm{MPCUUGP}(x_1(t), x_2(t), \ ..., x_n(t)) = \frac{\partial \mathrm{TGP}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_m} \qquad (6)$$

resp.

$$\frac{\partial \mathrm{TGP}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sum_{r=1}^{n} a_r(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) x_r(t)\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_r(x_1(t), x_2(t), ..., x_{m-1}(t), x_m(t), x_{m+1}(t), x_n(t))}{\partial x_m} x_r(t) +$$

$+ a_m(x_1(t), x_2(t), ..., x_{m-1}(t), x_m(t), x_{m+1}(t), x_n(t))$. Zavedeme-li

$A_m^r = \frac{\partial a_r(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_m}$, pak lze poslední výraz zapsat s pomocí Einsteinova sumačního pravidla ve tvaru $A_m^r x_r + a_m$ a pro mezní produktivitu jednotkové obchodní marže x_m získáme vyjádření

$$\frac{\partial \mathrm{TGP}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_m} = A_m^r x_r + a_m(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) . \qquad (7)$$

Vnitřní zákon kompozice na množině E

Vnitřní zákon kompozice na množině E je zobrazení množiny E x E do množiny E. Toto zobrazení přiřazuje každé dvojici prvků $(x, y) \in E \times E$ prvek $z \in E$. Označme vnitřní zákon kompozice ⊺, pak prvek z, který je přiřazen dvojici prvků (x,y) označíme $x \intercal y$.

Vnější zákon kompozice na množině E

Nechť jsou dány dvě množiny E a H. Prvky množiny E budeme značit písmeny latinské abecedy x, …, a, …, zatímco prvky množiny H budeme značit písmeny řecké abecedy

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Množiny E a H považujeme za různé. Sestavit kompozici prvku x z množiny E, $x \in E$, s prvkem α z množiny H, $\alpha \in H$, abychom získali prvek z množiny E znamená následující: je třeba definovat zobrazení množiny $H \times E$ do množiny E. Označme toto zobrazení $\boxdot$, pak každé uspořádané dvojici $(\alpha, x) \in H \times E$

je přiřazen právě jeden prvek $\alpha \boxdot x \in E$.

Definice tržní struktury

Nechť K je spočetná množina komodit $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}, k_n$, kde $n \in N$, N je množina všech přirozených čísel. Vnitřní zákon kompozice na množině K označme $\intercal$. Vnitřní zákon kompozice $\intercal$ je zobrazení, které každé uspořádané dvojici $(k_i, k_j) \in$

$\in K \times K$, $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ($K \times K$ je kartézský součin množin) přiřazuje právě jeden prvek $k_i \intercal k_j \in K$, $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Nechť H je spočetná množina jedinců $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$, $m \in N$, $m \gtreqless n$, $n \in N$. Vnitřní zákon kompozice na množině H označme $\perp$. Vnitřní zákon kompozice $\perp$ je zobrazení, které každé uspořádané dvojici jedinců $(\varepsilon_r, \varepsilon_s) \in H \times H$ přiřazuje právě jeden prvek $\varepsilon_r \perp \varepsilon_s \in H$, $r, s \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Nechť $\boxdot$ je vnější zákon kompozice na množině K. Vnější zákon kompozice $\boxdot$ je zobrazení, které každé uspořádané dvojici prvků $(\varepsilon_s, k_r) \in H \times K$ přiřazuje právě jeden prvek $\varepsilon_s \boxdot k_r \in K$, $s \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, $r \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Tržní struktura (krátce vyjádřeno trh) je algebraická struktura na množině komodit K definovaná h vnitřními zákony kompozice $\intercal$ na množině K a p vnějšími zákony kompozice $\boxdot$ na množině K s množinou jedinců H. Čísla h, p jsou nezáporná celá čísla.

Definice dokonale konkurenční tržní struktury

Poznámka

Dokonale konkurenční tržní struktura (model dokonalé konkurence) je definována v souladu s požadavky teoretické ekonomie, uvedenými např. v následující

literatuře (Pigou, 1962; Robinson, 1960 a, 1960 b, 1965, 1969; Soukup, 1999, Soukupová et al., 2003, 2006).

Přistupme k vlastní definici dokonale konkurenční tržní struktury. Dokonale konkurenční tržní struktura je tržní struktura na množině komodit K s množinou jedinců H. V dokonale konkurenční tržní struktuře předpokládáme splnění následujících předpokladů:

1) v každé tržní struktuře existuje velký počet vnějších zákonů kompozice na množině komodit K s množinou jedinců H, tj. velký počet kupujících a prodávajících, z nichž žádný není natolik silný, aby mohl ovlivnit cenu nebo výstup odvětví;
2) všechny druhy komodit jsou homogenní;
3) v tržní struktuře je možný volný zánik a vznik vnějšího zákona kompozice, tj. volný výstup i vstup na všechny trhy;
4) všichni jedinci z množiny H mají dokonalé informace o cenách a množstvích směňovaných na trhu;
5) všichni jedinci z množiny H usilují o maximalizaci užitku;
6) všichni jedinci z množiny H mají volný přístup k informacím o technologiích.

4.2 Celková obchodní marže TGP v krátkém období

4.2.1 Obecná východiska

Předpokládejme, že obchodování firmy se statky je ve své podstatě proces přeměny vstupů (získaných komodit) ve výstupy (prodávané komodity). Firma (prodávající) se tedy soustřeďuje na tři základní činnosti:

a) koupě vstupů;

b) organizaci vstupů ve výstupy;

c) prodej výstupů.

Dále předpokládáme, že hlavním cílem prodávající firmy je maximalizace celkové obchodní marže TGP, tedy v konečném důsledku ekonomického zisku, tj. rozdílu mezi příjmy a ekonomickými náklady, které jsou součtem explicitních a implicitních nákladů (včetně nákladů na explicitní a implicitní reklamu). Kromě uvedeného budeme dále předpokládat, že firma (prodávající) se nachází v tržní struktuře s dokonalou konkurencí.

4.2.2 Restrikce obecných východisek

Z důvodu orientace v užití geometrické terminologie k vyjádření vývoje celkové obchodní marže TGP předpokládejme, že firma obchoduje se dvěma druhy zboží, které mají jednotkové obchodní marže x_1 a x_2. Vstup obou druhů komodit je homogenní a firma se nachází v dokonale konkurenční tržní struktuře. Celkovou obchodní marži TGP lze zapsat jako reálnou funkci dvou reálných proměnných závisejících na čase t, tj.

$$TGP = f(x_1(t), x_2(t)), \tag{8}$$

kde x_1 je jednotková obchodní marže první komodity v čase t, x_2 je jednotková obchodní marže druhé komodity v čase t.

Takto vymezená celková obchodní marže TGP má následující vlastnosti:

a) může být vytvořena různými kombinacemi jednotkových obchodních marží;

b) vychází z dané úrovně technologií a tedy v sobě zahrnuje technologická omezení;

c) obchodující firma (prodávající) používá k tvorbě celkové obchodní marže TGP v daných podmínkách nejefektivnější kombinaci jednotkových marží.

4.2.3 Pomalu proměnná jednotková obchodní marže

Při analýze vývoje celkové obchodní marže TGP nejprve vyjdeme z předpokladu, že jedna z jednotkových marží (například x_1) se s časem mění velmi pomalu v porovnání s časovou změnou jednotkové obchodní marže x_2. Jednotková obchodní marže x_1 tedy zůstává v určitém časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$ konstantní a je rovna hodnotě x_{01} (vyjádřené v měnových jednotkách státu na jehož území se tržní struktura nachází). Potom krátkodobou celkovou obchodní marži TGP lze vyjádřit funkcionálním vztahem v konkrétně pevně zvoleném časovém okamžiku t

$$TGP = f(x_{01}, x_2), \tag{9}$$

tedy reálnou funkcí jedné reálné proměnné, přičemž definiční obor této funkce, který označíme D(TGP), je $D(TGP) = \langle 0, a \rangle \subset E_1$, resp. $<0, +\infty)$. Mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže x_2 (tj. změna celkové obchodní marže TGP v důsledku změny jednotkové obchodní marže x_2 o jednotkové množství - měnovou jednotku- za předpokladu konstantní jednotkové marže x_1, MPCUUGP, je dána vztahem

$$MPCUUGP = \frac{dTGP(x_{01}, x_2)}{dx_2}. \tag{10}$$

Mezní produktivita měnové jednotky konstantní jednotkové obchodní marže je rovna nule.

Celková obchodní marže TGP vzniká kombinacemi variabilní jednotkové obchodní marže x_2 s konstantní jednotkovou obchodní marží x_1, jejíž hodnota je x_{01}.

MPCUUGP je reálnou funkcí jedné reálné proměnné pro každý čas t z časového intervalu $\langle 0, T \rangle$. Modely vývoje celkové obchodní marže TGP v závislosti na nezávisle proměnné x_2 lze kvalitativně odlišit dle jejího konvexního resp. konkávního průběhu a počtu inflexních bodů.

4.2.4 Konvexní celková obchodní marže TGP

Je-li celková obchodní marže TGP konvexní reálná funkce variabilní jednotkové obchodní marže x_2, znamená to, že každá další měnová jednotka, zvětšující její hodnotu, je produktivnější než jednotka předcházející. To se projevuje tím, že přírůstky celkové obchodní marže se zvětšují. TGP nemá inflexní bod a tedy

$$\frac{d^2TGP(x_{01}, x_2)}{dx_2^2} = 2c > 0, \tag{11}$$

na $\langle 0, a\rangle$ (resp. $<0, +\infty$)), přičemž $c = c(x_{01})$ je kladná konstanta. Odtud pak postupnou integrací obdržíme

$$\frac{dTGP(x_{01}, x_2)}{dx_2} = 2cx_2 + b \tag{12}$$

a dále

$$TGP(x_{01}, x_2) = c(x_{01})x_2^{\,2} + b(x_{01})\, x_2 + a(x_{01}), \tag{13}$$

a, b, c jsou konstanty. Předpokládáme-li, že celková obchodní marže TGP je nulová při $x_2 = 0$ a $x_1 = x_{01}$, pak a = 0. Konstantu b volíme kladnou vzhledem k předpokladu konvexnosti TGP. Pro TGP pak máme vztah

$$TGP(x_{01}, x_2) = c(x_{01})\, x_2^2 + b(x_{01})\, x_2 . \tag{14}$$

Průměrná produktivita variabilní jednotkové jednotkové obchodní marže x_2 je dle (3) dána vztahem

$$APUGP_2(x_{01}, x_2) = \frac{TGP(x_{01}, x_2)}{x_2} = c(x_{01})\, x_2 + b(x_{01}). \tag{15}$$

Mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže x_2 je dána dle (6) a (10) vztahem

$$\text{MPCUUGP}(x_{01}, x_2) = \frac{\text{dTGP}(x_{01}, x_2)}{dx_2} = 2\, c(x_{01})\; x_2 + b(x_{01}). \qquad (16)$$

Směrnice polopřímky mezní produktivity měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže $\text{MPCUUGP}(x_{01}, x_2)$ je 2c a je dvakrát větší než směrnice polopřímky průměrné produktivity variabilní jednotkové obchodní marže $\text{APUGP}_2(x_{01}, x_2)$. Protože $\text{MPCUUGP}(x_{01}, x_2) > \text{APUGP}_2(x_{01}, x_2)$ pro (teoreticky vzato $< 0, a)$) resp. $x_2 \in \langle 0, +\infty)$, lze říci, že rostoucí $\text{MPCUUGP}(x_{01}, x_2)$ "vytahuje" $\text{APUGP}_2(x_{01}, x_2)$.

Poznámka:

Vztah (11) pro druhou derivaci $\text{TGP}(x_{01}, x_2)$ dle x_2 je nejprostším vyjádřením podmínky konvexnosti $\text{TGP}(x_{01}, x_2)$. Pokud bychom podmínku konvexnosti $\text{TGP}(x_{01}, x_2)$ vyjádřili lineární, kvadratickou funkcí popřípadě polynomem stupně třetího a vyššího, obdržíme složitější modely chování celkové obchodní marže $\text{TGP}(x_{01}, x_2)$.

4.2.5 Konkávní celková obchodní marže TGP

Je-li celková obchodní marže $\text{TGP}(x_{01}, x_2)$ reálná konkávní funkce, pak pro $x_2 \in \langle 0, +\infty)$ (resp. konečný interval $< 0, a)$) platí

$$\frac{d^2\text{TGP}(x_{01}, x_2)}{dx_2^2} = -2c < 0, \qquad (17)$$

kde konstanta $c(x_{01}) > 0$. Odtud opět postupnou integrací obdržíme vztah pro $\text{TGP}(x_{01}, x_2)$, tj.

$$TGP(x_{01}, x_2) = -c(x_{01})\ x_2^2 + b(x_{01})\ x_2 + a(x_{01}). \qquad (18)$$

Předpokládáme-li, že při nulové jednotkové variabilní obchodní marži je celková obchodní marže take nulová, $TGP(x_{01},0) = 0$, pak $a(x_{01}) = 0$. Konstanta $b(x_{01}) > 0$ zajišťuje posun grafu $TGP(x_{01}, x_2)$ ve směru kladné orientace souřadnicové osy $\hat{x}_2$ variabilní jednotkové obchodní marže x_2 . Pro celkovou obchodní marži $TGP(x_{01}, x_2)$, průměrnou produktivitu variabilní jednotkové obchodní marže $APUGP_2(x_{01}, x_2)$ a mezní produktivitu měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$ pak platí za počáteční podmínky $TGP(x_{01},0) = 0$

$$TGP(x_{01}, x_2) = -c(x_{01})\, x_2^2 + b(x_{01})\ x_2\ , \qquad (19)$$

$$APTGU_2(x_{01}, x_2) = -c(x_{01})\ x_2 + b(x_{01}), \qquad (20)$$

$$MPCUUGP(x_{01}, x_2) = -2c(x_{01})\ x_2 + b(x_{01}). \qquad (21)$$

Směrnice polopřímky (resp. úsečky) $MPCUUGP(x_{01}x_2)$ je –2c a směrnice polopřímky $APUGP_2(x_{01}, x_2)$ je –c, tedy mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové marže klesá dvakrát rychleji než její průměrná produktivita,

$MPCUUGP(x_{01}, x_2) < APUGP(x_{01}, x_2)$. Pokles mezní produktivity měnové jednotky variabilní jednotkové marže stahuje její průměrnou produktivitu.

4.2.6 Lineární celková obchodní marže TGP

Předpokládejme, že

$$\frac{d^2 TGP(x_{01}, x_2)}{dx_2^{\,2}} = 0\,. \qquad (22)$$

pak

$$\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2} = b(x_{01}) \tag{23}$$

a

$$\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2) = b(x_{01})\, x_2 . \tag{24}$$

Protože každá další měnová jednotka variabilní jednotkové marže x_2 přispívá k růstu celkové obchodní marže $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$ stejně jako každá předchozí měnová jednotka, mají všechny měnové jednotky variabilní jednotkové marže x_2 stejnou průměrnou produktivitu. Grafem obou funkcí jsou identické polopřímky (resp. úsečky) rovnoběžné se souřadnicovou osou $\hat{x}_2$ ve vzdálenosti $b(x_{01})$ od této souřadnicové osy.

4.2.7 Celková obchodní marže TGP s inflexním bodem

Připomeňme pro úplnost, že jedna z jednotkových obchodních marží, x_1, je pomalu proměnná s časem, pak celková obchodní marže $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$ je nazáporná reálná funkce jedné reálné proměnné řádu hladkosti alespoň tři na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Předpokládejme nyní, že celková obchodní marže má jeden inflexní bod I = $= [x_{I2}, \mathrm{TGP}(x_{01}, x_{I2})]$ a dále předpokládejme kombinaci dvojice vlastností progresívní růst a degresívní růst funkce $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$ v takovém pořadí, že funkce je konvexní na intervalu $(0, x_{I2})$ (progresívní růst) a konkávní na intervalech (x_{I2}, x_{M2}) (degresívní růst) a $(x_{M2}, +\infty)$, kde x_{M2} je hodnota souřadnice x_2 maxima funkce $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$ na intervalu $\langle 0, +\infty)$, přičemž platí $\mathrm{TGP}(x_{01}, 0) = 0$. Maximální hodnota celkové obchodní marže určuje na jejím grafu bod M = $[x_{M2}, \mathrm{TGP}(x_{01}, x_{M2})]$, kde $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_{M2}) = \max_{x_2 \in \langle 0, +\infty)} (\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$. V souladu s průběhem skutečných ekonomických procesů předpokládejme existenci maxima celkové obchodní marže až za inflexním bodem I (jinak řečeno celková obchodní marže firmy nabyde svého maxima až po průchodu trajektorie vývoje postavení firmy v dokonalé tržní struktuře inflexním bodem), to znamená splnění nerovnosti $x_{I2} < x_{M2}$.

Předpokládejme, že celková obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ má jeden inflexní bod o souřadnici x_{I2}. Pak pro hodnotu x_{I2} varialbilní jednotkové obchodní marže x_2 platí

$$\frac{d^2 TGP(x_{01}, x_{I2})}{dx_2^{\,2}} = 0 . \tag{25}$$

Dále předpokládejme, že existuje tečna grafu celkové obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ v bodě $T = [x_{T2}, TGP(x_{01}, x_{T2})]$, která prochází počátkem ortogonální soustavy souřadnic s osami $\hat{x}_2$ a $T\hat{G}P$. Abychom vždy zajistili splnění požadavku, že $TGP(x_{01}, x_2)$ je (jednoznačnou) reálnou funkcí (jedné reálné proměnné), předpokládejme mezi hodnotami souřadnic x_2 inflexního bodu I, tečného bodu T a bodu M pro maximum celkové obchodní marže splnění nerovností $x_{I2} < x_{T2} < x_{M2}$.

Pro hodnotu směrnice tečny grafu celkové obchodní marže v bodě T platí $\operatorname{tg} \varphi = \frac{TGP(x_{01}, x_{T2})}{x_{T2}}$, kde φ je úhel sevřený tečnou grafu funkce $TGP(x_{01}, x_2)$ v bodě T (tečna prochází počátkem soustavy souřadné) a osou $\hat{x}_2$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Směrnice této tečny je take dána první derivací funkce $TGP(x_{01}, x_2)$ dle x_2 v bodě x_{T2} tj. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dTGP(x_{01}, x_2)}{dx_2}$. Porovnáním obou vztahů pro $\operatorname{tg} \varphi$ obdržíme rovnici pro výpočet x_{T2}

$$\frac{TGP(x_{01}, x_2)}{x_2} = \frac{dTGP(x_{01}, x_2)}{dx_2} . \tag{26}$$

Poznámka:

K rovnici (26) lze dospět také alternativní úvahou. Průměrná produktivita variabilní jednotkové obchodní marže je nezáporná spojitá funkce na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Z

předpokladu existence tečného bodu bodu T na grafu funkce $TGP(x_{01}, x_2)$ plyne existence maxima funkce $\frac{TGP(x_{01}, x_2)}{x_2}$. Pak platí

$$\frac{dAPUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)}{dx_2} = \frac{d}{dx_2}\left(\frac{TGP(x_{01}, x_2)}{x_2}\right), \tag{27}$$

a dále

$$\frac{\frac{dTGP(x_{01}, x_2)}{dx_2}\, x_2 - TGP(x_{01}, x_2)}{x_2^2} = 0, \tag{28}$$

ze kterého obdržíme

$$\frac{dTGP(x_{01}, x_2)}{dx_2} = \frac{TGP(x_{01}, x_2)}{x_2}, \tag{29}$$

což je opět rovnice pro výpočet souřadnice x_{T2} bodu dotyku $T = [x_{T2}, TGP(x_{01}, x_{T2}]$.

Vypočteme-li druhou derivaci funkce $APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)$ dle x_2 získáme

$$\frac{d^2APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)}{dx_2^2} = \frac{d^2}{dx_2^2}\left(\frac{TGP(x_{01}, x_2)}{x_2}\right) =$$

} (30)

$$= \frac{\frac{d^2TGP(x_{01}, x_2)}{dx_2^2}\, x_2^{\,2} - 2\, \frac{dTGP(x_{01}, x_2)}{dx_2}\, x_2 + 2\, TGP(x_{01}, x_2)}{x_2^3}.$$

Položíme-li ve vztahu (29) $x_2 = x_{T2}$ a vynásobíme takto vzniklou rovnici hodnotou x_{T2}, obdržíme

$$\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_{T2})}{\mathrm{d}x_2}\, x_{T2} = \mathrm{TGP}(x_{01}, x_{T2})\ . \tag{31}$$

Zavedením x_{T2} a (31) do rovnice (30) získáme

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_2^2}\left(\frac{\mathrm{TGP}(x_{01}, x_{T2})}{x_{T2}}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{TGP}(x_{01}, x_{T2})}{\mathrm{d}x_2^2}}{x_{T2}}. \tag{32}$$

Rovnice (32) vyjadřuje druhou derivaci průměrné produktivity variabilní jednotkové obchodní marže dle x_2 v bodě x_{T2} prostřednictvím druhé derivace celkové obchodní marže dle x_2 v bodě x_{T2}. Bod dotyku $T = [x_{T2}, \mathrm{TGP}(x_{01}, x_{T2})]$ tečny ke grafu funkce $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$ leží v konkávní části jejího grafu a z toho důvodu je $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2^{\,2}} < 0$ v této části grafu, přičemž $x_{T2} > 0$, tudíž

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_2^{\,2}}\left(\frac{\mathrm{TGP}(x_{01}, x_{T2})}{x_{T2}}\right) < 0. \tag{33}$$

Ze vztahu (33) vyplývá, že v bodě x_{T2} nabývá funkce $\mathrm{APUGP}_{x_2}(x_{01}, x_2)$ skutečně své maximální hodnoty.

Z platnosti vztahu (25) plyne, že reálná funkce $\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2}$ má v bodě x_{I2} podezření na extrém. Z předpokladu pořadí druhů růstu funkce $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$ (progresivní růst funkce následovaný degresívním růstem funkce) plyne, že na intervalu $(0, x_{I2})$ je reálná funkce $\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2}$ rostoucí a na intervalu $(x_{I2}, +\infty)$ klesající. Tedy za předpokladu, že $\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, 0)}{\mathrm{d}x_2} < \frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_{I2})}{\mathrm{d}x_2}$ a $\lim_{x_2 \to +\infty} \frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2} < \frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_{I2})}{\mathrm{d}x_2}$ má funkce $\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2}$ v bodě x_{I2} ostré globální maximum

$$\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_{I2})}{\mathrm{d}x_2} = \max_{x_2 \in \langle 0, +\infty)} \frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2} \ . \tag{34}$$

Jedno z nejjednodušších funkcionálních vyjádření druhé derivace funkce $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$, při splnění výše uvedených podmínek, je dáno takto

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2^2} = x_{I2} - x_2 \ . \tag{35}$$

Postupnou integrací rovnice (35) při splnění počáteční podmínky $\mathrm{TGP}(x_{01}, 0) = 0$ obdržíme

$$\mathrm{MPCUUGP}(x_{01}, x_2) = \frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2} = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{I2}(x_{01})x_2 + b(x_{01}), \tag{36}$$

$$\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2) = -\frac{1}{6}x_2^3 + \frac{1}{2}x_{I2}(x_{01})x_2^2 + b(x_{01})x_2 . \tag{37}$$

Budeme-li se od počátku obchodování snažit vytvořit takové obchodní podmínky, abychom získali maximální celkovou obchodní marži, lze tuto skutečnost vyjádřit tím, že mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže je pro $x_2 = 0$ kladná

$$\mathrm{MPCUUGP}(x_{01}, 0) > 0 \tag{38}$$

a odtud bezprostředně vyplývá, že graf reálné funkce $\mathrm{TGP}(x_{01}, x_2)$ vystupuje z počátku soustavy souřadnic do jejího prvního kvadrantu pod úhlem $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (uvažovány jsou tedy takové ekonomické procesy, pro které je $\lim_{x_2 \to 0_+} \frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2}$ rovna kladnému reálnému číslu). Z uvedeného pak vyplývá, že maximum funkce $\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_2)}{\mathrm{d}x_2}$ je rovněž kladné reálné číslo.

Mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové marže, daná vztahem (36), obsahuje integrační konstantu $b(x_{01})$, kterou volíme tak, aby platilo $b(x_{01}) > 0$. Hodnota souřadnice x_2 maxima této funkce je totožná s hodnotou x_{I2} souřadnice x_2 inflexního bodu I funkce $TGP(x_{01}, x_2)$. Reálná funkce $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$ je konkávní kvadratická funkce, jejíž graf protíná osu $\hat{TGP}$ v bodě $[0, b(x_{01})]$. Druhý průsečík této funkce s osou $\hat{x}_2$ v intervalu $(0,+\infty)$ je bod M = $[x_{M2}, TGP(x_{01}, x_{M2})]$ daný maximální funkční hodnotou funkce.

Průměrná produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže

$$APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2) = \frac{TGP(x_{01}, x_2)}{x_2} = -\frac{1}{6}\, x_2^2 + \frac{1}{2} x_{I2}(x_{01})\, x_2 + b(x_{01}) \qquad (39)$$

je hladkou funkcí minimálně druhého řádu na intervalu $\langle 0,+\infty)$. Její první derivace dle proměnné x_2 je dána vztahem

$$\frac{dAPUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)}{dx_2} = -\frac{1}{3}\, x_2 + \frac{1}{2}\, x_{I2}(x_{01}) \qquad (40)$$

a položíme-li ji rovnu nule, obdržíme hodnotu $\bar{x}_2$ variabilní jednotkové obchodní marže, pro kterou platí

$$\bar{x}_2 = \frac{3}{2}\, x_{I2} \qquad (41)$$

a

$$\frac{d^2 APUGP_{x_2}(x_{01}, \bar{x}_2)}{dx_2^2} = -\frac{1}{3}\,. \qquad (42)$$

Tedy se jedná o takovou hodnotu variabilní jednotkové marže, ve které nabývá průměrná produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže své maximum

$$\mathrm{APCUUGP}_{x_2}(x_{01}, \bar{x}_2) = \max_{x_2 \in \langle 0, +\infty)} (\mathrm{APCUUGP}_{x_2}(x_{01}, x_2)) . \qquad (43)$$

Hodnota souřadnice x_2 průsečíku grafu mezní produktivity měnové jednotky variabilní jednotkové marže s grafem průměrné produktivity variabilní jednotkové obchodní marže je dána rovnicí

$$\mathrm{MPCUUGP}(x_{01}, x_2) = \mathrm{APCUUGP}_{x_2}(x_{01}, x_2) , \qquad (44)$$

tedy

$$-\frac{1}{2} x_2^2 + x_{I2}(x_{01})\, x_2 + b(x_{01}) = -\frac{1}{6} x_2^2 + \frac{1}{2} x_{I2}(x_{01}) + b(x_{01}), \qquad (45)$$

která po algebraickéých úpravách nabývá tvaru

$$- x_2 (\frac{1}{3} x_2 - \frac{1}{2} x_{I2}(x_{01})) = 0 . \qquad (46)$$

Řešením rovnice (46) jsou tyto hodnoty souřadnice x_2

$$\bar{x}_{1,2}(x_{01}) = 0, \; \vec{x}_{2,2}(x_{01}) = \frac{3}{2} x_{I2}(x_{01}) . \qquad (47)$$

Pro hodnotu $\bar{x}_{1,2} = 0$ je $\mathrm{MPCUUGP}(x_{01}, \bar{x}_{1,2}(x_{01})) =$ $= \mathrm{APUGP}_{x_2}(x_{01}, \bar{x}_{1,2}(x_{01})) = b(x_{01})$ a souřadnice $\bar{x}_{2,2} = \frac{3}{2} x_{I2}(x_{01})$ je identická dle (41) se souřadnicí maxima průměrné produktivity měnové jednotky variabilní jednotkové marže.

Vypočteme odchylku maximálních hodnot mezní produktivity a průměrné produktivity měnových jednotek variabilní jednotkové marže, tj.

$$\mathrm{MPCUUGP}(x_{01}, x_{I2}) = \max_{x_2 \in \langle 0, +\infty)} (\mathrm{MPCUUGP}(x_{01}, x_2)) = \frac{1}{2} x_{I2}^2(x_{01}) + b(x_{01}) \qquad (48)$$

a

$$\mathrm{APUGP}_{x_2}(x_{01},\bar{x}_{2,2}(x_{01})) = \max_{x_2\in\langle 0,+\infty)}(\mathrm{APUGP}_{x_2}(x_{01},x_2)) = \mathrm{APUGP}_{x_2}(x_{01},\frac{3}{2}x_{I2}(x_{01})) =$$

$$= -\frac{3}{8}x_{I2}^2(x_{01}) + \frac{3}{4}x_{I2}^2(x_{01}) + b(x_{01}) = \frac{3}{8}x_{I2}^2(x_{01}) + b(x_{01}) . \qquad (49)$$

Rozdíl (48) a (49) je $\mathrm{MPCUUGP}(x_{01},x_{I2}) - \mathrm{APUGP}_{x_2}(x_{01},\frac{3}{2}x_{I2}) = \frac{1}{8}x_{I2}^2(x_{01})$.

Mezi maximy obou funkcí je zřejmý vztah

$$\mathrm{MPCUUGP}(x_{01},x_{I2}) = \mathrm{APUGP}_{x_2}(x_{01},\frac{3}{2}x_{I2}) + \frac{1}{8}x_{I2}^2(x_{01}) . \qquad (50)$$

Souvislost mezi x_{T2} a $\bar{x}_{2,2}$ odvodíme následujícím postupem. Směrnicový tvar přímky procházející počátkem soustavy souřadnic a dotýkající se v bodě $T=[x_{T2}(x_{01}),\mathrm{TGP}(x_{01},x_{T2})]$ grafu funkce $\mathrm{TGP}(x_{01},x_2)$ je dán vztahem

$$y = k\,x_2 , \qquad (51)$$

kde k je směrnice. V bodě dotyku je na základě (37) a (51) v platnosti vztah $\mathrm{TGP}(x_{01},x_{T2}(x_{01}) = kx_{T2}(x_{01}) = -\frac{1}{6}x_{T2}^3(x_{01}) + \frac{1}{2}x_{I2}(x_{01})x_{T2}^2(x_{01}) + b(x_{01})x_{T2}(x_{01})$.

Odtud pro směrnici k přímky (51) obdržíme

$$k = -\frac{1}{6}x_{T2}^2(x_{01}) + \frac{1}{2}x_{I2}(x_{01})x_{T2}(x_{01}) + b(x_{01}) . \qquad (52)$$

Směrnice tečné přímky je dána také první derivací funkce $\mathrm{TGP}(x_{01},x_2)$ dle x_2 v bodě x_{T2}

$$\frac{\mathrm{dTGP}(x_{01}, x_{T2})}{\mathrm{d}x_2} = -\frac{1}{2}x_{T2}^2(x_{01}) + x_{I2}(x_{01})x_{T2}(x_{01}) + b(x_{01}) \ . \qquad (53)$$

Porovnáme výrazy (52) a (53) pro směrnici tečny, algebraickými úpravami je převedeme na kvadratický dvojčlen bez absolutního členu, který upravíme na následující součinový tvar

$$x_{T2}\left(\frac{1}{3}x_{T2}(x_{01}) - \frac{1}{2}x_{I2}(x_{01})\right) = 0 . \qquad (54)$$

Pro x_2 blížící se zprava k hodnotě $x_{T2} = 0$ $(x_2 \to 0_+)$ se směrnice tečny grafu blíží k hodnotě poskytující úhel $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Z druhého činitele pak obdržíme vyjádření hodnoty souřadnice x_2 dotykového bodu T, tj. $x_{T2} = \frac{3}{2}x_{I2}$. Znamená to, že první souřadnice dotykového bodu T tečny grafu funkce $\mathrm{TGP}(x_{01}x_2)$ je identická s první souřadnicí bodu M jehož druhá souřadnice je určena hodnotou maxima průměrné produktivity variabilní jednotkové marže.

4.2.8 Vývojová stadia celkové obchodní marže TGP s jedním inflexním bodem

V tomto odstavci se budeme zabývat základními kvalitativně odlišnými procesy celkové obchodní marže s dvěma komoditami z nichž jedna má s časem pomalu proměnnou jednotkovou marži x_1, zatímco druhá jednotková obchodní marže x_2 se mění mnohem větším tempem v porovnání s tempem změny x_1 (rychlostí změny jednotkové marže za jednotku času) .

Úsek trajektorie (grafu) celkové obchodní marže $\mathrm{TGP}(x_{x_{01}}, x_2)$ od počátku soustavy souřadné do inflexního bodu $I = [x_{I2}, \mathrm{TGP}(x_{01}, x_{I2}]$: výnosy z variabilní jednotkové obchodní marže x_2 při konstantní jednotkové obchodní marži x_1 rostou; mezní

produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové marže $MPCUCGP(x_{01}, x_2)$ je na intervalu $(0, x_{I2})$ rostoucí reálnou funkcí; průměrná produktivita variabilní jednotkové obchodní marže $APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)$ na intervalu $(0, x_{I2})$ je rovněž rostoucí reálnou funkcí i když její růst je pomalejší v porovnání s růstem mezní produktivity měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$.

Úsek trajektorie celkové obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ od bodu $I = [x_{I2}, TGP(x_{01}, x_{I2})]$ do bodu $T = [x_{T2}, TGP(x_{01}, x_{T2})]$: po dosažení maximální funkční hodnoty v bodě x_{I2} začíná klesat mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové marže $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$, tj. každá dodatečná měnová jednotka variabilní jednotkové obchodní marže x_2 vyvolá podstatně menší zvětšení celkové obchodní marže v porovnání se zvětšením celkové obchodní marže při nárůstu variabilní jednotkové obchodní marže x_2 o předcházející měnovou jednotku. Jestliže se stále zvětšuje o stejné přírůstky variabilní jednotková obchodní marže x_2, přičemž jednotková obchodní marže x_1 se nemění, pak výsledné přírůstky celkové obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ budou v intervalu (x_{I2}, x_{T2}) klesat, to znamená, že mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$ je na tomto intervalu klesající reálnou funkcí; též lze říci, že se prosazují klesající výnosy z variabilního vstupu. Bodu $I = (x_{I2}, TGP(x_{01}, x_{I2})$ dosáhne celková obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ při zvýšení variabilní jednotkové obchodní marže x_2 o takový počet měnových jednotek, při kterém dosahuje mezní produktivita měnové jednotky variabilní jednotkové obchodní marže $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$ svého maxima, tedy $\frac{dMPCUUGP(x_{01}, x_{I2})}{dx_2} = \frac{d^2TGP(x_{01}, x_{I2})}{d^2x_2} = 0$.

Bod $T = [x_{T2}, TGP(x_{01}, x_{T2})]$ grafu celkové obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ je bodem, kdy pro $x_2 = x_{T2}$ nabývá průměrná produktivita variabilní jednotkové obchodní marže $APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)$ své maximální funkční hodnoty. Je-li počet měnových jednotek variabilní jednotkové marže menší než x_{T2}, funkce $APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)$ je

rostoucí. Pro počet měnových jednotek větší než x_{T2} dochází k poklesu průměrné produktivity variabilní jednotkové obchodní marže. Maximum mezní produktivity měnové jednotky variabilní jednotkové marže $MPCUUGP(x_{01}, x_{I2})$ je větší než maximum průměrné produktivity variabilní jednotkové obchodní marže $APUGP_{x_2}(x_{01}, x_{T2})$ o $(1/8)x_{I2}^2$ (viz rovnice (50)) a z tohoto důvodu graf funkce $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$ protíná shora graf funkce $APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)$ v bodě jejího maxima $T' = [x_{T2}, APUGP_{x_2}(x_{01}, x_{T2})]$.

Úsek trajektorie celkové obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ od bodu $T = [x_{T2}, TGP(x_{01}, x_{T2})]$ do bodu $M = [x_{M2}, TGP(x_{01}, x_{M2})]$: představuje růst celkové obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ z bodu T do bodu M, způsobený růstem variabilní jednotkové obchodní marže x_2. Průměrná produktivita $APUGP_{x_2}(x_{01}, x_2)$ variabilní jednotkové marže x_2 v intervalu $\langle x_{T2}, x_{M2} \rangle$ klesá, jelikož $TGP(x_{01}, x_2)$ je sice rostoucí funkcí na tomto intervalu, ale růst celkové obchodní marže $TGP(x_{01}, x_2)$ se zpomaluje. Průměrná produktivita konstantní jednotkové marže x_{01} v intervalu $\langle x_{T2}, x_{M2} \rangle$ roste, protože roste celková obchodní marže. V tomto vývojovém stadiu každá dodatečná jednotka variabilní jednotkové obchodní marže x_2 tedy zvyšuje průměrnou produktivitu variabilní jednotkové marže. V bodě M trajektorie celkové obchodní marže TGP je hodnota funkce TGP maximalizována a za maximální lze rovněž považovat v bodě M průměrnou produktivitu konstantní jednotkové obchodní marže $APUGP_{x_1}$.

Úsek trajektorie celkové obchodní marže TGP od bodu M = $[x_{M2}, TGP(x_{01}, x_{M2})]$ do bodu $[a, TGP(x_{01}, a)]$ (V tomto úseku statické trajektorie celkové obchodní marže se vracíme k poněkud realističtějšímu modelu, který předpokládá, že variabilní jednotková obchodní marže x_2 mění své hodnoty v konečném intervalu $\langle 0, a \rangle$.): růst počtu jednotek variabilní jednotkové obchodní marže x_2 vede k poklesu $TGP(x_{01}, x_2)$, což má za následek pokles produktivity variabilní i konstantní jednotkové obchodní marže.

V ekonomické realitě jde o situaci, kdy vzhledem k pevnému počtu měnových jednotek konstantní jednotkové obchodní marže existuje velké množství měnových jednotek variabilní jednotkové marže. Mezní produktivita $MPCUUGP(x_{01}, x_2)$ variabilní jednotkové obchodní marže x_2 nabývá v tomto vývojovém stadiu TGP záporných hodnot.

Při hledání odpovědi na otázku, které vývojové stadium celkové obchodní marže TGP je z hlediska prodávajícího optimální, lze konstatovat, že to není vývojové stadium zadané intervalem $\langle x_{M2}, a \rangle$ – prodávající, který by zvyšoval variabilní jednotkovou obchodní marži x_2 při klesající hodnotě celkové obchodní marže TGP by se nechoval racionálně. Negativním rysem vývojového stadia TGP, daného intervalem $\langle 0, x_{I2} \rangle$ je relativně nízké využití konstantní jednotkové obchodní marže x_{01}; prodávající má proto zpravidla zájem zvyšovat hodnotu TGP růstem variabilní jednotkové obchodní marže x_2 tak, aby hodnota TGP překonala hraniční bod $I = [x_{01}, TGP(x_{01}, x_{I2})]$.

Za optimální lze tedy považovat vývojové stadium TGP, dané intervalem $\langle x_{T2}, x_{M2} \rangle$, v jehož počátečním stadiu je dosahováno nejvyšší průměrné produktivity variabilní jednotkové obchodní marže a které vrcholí krátce trvajícím obdobím dosažení maximální hodnoty celkové obchodní marže.

Závěr

Úkolem každého závěru je shrnout hlavní myšlenky v ní obsažené a naznačit jak dál, neboť jednou prací končí pouze částečná etapa analytického procesu, která tvoří nepochybně pouze část mozaiky celé problematiky, kterou výzkumník vidí právě po skončení každého dílčího procesu zkoumání.

Základní cíl práce bylo stanovit abstraktní veličiny a nalézt vztahy mezi těmito veličinami a zákonitosti vývoje těchto vztahů mezi těmito veličinami a tím přispět k systematickému základnímu výzkumu na hranici věd ekonomických a teoreticko-fyzikálních a upevnění základů ekonofyziky a provést analýzu obchodní marže v rámci vysoké roviny abstrakce. Nedomnívám se, že je nutné opakovat závěry jednotlivých kapitol a subkapitol, zejména pokud jde o definice a jejich formální zobrazení. Soustředím se na, podle mého názoru, podstatné.

V práci jsou konstruovány abstraktní ekonomické veličiny, které jsou zadány jednoznačně množinou funkcí, nazývanou nosič abstraktní ekonomické veličiny. Každá abstraktní ekonomická veličina je obecně zadána jiným nosičem.

Mezi abstraktní ekonomické veličiny, konstruované v této práci, jsou zahrnuty:

- průměrná abstraktní ekonomická veličina,
- mezní abstraktní ekonomická veličina,
- mezní průměrná abstraktní ekonomická veličina,
- průměrná mezní abstraktní ekonomická veličina,
- elastičnost abstraktní ekonomické veličiny.

Pro kvantitativní vyjádření abstraktních ekonomických veličin se předpokládá:

- že mají vlastní spojité derivace až do řádu čtvrtého včetně, aby byla zaručena spojitost, omezenost, existence extremálních hodnot, nabývání všech funkčních hodnot kvantitativních vyjádření mezi funkčními hodnotami v krajních bodech jejich definičního oboru a jejich derivací až do řádu třetího na omezeném uzavřeném intervalu.
- Jsou provedeny elementární důkazy těchto tvrzení.

Abstraktní ekonomické veličiny jsou konstruovány tak, aby je bylo možné použít ke konstrukci takových abstraktních ekonomických veličin, jejichž vývoj v čase je popsatelný metodami kvantové logiky. Je používáno tradiční statické hledisko klasické ekonomie k popisu vývoje stavu ekonomického systému.

Elastičnost závislých ekonomických veličin je definována tak, aby byla v souladu s definicí elastičnosti poptávky, tak jak ji zavedl A. Marshall. Při konstrukci elastičnosti závislé ekonomické veličiny je dokázáno, že Marshallův postup zavedení elastičnosti poptávkové funkce v sobě implicitně obsahuje lineární zjednodušení, zdůvodňující částečně pozorované odchylky skutečných hodnot poptávkových funkcí od teoreticky odvozených hodnot.

Pro analýzu byly zavedeny:

- definice obchodní marže,
- definice jednotkové obchodní marže,
- definice celkové obchodní marže v čase,
- definice průměrné produktivity měnové jednotky (variabilní) jednotkové obchodní marže,
- definice průměrné produktivity měnové jednotky,
- definice mezní produktivity měnové jednotky jednotkové obchodní marže,
- definice tržní struktury, definice dokonale konkurenční tržní struktury,

Na základě zavedených definic byla provedena analýza:

- celkové obchodní marže TGP v krátkém období,
- konvexní celkové obchodní marže TGP,
- konkávní celková obchodní marže TGP,
- lineární celková obchodní marže TGP,
- celkové obchodní marže TGP s inflexním bodem,
- vývojových stadií celkové obchodní marže TGP.

Pokud bych měl být prvním kritikem své práce, musím sebekriticky říci, že v základním výzkumu představuje pouze již zmíněnou malou část mozaiky složitosti

a komplikovanosti zkoumání společenských jevů. Každopádně nelze říci, že touto prací končí výzkum v této oblasti, a to v obecné či cílené rovině abstraktního přístupu. Jinými slovy chci říci, že vědecký názor v oblasti základního výzkumu je reprezentován hypoteticko deduktivním přístupem, což koresponduje s názory velikánů ekonomického učení. Striktně řečeno, obor, který nedisponuje základním výzkumem může být sporadicky označován termínem obor vědecký (viz např. nároky na publikace v časopisech s nenulovým impakt faktorem). Tato teze ovšem nevylučuje nesmírnou užitečnost přístupů v rámci výzkumu aplikovaného, ale i konkrétním propojení základního a aplikovaného výzkumu nelze hovořit.

Literatura použitá ke studiu a sepsání práce

Allen, R., G., D.: The concept of arc elasticity of demand. Rev. Econ. Studies, 1, No. 3, pp. 226-229, 1933

Allen, R., G., D.: Mathematical economics. 2. ed., reprinted, Macmillan, London, 1973, ISBN 0-333-02707-8

Allen, R., G., D.: Macro-economic Theory: a mathematical treatment. Macmillan, London, 1975, ISBN 0-333-04112-7

Allen, R., G., D.: Mathematical analysis for economists. Macmillan, London, 1979, ISBN 0-333-01550-9

Amoroso, L.: La curva statica di oferta, Giornale degli economisti e rivista di statistica. VIII, No. 1, pp. 1-26, 1930

Antonelli, G., B.: Sulla Teoria Matematica della Economia Politica. Nella Tipografia del Forchetto, Pisa, 1886, (translated as chapter 16 „On the Mathematical Theory of Political Economy“, in J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter and H. F. Sonenschein eds. – Preferences, Utility and Demand, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971, also in G. Chichilnisky ed. – Mathematical Economics, Vol. 1, Cheltenham, UK, Elgar, 1998)

Antonelli, S. – Biographical Notes and Bibliography of G. B. Antonelli; In: G. Chichilniski (ed.) - Mathematical Economics, Vol. 1, Cheltenham, UK, Elgar, 1998, pp. 31-34, ISBN 1-85898-260-X

Apfelbeck, A.: Úvod do matematické analýzy 1. Vydání 1., Vydavatelství ČVUT, Praha, 1976

Apfelbeck, A.: Úvod do matematické analýzy 2. Vydání 1., Vydavatelství ČVUT, Praha, 1978

Apfelbeck, A.: Úvod do matematické analýzy 3. Vydání 1., Vydavatelství ČVUT, Praha, 1979

Bourbaki, N.: Algébre, Chapitre I, Structures algébriques. 2. vydání, Hermann & Cie, Paris, 1951

Bell, E., T.: The Development of Mathematics. McGraw-Hill, New York, 1945

Bourbaki, N.: Eléments d´histoire des mathématiques. Réimpression inchangée de l´édition originále de 1984, Mason, Paris, 1984, Springer, Berlin, 2007, ISBN 978-3-540-338938-8

Coolidge, J., L.: The History of Geometrical Methods. Clarendon Press, Oxford, 1940

Caratheodory, C.: Die Bedeutung des Erlangen Programm. Naturwissen-schaften, 17, p. 298, 1919

Cartan, E.: La théorie des groupes et la geometre. L'Enseignement mathématique, pp. 200-225, 1927

Coufal, J.; Klůfa, J.: Matematika pro ekonomy. 1. díl, Ekopress, Praha, 1997, ISBN 80-86119-00-9

Dieudonné, J., A.: Foundations of modern analysis. Academic Press, New York, 1969

Drozen, F. – Oceňování majetku, habilitační práce, 1993

Drozen, F. – Oceňování movitého majetku, VŠE, Prague, 1995, ISBN 80-7079-330-9

Drozen, F.: Cena, hodnota, model. 1. vydání, Oeconomia, Praha, 2003, ISBN 80-245--0501-0

Drozen, F.: Modelling of price dynamics and appreciation. Ekonomický Časopis (Journal of Economics), 56, No. 10, pp. 1033-1044, 2008

Engliš, K.: Malá logika: věda o myšlenkovém řádu. 1. vydání, Melantrich, Praha, 1947

Giaquinta, M.; Modica, G.: Mathematical Analysis: Functions of One Variable. Birkhäuser, Boston, 2003

Giaquinta, M.; Modica, G.: Mathematical Analysis: Approximation and Discrete Processes. Birkhäuse, Boston, 2004

Giaquinta, M.; Modica, G.: Mathematical Analysis: Linear and Metric Structures and Continuity. Birkhäuser, Boston, 2007

Giaquinta, M.; Modica, G.: Mathematical Analysis: An Introduction to Functions of Several Variables. Birkhäuser, Boston, 2009, ISBN 978-0-8176-4509-0

Hayek, F., A.: Kontrarevoluce vědy. Liberální institut, Praha, 1995

Henzler, J.; Kaňka, M.: Matematika pro ekonomy. 2. díl, Ekopress, Praha, 1997, ISBN 80-86119-01-7

Hesse, L., O.: Vorlesung über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberfläche zweiter Ordnung. Revidiert und mit Zusätzen verben von Dr. S. Gundelfinger, 3. ed., Leipzig, 1876

Hesse, L., O.: Über ein Obertragungsprinzip. J. reine und angel. Math., 86, p. 15, 1866

Jarník, V.: Diferenciální počet (I). 6. vydání, Academia, Praha, 1974 a

Jarník, V.: Diferenciální počet (II). 5. vydání, Academia, Praha, 1976 a

Jarník, V.: Integrální počet (I). 5. vydání, Academia, Praha, 1974 b

Jarník, V.: Integrální počet (II). 2. vydání, Academia, Praha, 1976 b

Jaffé, W. (ed.) – Correspodence of Léon Walras and Related Papers, Vol. I, North – Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965, pp. 1 – 15

Klein, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere Geometrische Forschungen, A. Deichert, Erlangen, 1872

Klein, F.: Vorlesung über die Entwicklungen der Mathematik im 19. Jahr-hundert. Teil I, Springer, Berlin, 1926

Klein, F.: Vorlesung über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil II, Springer, Berlin, 1927

Klein, F.: Das Erlangen Programm: Vergleichende Betrachtungen über neuere Geometrische Forschungen. Geest und Portig, Leipzig, 1974

Kohlmann, Č.: Základy matematiky pro ekonomy, ZP-ČSTV-ZPA, Trutnov, 1966

Kotlikoff, L., J.; Summers, L., H.: The Role of Intergenerational Transfers In Aggregate Capital Accumulation, J. Pol. Econ., 89, No. 4, pp. 706-732, 1981

Kramkov, D.; Schachermayer, W.: The asymptotic elasticity of utility functions and optima investment in incomplete markets. The Annals of Appl. Probability, 9, No. 3, pp. 904-950, 1999

Marshall, A. – Principles of Economics, Macmillan, London, 1890 (First Edition)

Mashall, A.: Principles of Economics. An introductory volume Vol. I Text,

(with annotations by C. W. Guillebaud), Macmillan, London, 1961 a

Mashall, A.: Principles of Economics. Vol. II Notes, (with annotations by C. W. Guillebaud) Macmillan, London, 1961 b

Norden, A., P. (ed.): Ob osnovanijach geometrii. GITTL, Moskva, 1956

Pareto, V. – Principi fondamentali della teoria della elasticitá de corpi solidi, Torino, 1869 (disertační práce-Dissertazione e tesi presentate commissione esaminatrice della Scuola di applicazione per gl´ingegneri in Torino da Fritz Wilfrid Pareto da Genova per essere dichiarato ingegnere laureato)

Pareto, V. – Cours d´economie politique, F. Rouge, Lausanne; Pichon, Paris; Dunker&Humblot, Leipzig; 1896-1897 (2 vol.)

Perroni, C.; Rutheford, T., F.: Regular flexibility of nested CES functions. Europ. Econ.

Rev., 39, pp. 335-343, 1995

Petr, K.: Počet diferenciální (část analytická). Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1923

Petr, K.: Počet integrální: Úvod do teorie množství. 2. vydání, pozměněné s dodatkem, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1931

Pigou, A., C.: The Economics of Welfare. 4th ed., Macmillan, London, 1962

Popper, K., R.: Logika vědeckého bádání. 1. vyd., Oikoymenh, Praha, 1997

ISBN 80-86005-45-3

Robinson, J.: Collected economic papers. Vol. 1, Blackwell, Basil, 1960 a

Robinson, J.: Collected economic papers. Vol. 2, Blackwell, Basil, 1960b

Robinson, J.: Collected economic papers. Vol. 3, Blackwell, Basil, 1965

Robinson, J.: The Economics of Imperfect Competition. 2nd ed., Macmillan, London, 1969

Samuelson, P., A.; Nordhaus, W., D.: Ekonomie (překlad 18. vyd. M. Gregor et al.) 1. vydání, NS Svoboda, Praha, 2007, ISBN 978-80-205-0590-3

Schutz, W. – A History of Fatigue, *Engineering Fracture Mechanics*, 54, No. 2, pp. 263-300, (1996), ISSN 0013-7944

Schwartz, L.: Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966

Schwartz, L.: Cours d´analyse. Tome 1, Tome 2., Hermann, Paris, 1967

Schouten, J., A.: Erlangen Programm und Übertragungslehre. Rend. Circ. Mat. Palermo, 50, pp. 1-28, 1926

Sharpe, R., W.: Differential Geometry: Cartan´s generalization of Klein´s Erlangen program. Springer, 1997, ISBN 0-387-94732-9

Sommerfeld, A.: Klein, Riemann und mathematische Physik, Naturwissenschaften, 17, p. 301, 1919

Soukup, J.: Mikroekonomická analýza (vybrané kapitoly). 1. vydání, Melandrium, Slaný, 1999

Soukupová, J.; Hořejší, B.; Macáková, L.; Soukup, J.: Mikroekonomie. 3. doplněné vydání, Management Press, Praha, 2003, ISBN 80-7261-061-9

Soukupová, J.; Hořejší, B.; Macáková, L.; Soukup, J.: Mikroekonomie. 4. doplněné vydání, Management Press, Praha, 2006, ISBN 978-80-7261-150-8

Timoshenko, S. – History of the Strength of Materials, Dover, New York, 1983, p. 167, ISBN 0-486-61187-6

Tinbergen, J.: Ein Problem der Dynamik. Zeitschr. F. Nationalökonomie 3, No. 2, pp. 169-184, 1932

Trkovská, D.: Erlangenský program. In Matematika v proměnách věků, vol. V, M. Bečvářová, J. Bečvář (eds.), pp. 367-373, Matfyzpress, Praha, 2007

Vizgin, V., P.: Erlangejskaja programma i fizika. Nauka, Moskva 1975

Voit, J. – The Statistical Mechanics of Financial Markets, Springer, Berlin, 2001 (1st ed.), ISBN 3-540-41409-6; Springer, Berlin, 2003 (2nd ed.), ISBN 3-540-00978-7; Springer, Berlin, 2005 (3rd ed.), ISBN 978-3-540-26285-5

von Hayek, F., A. – Kontrarevoluce vědy-studie o zneužívání rozumu, Liberální institut, Praha, 1995, (1. vyd), ISBN 80-85787-87-3

Vojtěch, J.: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických. 1. část, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1946 a

Vojtěch, J.: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických. 2. část, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1946 b

von Stackelberg, H.: Grundlagen einer reinen Kostentheorie (Ester Teil) Zeitschr. F. Nationalökonomie, 3, No. 3, pp. 333-367, 1932 a

von Stackelberg, H.: Grundlagen einer reinen Kostentheorie (Zweiter Teil), Zeitschr. F. Nationalökonomie, 3, No. 4, pp. 552-540, 1932 b

Walras, L. – Élements d´économie politique pure, L. Cobarz, Lausanne, 1874; Guillaumin, Paris, 1874; H. Georg, Bale, 1874

Walras, L. – Théorie mathématique de la richesse sociale, L. Cobarz , Lausanne, 1883

Walras, L. – Elements of Pure Economics, or, The Theory of Social Wealth, (1st ed.) Routledge, London, 1954; (2nd ed.) Routledge, 2003, ISBN 0-415-31340-6

Weyl, H.: Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart, Naturwissen-schaften, 18, p. 4, 1930

Wöhler, A. – Theorie rechtekiger eiserner Brückenbalken mit Gitterwänden und mit Blechwänden, *Zeitschrift für Bauwesen,* 5, pp. 121-166, (1855)

Wöhler, A. – Über die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl, *Zeitschrift für Bauwesen,*20, pp. 73-106, (1870)

Wussing, H.: Ke vzniku Erlangenského programu. Pokroky mat. fyz. a astronomie, 13, pp. 367-373, 1968

Wussing, H.: Die Genesis des Abstrakten Gruppenbegriffes: Ein Beitrag zur Enstehungsgeschichte der Abstrakten Gruppentheorie, VEB Deutscher Ver. Der Wissenschaften, Berlin, 1969

Yaglom, I., M.: A simple non-Euclidean geometry and its physical basis: an elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity, Springer, New York, 1979, ISBN 0-387-90332-1

Yaglom, I., M.: Geometric transformations, 4. Circular transformations. Mathematical Association of America, Washington, 2009, ISBN 978-0-88385-648-2

Zamansky, M.: Introduction a l´algébre et l´analyse mode rnes, 2. vyd., Dunod, Paris, 1963

Zeithamer, T.:The Incorporation of Physics into Economic Thought. Mundus symbolicus, 18, pp. (bude publikováno), (2010) a, ISSN 1210-809X

Zeithamer, T.: Über die Möglichkeit der Beeinflussung ökonomischer Denkweisen durch die Physik. EuMotion-REPORT, 10, VIII, (2010) b, ISSN 1868-6443

Zemánek, J. – Alfred Marshall (1842-1924) – tvůrce moderní ekonomie; In: euroekonom. cz-osobnosti hospodářských dějin, 6. 10. 2010

Seznam vybraných publikací

Ing.Tomáš Zeithamer

Matematické inženýrství

Křivský, L.; Zeithamer,T. – K možnosti generace gravitačního záření ze Slunce, Zpravodaj hvězdárny v Úpici, č. 5, str. 2, (1981)

Křivský, L.; Zeithamer,T. – On the possibility of generating gravitational radiation by the Sun, Astrophys. Space Sci., 85, 309, (1982)

Zeithamer,T. – Gravitační záření a základní experimentální testy obecné teorie relativity, část 1., Kosmické rozhledy, 21, 67, (1983)

Zeithamer,T. – Gravitační záření a základní experimentální testy obecné teorie relativity, část 2., Kosmické rozhledy, 22, 1, (1984)

Zeithamer,T. – Přenosové jevy ve fyzice vztahů Slunce – Země, In: Člověk ve svém pozemském a kosmickém prostředí, Ed. Hvězdárna v Úpici, 1983, str. 12

Zeithamer,T. – Přenosové jevy ve vnější magnetosféře Země – 1. Magnetopauza, In: Člověk ve svém pozemském a kosmickém prostředí, Ed. Hvězdárna v Úpici, 1984, str. 97

Zeithamer,T. – Přenos energie a hmoty do magnetosféry denním polárním výběžkem plazmy přechodové oblasti, In: Zborník referátov zo VI. celoštátneho slnečného seminára,SÚAA, Hurbanovo, 1983, str. 242

Zeithamer,T. – Asymptologie ve fyzice vztahů Slunce – Země, In: Zborník referátov zo VII. celoštátneho slnečného seminára, SÚAA, Hurbanovo, 1985, str. 261

Zeithamer,T. – Univerzální model nespojité nestability v magnetosféře a jeho možné užití k předpovědi stavu magnetosféry Země, In: Extraterestriální faktory a jejich propagace do biosféry, Ed. ČHMU a Čs. bioklimatologická společnost, Praha, 1985, str. 43

Zeithamer,T. – Teorie fuzzy katastrof jako nová metoda modelování ve vztazích Slunce - Země, In: Elektromagnetické pole a biologické systémy, Ed. ČVUT, Praha, 1986, str. 124

Zeithamer,T. – Přenos hmoty, hybnosti a energie do vnějších částí magnetosféry, In: Kozmogénne vplyvy a člověk, Ed. Geof. ústav SAV, Bratislava, 1983, str. 122

Zeithamer,T. – Teorie katastrof jako nová metoda modelování ve fyzice vztahů Slunce –Země, In: Vztahy Slunce – Země, díl 2., Ed. JČSMF, Praha, 1986, str. 135

Zeithamer, T. – Strukturální stabilita chování magnetosféry Země, In: Vztahy Slunce – Země, díl 2., Ed. JČSMF, Praha, 1986, str. 143

Zeithamer, T. – Mechanismy přenosu energie v systému heliosféra – geosféra s důsledky pro extraterestriální bioklimatologii, In: Vývoj bioklimatologie a její aplikace v praxi, díl 1., Ed. Čs. bioklimatologická společnost, Praha, 1988, str. 95

Zeithamer,T. – Fyzikální mechanismy vlivů sluneční aktivity na cirkulační stavy zemské troposféry, 1. Mechanismy založené na krátkodobé proměnlivosti meteorologické sluneční konstanty, In: Elektromagnetické pole a biologické systémy, Ed. ČVUT, Praha, 1983, str. 129

Zeithamer,T. - Úloha fyziky vztahů Slunce – Země ve světové ekonomii, In: Člověk ve svém pozemském a kosmickém prostředí, Ed. Hvězdárna Úpice, 1986, str. 10

Zeithamer,T. – Catastrophe behaviour of the terrestrial magnetosphere and its consequences for the development of the environment, In: Proc. of the Symp. on Human Biometeorology, Štrbské pleso, Czechoslovakia, 1988, p. 464

Zeithamer,T. – Dynamics of synergetic systems in solar – terrestrial relationships, In: Proc. of the Symp. on Human Biometeorology, Štrbské pleso, Czechoslovakia, 1988, p. 452

Zeithamer,T. – Analysis of the energy transport mechanisms in the Heliosphere – Geosphere system from the standpoint of the influences on human organism 1. Mechanisms base on the short term variability of meteorological solar constant, In: Proc. of the Symp. on Human Biometeorology, Štrbské pleso, Czechoslovakia, 1988, str. 457

Zeithamer,T. – Fyzika vztahů Slunce – Země a její úloha v řešení globálních problémů lidstva, In: Zákonitosti vývoje biosféry a noosféry, Ed. Československá zemědělská akademie, Praha, 1988, str. 76

Zeithamer, T. – Structural stability of the Earth magnetosphere, In:Proc. Int. Cong. on Geo-cosmic Relations , PUDOC Wageningen, The Netherlands, 1990, p. 79

Zeithamer, T. – Synergetika vztahů Slunce – Země 1. Globální interakce vnější magnetosféry Země se slunečním větrem, In: Vztahy Slunce – Země, díl 4., ed. A. Prigancova, Geof. ústav SAV, Bratislava, 1990, str. 175

Matematická ekonomie

Zeithamer,T.; Drozen, F.- Několik poznámek k modelování pohybu užitné hodnoty, Mundus symbolicus,12, 79, (2004)

Ekonofyzika

Drozen, F., **Zeithamer, T.**, Kaňka, M. – Geometrization of Gross Profit, Mundus symbolicus, 17, pp. 29-38, (2009)

Zeithamer, T. – The Incorporation of Physics into Economic Thought, Mundus symbolicus, 18, (bude publikováno), (2010)

Zeithamer, T. – Über die Möglichkeit der Beeinflussung ökonomischer Denkweisen durch die Physik, EuMotion-REPORT, 10, VIII, (2010) ISSN 1868-6443

Učebnice

Zeithamer,T.; Pospíšil, J. – Kvantová elektronika pro začátečníky, ČVUT, Praha, 2009, ISBN 978-80-86641-10-2