

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta informatiky a statistiky

Studijní program: Kvantitativní metody v ekonomice

Studijní obor: Statistika a ekonometrie

Autor bakalářské práce: Martin Košina

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Martina Hejdová

METODA MONTE CARLO A JEJÍ VYUŽITÍ VE FINANCÍCH

školní rok 2013/2014

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

Martin Košina

V Praze, dne 19. května 2014

.....

podpis

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval mé vedoucí bakalářská práce Ing. Martině Hejdové za vedení práce, podnětné připomínky, velikou trpělivost a celkovou pomoc při zpracovávání daného tématu.

ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce je popis simulační metody Monte Carlo, která se v posledních desetiletích těší velké popularitě v mnoha vědních oborech.

V dnešní době nejrůznějších statistických průzkumů, analýz a zpracovávání informací mají podobné statistické metody velký význam.

Teoretická část práce nejdříve obecně popisuje simulační modely, protože při jejich řešení se podobné metody, jako je Monte Carlo, používají. Dále jsou uvedeny typické historické příklady použití této metody, její popis a možnosti využití.

Praktická část práce se zabývá řízením rizika ve financích a možné aplikaci metody Monte Carlo při určování míry rizika Value at Risk. Tato míra je moderním a celosvětově používaným nástrojem při řízení tržního rizika. Součástí praktické části je příklad výpočtu této míry pro cenový index PX, který je oficiálním indexem Burzy cenných papírů Praha.

KLÍČOVÁ SLOVA

simulační modely, metoda Monte Carlo, simulace Monte Carlo, řízení rizika, Value at Risk

ABSTRACT

The aim of the thesis is the description of the Monte Carlo simulation method, which in recent decades are very popular in many scientific fields.

Nowadays various statistical surveys, analysis and information processing are similar statistical methods very significant.

The theoretical part of the paper firstly describes the general simulation models because of their solutions with similar methods such as Monte Carlo, are often used. The following are typical examples of the historical method, its description and usage.

The practical part of the thesis deals with the management of risk in finance and the possible application of the Monte Carlo in determining the level of risk Value at Risk. This rate is modern and globally used tool in the management of market risk. The practical part is about the calculation of the extent of the price index PX , which is the official index of the Prague Stock Exchange.

KEYWORDS

simulation models , Monte Carlo method, Monte Carlo simulation, risk management, Value at Risk

Obsah

Úvod.....	1
1. Simulační modely	3
1.1 Popis simulačních modelů.....	3
1.1.1 Simulační projekt.....	4
1.1.2 Statistické simulační modely	6
1.1.3 Příprava simulačního modelu	6
1.1.4 Základní prvky simulačních modelů.....	7
1.1.5 Verifikace a realizace simulačního modelu	8
1.1.6 Využití simulačních modelů	9
1.1.7 Výhody a nevýhody simulačních modelů.....	10
1.1.8 Určení optimálního počtu opakování pokusu	11
1.2 Generátory náhodných a pseudonáhodných čísel	12
1.2.1 Princip generování náhodných čísel	12
1.2.2 Nejčastěji používané zdroje pseudonáhodných čísel.....	14
1.2.1 Ověřování náhodnosti generovaných čísel	15
2. Metoda Monte Carlo	17
2.1 Historie metody Monte Carlo.....	18
2.1.1 Buffonova jehla.....	19
2.1.2 Výpočet Ludolfova čísla pomocí „hrachu“	21
2.1.3 Původ názvu metody - Monte Carlo	23
2.1.4 Šíření aplikace metody Monte Carlo	24
2.2 Výhody a nevýhody metody	25
3. Využití metody Monte Carlo	26
3.1 Využití ve fyzice	26
3.1.1 Simulace průchodu neutronu deskou	27
3.2 Využití v matematice	28
3.2.1 Výpočet určitého integrálu.....	28
3.2.2 Řešení systému lineárních algebraických rovnic.....	29
3.3 Další využití a aplikace	29

3.4	Využití ve financích a pojišťovnictví.....	30
4.	Praktická část	31
4.1	Postup řízení rizika.....	31
4.2	Value-At-Risk	32
4.2.1	Cenový index pražské burzy - Index PX	33
4.2.2	Výpočet VAR	36
4.2.3	Výhody a nevýhody VAR.....	41
	Závěr	43
	Literatura.....	45
	Seznam tabulek a obrázků:	46
	Příloha 1 – tabulka náhodných čísel a její použití	47
	Příloha 2 – báze portfolia indexu PX.....	48
	Příloha 3 – začátek a konec vývoje indexu PX.....	49
	Příloha 4 – četnosti historických změn indexu PX	50
	Příloha 5 – test normality rozdělení historických změn indexu PX	51
	Příloha 6 – četnosti simulovaných změn indexu PX	52

Úvod

Téma této práce, metoda Monte Carlo, je metodou řešení simulačních modelů, které mají stochastický charakter. Je to oblíbená statistická metoda používaná při odborných vědeckých experimentech, predikcích ekonomických veličin, zobecňování výběrových charakteristik na základní soubor, zpracovávání generovaných náhodných hodnot aj.

Větší část této práce tvoří teoretická část, přičemž nejdříve je podrobně popsána teorie simulačních modelů včetně popisu celého jejich průběhu. Základní prvky modelů, příprava před spuštěním simulace, následná verifikace a samotná realizace modelu jsou popsány v několika navazujících podkapitolách. Dále je představena možnost využití simulačních modelů a shrnutí jejich výhod a nevýhod. V závěru úvodní kapitoly je podkapitola zabývající se generátory náhodných čísel, bez nichž by simulační modely obsahující stochastické veličiny nebylo možné realizovat.

Následuje hlavní kapitola teoretické části a to kapitola zabývající se metodou Monte Carlo jako takovou. Tato kapitola by měla podrobně metodu charakterizovat, popsat její historii, uvést konkrétní případy použití a názornou ukázkou postupu řešení výpočtu Ludolfova čísla π . Mnoho podobných matematických a statistických pokrokových teorií, jako je tato, je pojmenována po svém tvůrci, a proto je v další podkapitole popsán vznik netradičního a na první pohled nelogického označení metody. Ke konci je naznačeno šíření aplikace metody a shrnutí jejích výhod a nevýhod.

Využití metody Monte Carlo uzavírá teoretickou část práce a je rozděleno na několik oblastí. Nejdříve je popsáno využití v oborech fyziky, protože zde se metoda zrodila a našla svá první použití. Možnost použití metody v matematice zastupuje náznak postupu výpočtu jednoduchého určitého integrálu a řešení systému lineárních algebraických rovnic. Shrnutí ostatních reálných využití je uzavřeno podkapitolou, na kterou navazuje praktická část práce.

Praktická část se zabývá problematikou řízení tržního rizika pomocí výpočtu míry Value at Risk. Konkrétní výpočet počítá hodnotu VAR pro index Burzy cenných papírů Praha, který je oficiálním cenovým indexem této burzy.

Cílem této práce je popsat metodu Monte Carlo, shrnout všechny různé možnosti jejího uplatnění a názorně předvést základní výpočet hodnoty Value at Risk pomocí této metody.

1. Simulační modely¹

Pojmy simulace a simulovat se vyskytují v dnešní době často a patří do našeho běžného slovníku v nejrůznějších významech. Nejčastěji nahrazuje výraz „simulovat“ synonyma předstírat, napodobovat, hrát nebo předvádět někoho/něco jak uvádí Paholok (2008, str. 4). Z pohledu vědních disciplín je simulací myšleno napodobení procesu určitého objektu ať už v prostředí laboratoře, v realitě nebo prostřednictvím výpočetní techniky formou virtuálního modelu. Model považujeme za zjednodušení studovaného reálného systému popsaného pomocí předpokladů, pravidel, zákonitostí a souvislostí mezi jevy a faktory zkoumané problematiky.

Simulace nepochybně patří mezi vědecké metody, protože pomáhá poznávat fungování procesů z reálného světa. Získávají se poznatky o simulovaném světě, jež se následně na skutečný svět zobecňují. Simulace může být fyzická (interaktivní, reálná) nebo počítačová a považuje se za specifický druh experimentu.

1.1 Popis simulačních modelů

„Simulační techniky se využívají ve všech různých oborech v případech, kdy nelze použít analytické způsoby řešení. Jedná se o způsob experimentování s matematickým modelem, který zobrazuje jednotlivé kroky a vlastnosti reálného systému. Charakter simulačních modelů může být stochastický nebo deterministický. První uvedené jsou sice komplikovanější a náročnější nicméně jejich výhodou je, že se v nich může modelovat vliv času, více proměnných a případně i náhodná složka.“

(Houška, 2009 str. 47)

S rozvojem simulačních technik se otevírají nové možnosti pro konstrukce stále rozsáhlejších a komplikovanějších systémů, jejichž ruční analýza a řešení

¹ Kapitola se zabývá obecně simulačními modely a vychází z Houšky (2009)

by bylo značně náročné a mnohdy prakticky nereálné. Simulace napodobuje chování reálných procesů a může být chápána jako abstraktní model reality.

M. Houška (2009, str. 7) definuje simulaci takto:

„Simulaci je možné charakterizovat jako proces napodobování jednotlivých kroků reálných systémů a simulační model je matematický předpis těchto kroků.“

Simulační modely slouží převážně k získávání a následnému zpracování informací o chování systému v závislosti na vstupních údajích, nicméně může být sledována i dílčí reakce na změny podmínek. Simulačními modely můžeme získat spoustu informací o různých reakcích systému, které jsou dále zkoumány a statisticky zpracovávány.

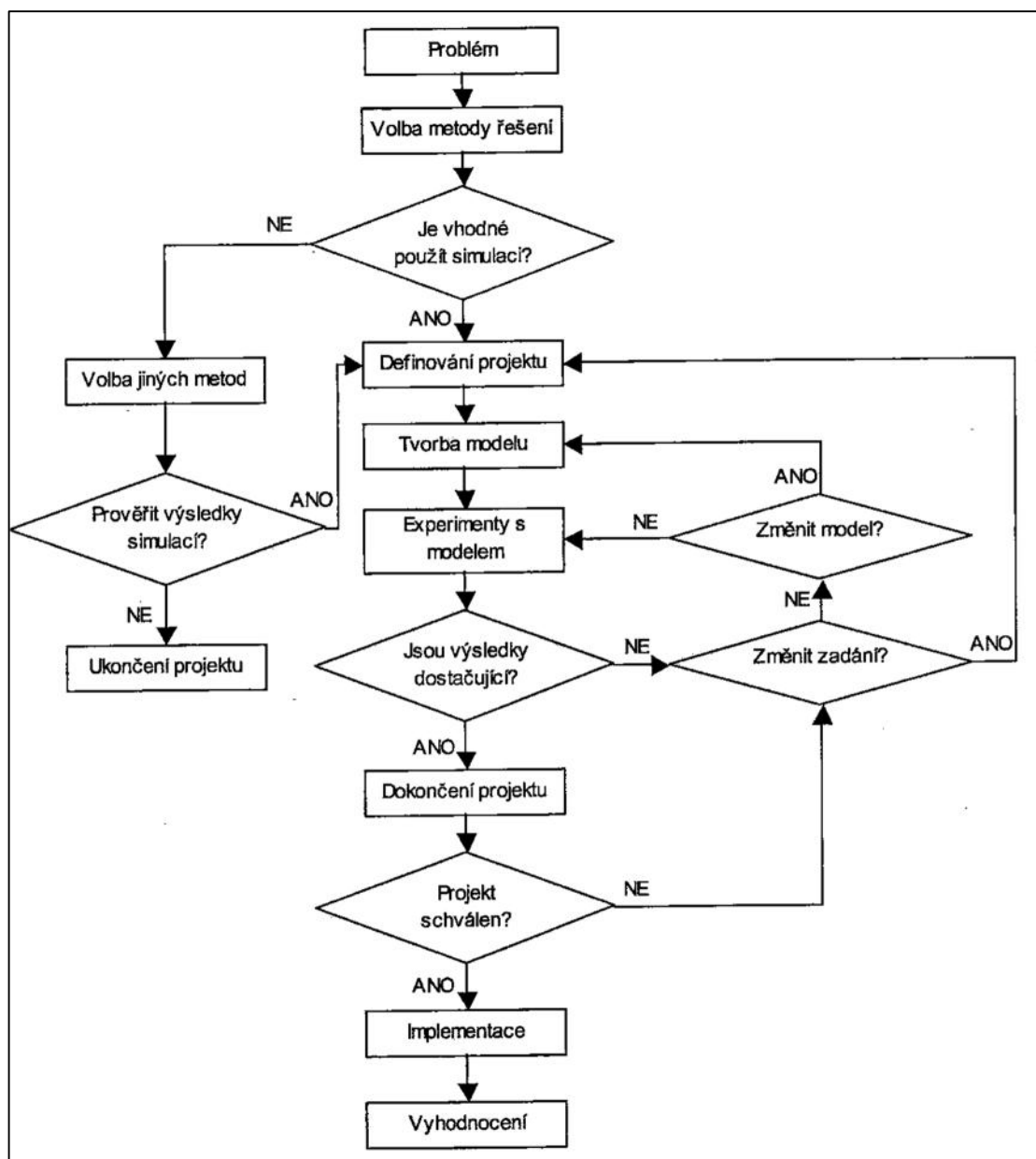
1.1.1 Simulační projekt

Celý simulační projekt není pouze spuštění simulace a interpretace výsledků, ale zahrnuje i přípravné fáze (sestrojení modelu, vyjádření charakteristik systému, zahrnutí náhodných faktorů a faktoru času) a případné aplikace na reálný systém. Houška (2009) uvádí názorné schéma postupu realizace simulačního projektu (Obrázek 1-1).

Na samotném začátku projektu je potřeba přesné a odborné zpracování zkoumaného problému, shrnutí všech dostupných informací a stanovení cílů celého experimentu. Určení cílů experimentu je velice náročné a důležité, protože ovlivňuje přesnost i podrobnost modelu a věrnost reálnému systému. Tuto první fázi často zpracovává sám zadavatel analýzy, protože odborník na simulační modely by mohl specifikaci problému sám vyhodnotit neúplně nebo chybně. Je dobré po celou dobu spolupracovat a konzultovat průběh příprav i průběžné výsledky experimentu se zadavateli. Sám specialista na simulační modely potom vybere nejvhodnější metodu simulace pokusu, kterou reálný systém namodeluje.

Před spuštěním simulace se ještě odhadne efektivnost a náklady (časové, technologické i finanční) potřebné pro realizaci simulace. Poté přichází

naprogramování v příslušném softwaru a po přípravě vstupních dat se experiment spustí. Jakmile kompletně proběhne celá simulace a výpočet požadovaných údajů (může trvat řádově několik minut, hodin nebo i dní) přichází na řadu hodnocení průběhu i výsledků simulace. Součástí hodnocení je tzv. verifikace modelu, během které ověřujeme vhodnost použitého modelu i metody jeho řešení (bude popsáno v kapitole 1.1.5).



Obrázek 1-1 Schéma simulačního projektu

1.1.2 Statistické simulační modely

Statistickým modelováním se rozumí zobrazování systémů s náhodnými prvky (v dnešní době zpravidla pomocí počítače), které se mění v čase. Jejich podstatou je vytvoření algoritmu, kterým bude zkoumaný proces modelován. Díky využití statistických softwarů se může zahrnout do modelu více proměnných a to jak se spojitou, tak s diskretní distribuční funkcí. Může je ovlivňovat také větší množství náhodných faktorů. V modelech definované a zahrnuté faktory se specifikují pevnými hodnotami parametrů systému a jejich distribučními funkcemi. Opakovanou simulací systému s různými parametry se získávají obecné charakteristiky, na jejichž základě můžeme popsat modelovanou realitu.

1.1.3 Příprava simulačního modelu²

Definování modelu začíná stanovením proměnných a parametrů modelu, jejich vlastností, chování, funkcí a závislostí s ostatními prvky systému. Houška (2009, str. 30) rozlišuje v simulačních modelech:

- vstupní proměnné
- stavové proměnné
- parametry modelu
- výstupní proměnné

Pro vstupní proměnné, které si sami určujeme (jejich obměnami zkoumáme reakce systému) se často používá označení říditelné. Oproti tomu neříditelné vstupní proměnné většinou specifikujeme jako konstanty a můžeme je měnit jen před opakováním celého experimentu (např. výše daní – změny nelze předvídat a nemá cenu se o to ani pokoušet). Posledním typem vstupních proměnných jsou ty, které ovlivnit také nemůžeme, ale mají náhodný pravděpodobnostní charakter. Hodnoty těchto proměnných během pokusu

² Podkapitola vychází z metodiky tvorby simulačního modelu, kterou uvádí Houška (2009, str. 29 a následující)

generujeme (při počítačové simulaci vhodnými generátory náhodných resp. pseudonáhodných čísel – viz kapitola 1.2).

„Stav systému v jednotlivých časových okamžicích je charakterizován stavovými proměnnými.“ (Houška, 2009 str. 30)

„Parametry modelu většinou popisují výchozí pozici systému a během experimentu se nemění.“ (Houška, 2009 str. 30)

Pro výstupní proměnné je nejdůležitější správně nastavená závislost na vstupních proměnných pro různé hodnoty parametrů. Měly by být definovány tak, aby dobře popisovaly úroveň dosažení stanovených cílů.

Přípravná fáze projektu se mnohdy podceňuje, ale správná a důkladná příprava usnadní všechny další kroky. Musí se promyslet, jestli se vůbec realizování simulace vyplatí a jestli náklady na ni nejsou vyšší než možné zisky resp. ušetřené náklady aplikace modelu v reálném systému. Při zjištění, že simulace je přínosná, přichází po získání výstupů jejich kontrola a verifikace celého modelu.

1.1.4 Základní prvky simulačních modelů³

Modely se skládají z více různých druhů prvků. Základní z nich budou popsány v této podkapitole. Deterministické základní prvky jsou ty, kterým přiřadíme na začátku simulace konstantní hodnoty, a které se dále nemění. Opakem jsou prvky stochastické, které představují náhodné veličiny různých typů a jejich hodnoty se generují na základě pravděpodobnostních zákonitostí stanovených na základě napozorovaných historických údajů daného faktoru. Tím, že se v simulaci realizace pokusu mnohokrát opakuje a pro každý pokus je generovaná nová hodnota všech stochastických prvků, dostávají tyto proměnné náhodný charakter (respektive pseudonáhodný – viz kapitola o generování náhodných čísel) a modelují tak náhodnou veličinu.

Faktor času, který může ovlivňovat chování některých proměnných a tím chování celého systému, je reprezentován tzv. dynamickým (časovým) prvkem.

³ Podkapitola vychází z Houšky, 2009, str. 12-15

Simulovaný čas má podobně jako ostatní proměnné buď diskrétní, nebo spojitý charakter. V případě diskrétní simulace se pohybujeme v určitých časových krocích bez ohledu na to, ve kterém okamžiku časového intervalu událost nastala.

Následující časový okamžik je potom definován podle Houšky (2009, str. 13) takto:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (1.1)$$

kde t_i je i -tý časový okamžik a Δt je délka časového intervalu mezi jednotlivými kroky.

U spojitě simulace na délce intervalu záleží. Tyto délky bývají generovány. V takovém případě uvádí předpis přechodu do dalšího časového okamžiku následujícím způsobem:

$$t_{i+1} = t_i + GEN(\Delta t_i) \quad (1.2)$$

Označení je stejné jako u diskrétního charakteru časové proměnné. Přibyla zkratka *GEN*, která představuje předpis generované hodnoty proměnné v závorce – tedy velikosti i -tého kroku mezi časovými okamžiky.

Poslední ze základních prvků je příznak. Příznakem v modelu nazýváme prvek, který slouží k budoucímu větvení chování systému (pronikne/nepronikne částice překážkou atp.) a má pouze hodnoty pravda nebo nepravda.

1.1.5 Verifikace a realizace simulačního modelu⁴

Velmi užitečné pro správné nastavení modelu je jeho testování na historických datech. Nastavíme model tak, aby nám simuloval období, ke kterému máme historická data o skutečném vývoji a výsledky experimentu s reálnými daty porovnáme. Na první pohled to může působit jako ztráta času, nicméně takový pokus může pomoci ke zdokonalení modelu, nalezení chyb a nepřesností nebo k jeho úplnému zavrnutí. Takové zjištění následně může ušetřit mnohé úsilí a často i nemalé prostředky, které bychom na další výzkum a případnou realizaci simulace vynaložili.

⁴ Popis ověřování a realizace simulačních modelů vychází z Houšky (2009, str. 31)

V případě, že historická data nejsou k dispozici (nejčastěji při řešení a vytváření dosud neznámých modelů), lze výsledky porovnávat s podobnými modely. Pokud žádný podobný model nenalezneme nebo vůbec neexistuje, tak se hledá alespoň minimální rizikovost chyby modelu.

Experiment je dobré opakovat s různými vstupními hodnotami a parametry, aby byly vidět měnící se výsledky simulace. Získané výsledky se pro různé hodnoty uchovávají a dokumentují, případně se mohou dále zpracovávat. Počet opakování experimentu se stanovuje při přípravě modelu spolu s požadovanou přesností a spolehlivostí výsledků celého experimentu. Když se dále pokračuje, tak například za použití metody Monte Carlo, která vyžaduje velké množství opakování, a která pracuje se všemi dílčími i závěrečnými výstupy.

1.1.6 Využití simulačních modelů

Díky simulacím lze modelovat různé projekty, aniž by se musely skutečně realizovat a mnohdy se tak ušetří čas i prostředky, které by taková realizace stála. Simulační modely se dělí na diskrétní a spojité podle způsobu modelování procesů spojitými nebo diskrétními proměnnými. Spojité proměnné nabývají hodnot v určitých intervalech a diskrétní nabývají pouze předem stanovených hodnot.

Houška (2009, str. 47) na závěr shrnuje, že simulačních modely se využívají pro ověřování nových projektů, přestaveb starých systémů, či jejich rozšiřování a pro předpovědi vývoje známých systémů. Simulují se modely optimalizující teorie hromadné obsluhy, systémy obnov a zásob, zlepšování logistických koncepcí, analýzy výrobních systémů a obchodní procesy. Pro simulace se dají používat různé dostupné a víceúčelové tabulkové procesory, ale pro sofistikovanější modely je dobré používat software, který se přímo simulacemi zabývá. Statistických a ekonometrických programů je celá řada a stále přibývají, zdokonalují se a rozšiřují se jejich možnosti.

1.1.7 Výhody a nevýhody simulačních modelů⁵

Simulace mají mnohé výhody, ale stejně jako u jiných vědeckých metod i u simulací se dá najít spousta nedostatků. Mezi výhody patří nesporně již zmíněná možnost řešit i analyticky neřešitelné úlohy například díky možnému zavedení dynamických proměnných nebo zapojení závislosti modelu na časové proměnné. Simulace často usnadňuje řešení i těch úloh, při jejichž řešení se analytické nástroje zpravidla používají. Umožňují (například při řízení rizika pomocí míry Value at Risk, kterou se zabývá praktická část této práce) získat standardizované výsledky a později srovnávat vypočtené hodnoty pro různá časová období a prostorová umístění. Tvorba simulačních modelů nás nutí zamyslet se nad zkoumaným systémem a uvědomit si všechny faktory, které systémem ovlivňují.

Nevýhodou simulačního modelu je hned jeho podstata, tedy že je zjednodušeným obrazem reálného systému. V případě opomenutí důležitého faktoru se celý model stává bezvýznamným a více zkresleným než je vhodné. Simulační model je často využíváný k předpovědím a predikcím budoucího vývoje či průběhu daného procesu. Odhadovaný vývoj ale počítá s podobným a relativně vyrovnaným průběhem po celou zkoumanou dobu a jakékoli extrémní změny oproti historickému vývoji nebo předpokladům znehodnocují získané odhady. Zejména při využití simulačních modelů v bankovníctví a finančnictví se stává velkou nevýhodou snadné manipulování s nastavením modelu (záměrné užití nesprávné metody, úprava parametrů), popřípadě s interpretací výsledků. Simulační modely mají také nevýhodu v tom, že ten kdo je používá, musí mít určité znalosti nejen z oboru, kterého se problém týká. Je nutný i určitý přehled v oblastech matematiky, informatiky a statistiky.

Mnohé nevýhody lze v průběhu realizace simulace eliminovat a vzhledem k mnohým kladům se těší simulační metody velkému zájmu a využití napříč spektrem nejrozličnějších vědeckých disciplín.

⁵ Porovnání silných a slabých stránek simulačních modelů vychází z článku I. Páholka (2008, str. 14 a následující).

1.1.8 Určení optimálního počtu opakování pokusu

Na závěr charakteristiky simulačních modelů se ještě nabízí otázka, jak určit optimální počet opakování experimentu. Vzhledem ke splnění statistické významnosti výsledků musí být počet dostatečný, ovšem neznamená to, že pro jistotu se nechá vygenerovat desetitisíce pokusů – tzv. „lepší více, než méně“. Takový postup je dost nezodpovědný, a proto se volí optimální počet jak pro zachování významnosti výsledků, tak pro přehlednost modelu. Existují dvě základní možnosti určení počtu opakování.

První je zahrnutí podmínky do modelu na opakování simulace tak dlouho, dokud nebude dosaženo požadované přesnosti výsledků d definované například takto podle Houšky (2009, str. 40):

$$d \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}; k-1} * \frac{s}{\sqrt{k}} \quad (1.3)$$

Uvedený vztah je odvozen ze vzorce pro intervalový odhad, kde $t_{1-\frac{\alpha}{2}; k-1}$ je hodnota Studentova t-rozdělení pro hladinu významnosti $(1-\alpha)$ a $(k-1)$ stupňů volnosti, s je výběrová směrodatná odchylka a k je počet opakování simulačního experimentu.

Druhá a více používaná možnost je přímé odhadnutí počtu opakování, které provádíme předem. Po úpravě předchozího vztahu dostáváme odhad pro k opakování:

$$k \geq \frac{t^2 s^2}{d^2} \quad (1.4)$$

Druhý způsob je praktičtější, protože se předem ví, na kolik opakování simulaci nastavit, což je jednodušší a lze hodnotu zaokrouhlit na nejbližší větší číslo při zachování přesnosti výsledků.

Použití podmínky v modelu pro jeho opakování dokud není dosaženo požadované přesnosti, nám model zastaví na jakékoli hodnotě (např. 9989). Takový počet je pro interpretaci horší a ani takové číslo nevypadá příliš profesionálně.

Zatímco když se vypočítá před spuštěním simulace, že pro požadovanou přesnost je třeba minimální počet opakování (například zmíněných 9989), lze jej zaokrouhlit (v našem případě na 10000). Kvalita výstupů se takovou úpravou nesníží, naopak s každým dalším opakováním se přesnost statistických odhadů zvyšuje.

1.2 Generátory náhodných a pseudonáhodných čísel⁶

Vzhledem k tomu, že simulační metoda Monte Carlo a jiné stochastické metody potřebují pracovat s náhodnými čísly, používá se pro její realizaci různých generátorů náhodných čísel. Při prvním praktickém využití metody Monte Carlo, které bude v kapitole o historii metody popsáno, byla jako generátor použita kola rulety.

Tím, že v dnešní době jsou stochastické metody realizovány zpravidla jako počítačové simulace, používají se pro jednotlivé pokusy generátory náhodných čísel, které jsou označovány spíše jako generátory tzv. pseudonáhodných čísel. Je to proto, že součástí softwaru, který k simulaci používáme, bývají nejrůznější funkce a možnosti, jak si nechat náhodná čísla „vyrobit“ samotným programem. Jelikož algoritmy těchto funkcí pracují na základě určitých vzorců a jejich náhodnost není dokonalá, čehož si můžeme všimnout při vygenerování velkého množství dvojic náhodných čísel a jejich zakreslení do grafu (viz obrázek 1-2 vpravo), používá se označení pseudonáhodná.

1.2.1 Princip generování náhodných čísel

Pro potřeby modelování stochastických procesů je potřeba nějakým způsobem získat posloupnost čísel, která by měla náhodný charakter. Vzhledem k tomu, že využíváme již předpřipravené nástroje počítačových programů, se nám může zdát, že to pro nás není žádná komplikace. Ač jde o nezbytnou a nejpodstatnější část simulace, tak pouhými několika málo příkazy tyto přednastavené generátory do modelu zahrneme a více se tím zabývat

⁶ Problematikou generování náhodných čísel se zabývá například Virius (2010, str. 57-72)

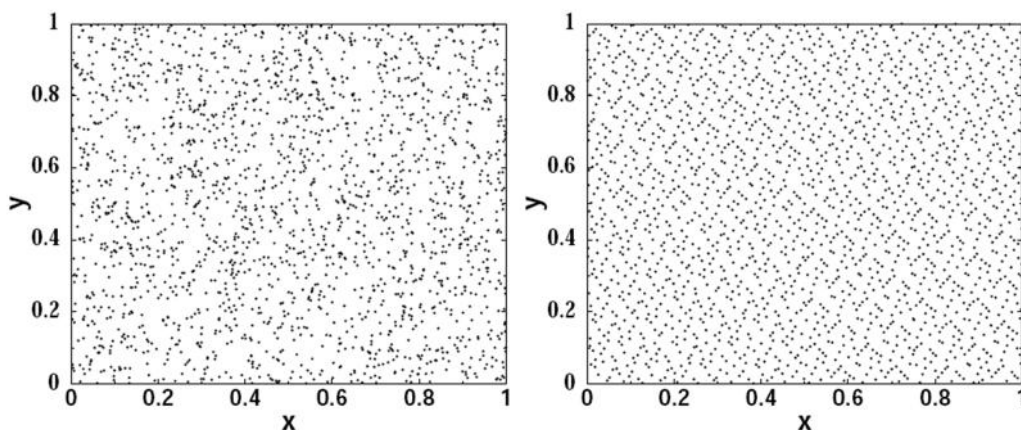
nemusíme. Nejpodstatnější část simulace je to proto, že nám umožňuje pracovat s proměnnými náhodného charakteru a stochastický model vyzkoušet. Jak tedy takové generátory fungují? Houška (2009, str. 16) uvádí:

„Náhodná čísla obecně definujeme jako nezávislé hodnoty rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$.“

Posloupnost takovýchto náhodných čísel je založena na tom, že libovolné číslo z ní není závislé na hodnotě žádného z předchozích ani následujících čísel. Náhodná čísla získaná tímto způsobem v modelu nahrazují náhodné veličiny, a proto se pro ně používá výraz pseudonáhodné veličiny a pro jejich hodnoty podobně používáme označení pseudonáhodná čísla.

Označení „pseudonáhodná“ znamená, že tato čísla už statisticky úplně nezávislá nejsou, ale periodicitu, se kterou se závislost projevuje, je dostatečně dlouhá. Z obrázku porovnání grafického znázornění generovaných dvojic čísel (obrázek 1-2) je zřejmá závislost pseudonáhodných hodnot, která se projevuje až při rozsáhlejší generování (minimálně desetitisíce hodnot).

Na obrázku (vpravo) je patrná periodicitu tvořené posloupnosti a určitá opakujiící se pravidelnost oproti obrázku náhodných čísel (vlevo).



Obrázek 1-2 Porovnání náhodných a pseudonáhodných vygenerovaných dvojic čísel

Přes zjevnou nedokonalost, pseudonáhodná čísla splňují většinu požadavků, které na ně v modelu klademe – jejich rychlé vygenerování,

náhodnost blížící se dokonale náhodným číslům (získaným například točením rulety) a stabilní statistické vlastnosti.

1.2.2 Nejčastěji používané zdroje pseudonáhodných čísel

Zdrojů náhodných respektive pseudonáhodných čísel je celá řada. Prvním z těch více používaných jsou tabulky náhodných čísel, které bývají vytvořeny buď jednoúčelově pro konkrétní situaci, nebo obecné tabulky, kterých byla vytvořena celá řada, a které obsahují různé množství náhodných čísel. Hodnoty z náhodných tabulek se načítají popořadě a používají se hlavně pro výpočty menšího rozsahu. Tento zdroj náhodných čísel je využíván pro jeho rychlou a jednoduchou použitelnost. Příklad a popis použití tabulky náhodných čísel je v příloze 1.

Pro složitější a náročnější výpočty se používají fyzikální zařízení, která technicky spojují fyzikální generátory náhodných čísel s počítačem. Technická část pracuje většinou s analogovým zařízením počítače (např. s myší), které zaznamenává určité elektrické veličiny s náhodným charakterem (pohyby myši...).

Fyzikální generátory jsou nákladné a dosti komplikované, proto se mnohem častěji pracuje s matematickými generátory náhodných čísel, jejichž princip spočívá ve speciálních matematických algoritmech využívajících rekursivní funkce (nově generované číslo je určitým způsobem odvozeno od všech předchozích z té samé posloupnosti).

Houška (2009, str. 17) zmíněnou rekursivní funkci uvádí ve tvaru:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m}) \text{ pro } m \geq 0 \quad (1.5)$$

Předpis tedy říká, že hodnota x_{n+1} je funkcí $m+1$ předchozích hodnot⁷.

⁷ Příklad konkrétních funkcí popisuje Houška (2009, str.17)

Všechny zde uvedené generátory nám poskytují čísla z intervalu (0,1), a tak se musí ještě po vygenerování transformovat na náhodnou veličinu s požadovaným rozdělením a v požadovaném intervalu⁸.

Někdy se také využívají jako zdroj náhodných čísel cifry Ludolfova čísla π . Perioda opakování cifer se asymptoticky rovná 10^{-k} ($k \in \mathbb{N}$), čímž se Ludolfovo číslo řadí mezi tzv. normální čísla. Více k využití Ludolfova čísla jako zdroje náhodných čísel popisuje například Nezbeda a spol (2003).

Příklad prvních několika set členů desetinného rozvoje čísla π , které se používají jako zdrojová tabulka náhodných čísel:

3,1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944
5923078164	0628620899	8628034825	3421170679	8214808651	3282306647
0938446095	5058223172	5359408128	4811174502	8410270193	8521105559
6446229489	5493038196	4428810975	6659334461	2847564823	3786783165
2712019091	4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436	7892590360
0113305305	4882046652	1384146951	9415116094	3305727036	5759591953
0921861173	8193261179	3105118548	0744623799	6274956735	1885752724
8912279381	8301194912	9833673362	4406566430	8602139494	6395224737
1907021798	6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872	1468440901
2249534301	4654958537	1050792279	6892589235	4201995611	2129021960
8640344181	5981362977	4771309960	5187072113	4999999837	2978049951
0597317328	1609631859	5024459455	3469083026	4252230825	33446850...

Obrázek 1-3 Ludolfovo číslo

1.2.1 Ověřování náhodnosti generovaných čísel⁹

Ačkoli generátory počítačových programů jsou jistě mnohokrát testovány a kontrolovány, je třeba ověřit náhodnost vygenerované posloupnosti čísel. Ověřuje se pomocí statistických testů, zda jsou čísla skutečně náhodná a rovnoměrně rozložena na intervalu (0,1). Žádný z testů neposkytuje úplnou

⁸ Více o transformaci generovaných náhodných čísel například Houška (2009, str. 20-26)

⁹ Vychází z Viriuse (2010, str. 62-66)

jistotu, a proto je dobré jich použít více. Používají se testy autokorelace hodnot, frekvenční testy nebo tzv. poker testy.

Nebezpečí autokorelace hodnot spočívá v porušení nezávislosti po sobě jdoucích prvků posloupnosti vygenerovaných čísel. Testuje se shoda rozdělení hodnot s normálním rozdělením pomocí chí-kvadrát testu dobré shody, nebo se také používá test Kolmogorův-Smirnov¹⁰. Frekvenční test ověřuje rovnoměrnost rozdělení hodnot s nulovou hypotézou předpokládající shodu skutečných a očekávaných četností v různých částech intervalu (0,1) za použití chí-kvadrát testu dobré shody. Poslední z uvedených příkladů testování náhodnosti čísel, poker testy, spočívá v porovnávání četnosti výskytů různých vygenerovaných číselic v náhodných číslech (např. pětimístných¹¹) s pravděpodobností výskytu jejich jednotlivých kombinací.

¹⁰ Více o tomto testu například Lopes a kolektiv (2007)

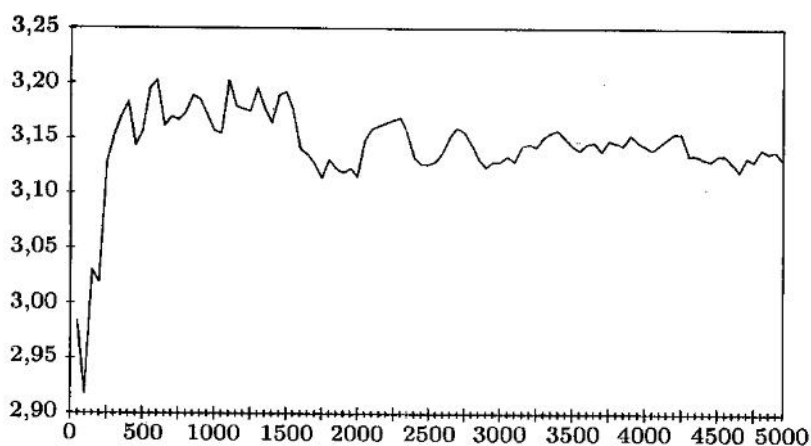
¹¹ Označení „poker“ test právě vzhledem k podobnosti karetní hry s testováním četnosti pětimístných čísel.

2. Metoda Monte Carlo

Simulační modely se dělí na deterministické a stochastické. Deterministické pracují bez zavedení náhodných jevů do systému, zatímco stochastické ano. Metoda Monte Carlo je jedním z nejtýpčtějších příkladů zpracování stochastického simulačního modelu a zakládá se právě na zavedení náhodných faktorů. Proměnné, které jsou faktorem náhody ovlivňovány, jsou specifikovány svými pravděpodobnostními charakteristikami, které se získávají analytickou cestou. Stručná ale velice výstižná definice například zní:

„Metodou Monte Carlo rozumíme numerické řešení úloh pomocí mnohokrát opakovaných náhodných pokusů.“ (Houška, 2009 str. 9)

Právě mnohonásobné opakování náhodných pokusů je hlavním pilířem této simulační metody. Jednotlivé dílčí pokusy o zkoumaném systému nic zajímavého neřeknou a až vícenásobná realizace experimentu díky pravděpodobnostnímu charakteru výsledků simulace ustaluje hodnoty číselných hodnot výběrových průměrů ke středním hodnotám a relativních četností k pravděpodobnostem. Na obrázku 2-1 je znázorněné zpřesňování odhadu Ludolfova čísla π se zvyšujícím se počtem opakování experimentu.



Obrázek 2-1 Závislost výpočtu Ludolfova čísla na počtu opakování
(osa x - počet opakování, osa y - Ludolfovo číslo)

Tím, že náhodné jevy ovlivňují každou realizaci, tak se zvětšujícím se počtem opakování pokusu se hodnoty zpřesňují a jejich nepřesnosti se zmenšují. Výsledkem modelu jsou statistické odhady – bodové nebo intervalové – s určitou mírou spolehlivosti.

2.1 Historie metody Monte Carlo¹²

V historickém vývoji matematiky zauímají důležité místo počty s pravděpodobnostmi. Pravděpodobnostmi jevů rozumíme relativní vyjádření počtu výskytů daných jevů. K jejich využití vždy patřilo předpovídání a predikování v nejrůznějších oblastech a oborech, ve kterých se musí více či méně počítat s faktorem náhody. Také se dá říci, že s pravděpodobností výskytu nejrůznějších jevů je spojeno riziko výskytu jevů nežádoucích respektive jevů, které žádoucí jsou. Náhoda představuje faktor, který ovlivňuje výskyt daných jevů a který nelze ovlivnit. Jak ale pracovat s něčím co nemůžeme ovlivnit a co se chová dokonale náhodně?

Už dříve se snažili lidé například při hře v kostky vypočítat nějakou zákonitost nebo pravidlo v tom, které číslo kolikrát padne. První příklady jakési simulace spočívaly v tom, že někdo házel kostkou nebo mincí a počítal, na kterou stěnu kostka (resp. mince) kolikrát padne. Zjistili, že po deseti nebo stovce hodů (tedy po malém počtu pokusů) se jejich výsledky liší s každým novým opakováním celého experimentu. Všimli si ale, že četnosti výskytu dílčích jevů kolísají kolem určitých hodnot. Dospěli tak k tomu, že se zvyšujícím se počtem pokusů se tyto četnosti přiblíží určitým konkrétním hodnotám a vychýlení od nich bude zřejmě čím dál menší. Kdyby počet pokusů zvyšovali stále dál (teoreticky až do nekonečna), četnost by se ustálila na jedné hodnotě a to na té, která vzhledem k celkovému počtu pokusů vyjadřuje relativní četnost jevu – tedy pravděpodobnost jeho výskytu.

V tabulce 1-1 je relativní vyjádření četností jednotlivých hodnot, které padly při házení kostkou, pro tři různé počty opakování pokusu. Je patrné, že pro

¹² Kapitola vychází z Fabiana a Kluibery (1998)

zvyšující se počet hodů se blíží relativní četnosti skutečné pravděpodobnosti padnutí kteréhokoli čísla – $1/6$.

Tabulka 1 Výsledky hodu kostkou (zdroj: vlastní zpracování „hodu kostkou“ pomocí MS Excel)

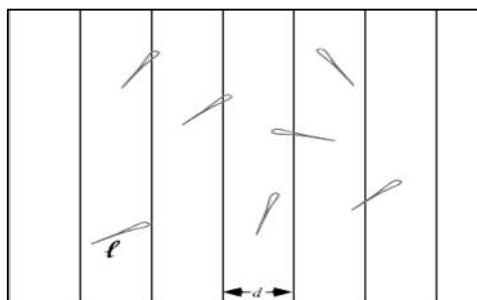
HODY/HODNOTA	1	2	3	4	5	6
500	13%	14%	18%	18%	19%	17%
1000	16%	16%	19%	15%	17%	17%
5000	16%	17%	17%	17%	17%	16%

Z popsaného jednoduchého experimentu hodu kostkou je patrné, že takovýto postup pro složitější úlohy je poměrně nepraktický, časově velice náročný a nejednoho badatele by mohl odradit od jeho dokončení.

Přesto pro názornost postupu bude detailně popsáno, jak takové ruční počítání probíhalo (konkrétně při výpočtu Ludolfova čísla π v kapitole 2.1.2).

2.1.1 Buffonova jehla¹³

Jedná se o slavnou matematickou úlohu, která je považována za jedno z nejstarších praktických využití metody Monte Carlo, i když v té době tento název samozřejmě ještě vůbec neexistoval. Název vznikl podle francouzského matematika, který se jmenoval Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon a který se pokoušel v roce 1777 odhadnout hodnotu Ludolfova čísla π ¹⁴ opakovaným házením jehly na linkovaný papír, jehož rovnoběžné linky byly od sebe všechny vzdáleny stejně a délka jehly se této vzdálenosti také rovnala nebo byla menší. Příklad několika málo opakování pokusu je znázorněn na obrázku 2-2.



Obrázek 2-2 Buffonova jehla

¹³ Podkapitola o Buffonově úloze vychází z Fabiana a Kluibery (1998, str. 77-80)

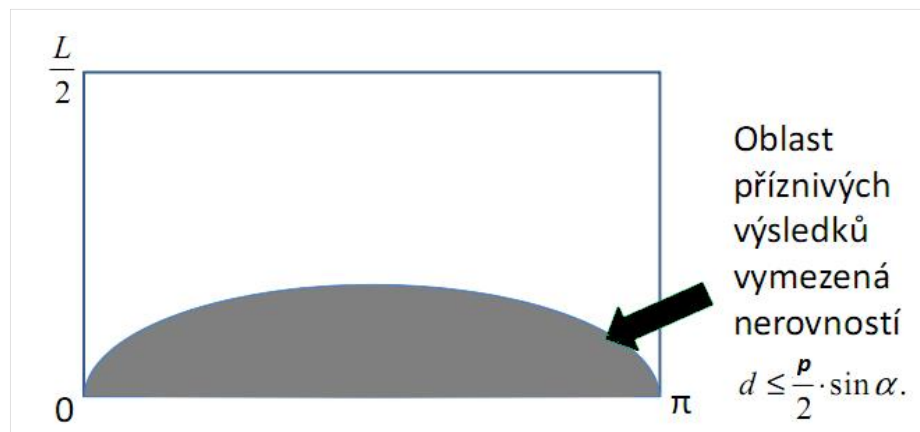
¹⁴ Více o historii a podstatě Ludolfova čísla π popisuje Beckmann (1998)

Uvažujme, že rovnoběžné linky jsou rovnoběžné s osou x , jejich vzdálenost označme L a délka jehly je p . Zaujímá nás s jakou pravděpodobností jehla kratší, než jsou velikosti mezer mezi přímkami, protne některou z nich. Vzdálenost středu jehly od nejbližší linky označíme d a úhel, který svírají α . Poloha jehly je určena souřadnicemi bodu $[d, \alpha]$:

$$\left[0 \leq d \leq \frac{L}{2}; 0 \leq \alpha \leq \pi\right] \quad (2.1)$$

Jehla protne některou z linek, pokud bude platit:

$$d \leq \frac{p}{2} \cdot \sin \alpha \quad (2.2)$$



Obrázek 2-3 Hustota pravděpodobnosti protnutí některé linky

Na základě geometrické definice pravděpodobnosti¹⁵ vyjádříme pravděpodobnost protnutí některé z linek jehlou jako:

$$P = \frac{\int_0^\pi \frac{p}{2} \cdot \sin \alpha \, d\alpha}{\frac{L}{2} \cdot \pi} = \frac{\frac{p}{2} \cdot [-\cos \alpha]_0^\pi}{\frac{L}{2} \cdot \pi} = \frac{\frac{p}{2} \cdot (1+1)}{\frac{L}{2} \cdot \pi} = \frac{2p}{L \cdot \pi}. \quad (2.3)$$

¹⁵ Více k tomuto tématu například na stránkách Univerzity Karlovy v Praze (<http://moodle.lfhk.cuni.cz/moodle2/mod/book/view.php?id=2122&chapterid=478>)

Pravděpodobnost P můžeme odhadnout z empiricky získaných dat metodou Monte Carlo (M – počet jehel protínajících linky, N – počet všech náhodně hozených jehel):

$$P = \frac{M}{N} \quad (2.4)$$

Ze vztahů 2.3 a 2.4 už je snadné odvodit vzorec pro odhad hodnoty Ludolfova čísla π :

$$\pi = \frac{2p \cdot N}{L \cdot M} \quad (2.5)$$

Při mnohonásobném opakování pokusu (čím více hodů jehlou, tím lépe) se bude hodnota π , vypočítaná z jejího vztahu k pravděpodobnosti protnutí některé linky, přibližovat skutečné hodnotě π (sám G. Buffon došel k přibližné hodnotě 3,1415).

2.1.2 Výpočet Ludolfova čísla pomocí „hrachu“

Způsob výpočtu Ludolfova čísla π pomocí Buffonovy jehly metodou Monte Carlo není jediný, proto zde bude naznačen ještě trochu názornější postup, jak se analogicky pomocí stejné metody dá hodnota π vypočítat.

Základem je čtverec s vepsanou kružnicí, na který se náhodně hází nějaký malý předmět (např. zrnka hrachu). Zaznamenává se, jestli zrnko padlo do čtverce a zároveň jestli padlo do prostoru vepsané kružnice.

Představme si tedy podložku s obrysem čtverce a jemu vepsané kružnice, na kterou jsou náhodně házena zrnka hrachu. Pro co největší jednoduchost výpočtu se předpokládá, že kružnice je jednotková ($r = 1$), čtverec má délku strany $a = 2$ a ať bude zrnko hozeno jakkoli, vždy padne do prostoru čtverce. Pravděpodobnost, že zrnko hrachu padne do prostoru kružnice je dána poměrem ploch jednotkové kružnice a čtverce. Celý postup odvození Ludolfova čísla z uvedeného vztahu by se dal rozepsat následujícím způsobem:

Povrch čtverce: $S_1 = a^2 = 4 \quad (2.6)$

Povrch kružnice: $S_2 = \pi r^2 = \pi \quad (2.7)$

Pravděpodobnost dopadu zrnka do kružnice se rovná poměru povrchu kružnice a čtverce:

$$P(\text{dopad zrnka do kružnice}) = \pi/4 \quad (2.8)$$

Pravděpodobnost dopadu zrnka do kružnice se odhadne z poměru zrněk, která během realizace pokusu padla do prostoru kružnice a všech zrněk ve čtverci (tedy relativní četnosti zrněk v kružnici):

$$P = M/N \quad (2.9)$$

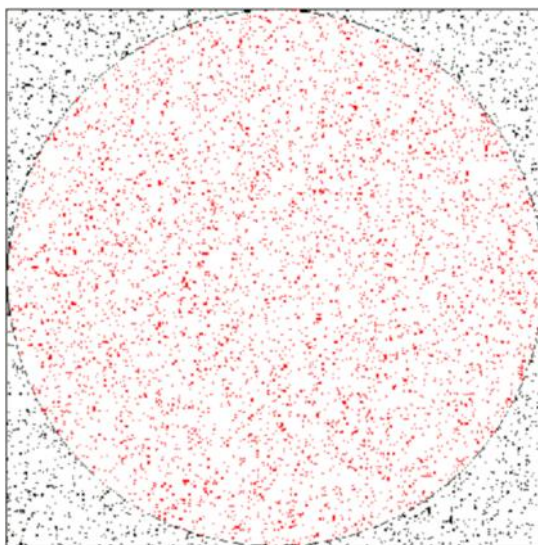
Vyjádřením π ze vztahu (2.8), když se vypočítá pravděpodobnost po dosazení získaných četností do vzorce (2.9), lze Ludolfovo číslo π vyjádřit jako:

$$\pi = P * 4 \quad (2.10)$$

Použitá označení:

S_1 – povrch čtverce, S_2 – povrch kružnice, a – délka strany čtverce, r – poloměr kružnice, P – pravděpodobnost jevu uvedeného v závorce, M – počet zrněk v kružnici, N – počet zrněk ve čtverci (celkový počet zrněk při předpokladu, že žádné nedopadlo mimo vymezenou plochu čtverce).

Výsledný poměr všech zrněk ve čtverci a zrněk uvnitř kružnice vynásobený čtyřmi tedy dává hodnotu čísla π . Příklad výsledného rozložení hrachu na podložce je znázorněn na obrázku 2-4.



Obrázek 2-4 Možné rozložení zrněk hrachu

2.1.3 Původ názvu metody - Monte Carlo

Postup řešení, kdy se zjišťují četnosti výskytu jevů tím, že se provádí velký počet stejných pokusů a z jejich výsledků potom vyvozujeme nějaké závěry, už je určitým druhem simulace. Tato simulace může být nazvána „*simulací historie života*“ (Fabian, a další, 1998 stránky 13-14). Toto označení je dost výstižné, protože z něj je patrné, jak simulace probíhá – simulujeme budoucí průběh jevu, který je pak zpětně analyzován a popisován prostředky popisné a matematické statistiky. Jak tedy vznikl na první pohled nelogický název, v němž je název města, které je spojováno s hazardem? Samotné označení vzniklo právě díky asociaci metody s hazardními hrami.

„Vědečtí pracovníci John von Neumann a Stanislaw Ulam ze Spojených států amerických zkoumali v období druhé světové války chování neutronů a možnosti jejich pronikání různými látkami. Narazili na problém, jak určit procento neutronů v určité spršce, která pronikne například nádrží vody určitých rozměrů“ (Fabian, a další, 1998 str. 13).

Znali nejrozumnější údaje k jednotlivým prvkům (průměrné ztráty energie neutronu při srážce s jiným neutronem apod.) a přesto nedokázali nijak predikovat budoucí chování neutronu a třeba již zmiňovanou pravděpodobnost průniku překážkou. Zaměřili se tedy na teoretické modelování celého problému a využili analogických pravděpodobností s kolem rulety. Ačkoli popis fyzikálního využití metody Monte Carlo se zaměřením této práce příliš nespojuje, náznak řešení jejich problému s chováním neutronu, jak jej popisují Fabian a Kluiber (1998, str. 14) je uveden kvůli souvislosti se vznikem názvu metody.

„Pomocí této metody (metody historie života – pozn. autora práce) bylo možné předpovědět trajektorii každého neutronu daného svazku. Simulace pohybu neutronů „putujících“ ve vodě a náhodně se srážejících s atomy vodíku a kyslíku vypadala následovně: je například známo, že náhodný jev – neutron při srážce s atomem vodíku bude tímto atomem pohlcen – nastane průměrně

v jednom ze sta možných případů. Pro vytyčení trasy pohybu neutronu se roztočí kolo rulety rozdělené na sto dílků, z nichž pouze jeden je odlišně vyznačený a označuje „pohlcení neutronu atomem vodíku“. Jestliže se kolo rulety zastaví právě na tomto dílku, označuje „konec života“ neutronu. V opačném případě se zjistí pomocí jiného kola rulety směr a rychlost neutronu po srážce. Potom pomocí dalšího kola rulety se rovněž náhodně určí, jakou trajektorii proběhne neutron, než nastane další srážka buď s atomem vodíku či kyslíku, atd.“

Simulaci prováděli tak dlouho, dokud nedošli k pohlcení neutronu nebo k jeho průniku nádrží s vodou. Autoři této metody následně zavedli označení metoda Monte Carlo právě díky aplikaci kol rulety, která jsou pro toto monacké město tolik typická.

2.1.4 Šíření aplikace metody Monte Carlo

Je zřejmé, že náročnost celého výše popsaného problému je veliká a simulace vyžaduje obrovské množství neutronů (řádově desítky až statisíce), pro které se provádí. Takováto simulace teoreticky k výsledku vede, ale její ruční provedení, zapisování výsledků a konečné hodnocení by stálo nemalé úsilí a čas.

Simulační metoda Monte Carlo byla původně vymyšlena a sloužila fyzikům ke zkoumání systémů částic (viz kapitola 3.1), nicméně brzy našla své uplatnění i v ekonomii, biologii nebo třeba v ekonometrii (řešení optimalizačních úloh).

Velký pokrok a zvýšení popularity této simulační metody přišel s vývojem a zdokonalováním výpočetní techniky, která umožňuje počty s pravděpodobností urychlit a řešit stále složitější modelované problémy. Počítače a jejich software umožňují nejen pracovat s velkým množstvím dat najednou mnohem rychleji a přehledněji, ale současně jsou schopné pro výpočty generovat náhodná (resp. pseudonáhodná) čísla pro zadané parametry, a tak celou simulaci Monte Carlo provést automaticky. Hlavní využití těchto technologií je právě v oblastech matematiky a tím i matematické statistiky respektive pravděpodobnosti. Právě

počty s pravděpodobnostmi umožňují předvídat a predikovat výskyty různých jevů a simulovat průběh historie života nějaké události.

2.2 Výhody a nevýhody metody¹⁶

Mezi výhody metody Monte Carlo patří v první řadě možnost zahrnout do modelu více náhodných proměnných, které se mohou případně měnit v závislosti na čase, mohou podléhat různým náhodným rušivým vlivům nebo mohou být propojeny s jinými dílčími modely. Jednoduchost použití této metody ve srovnání s významem jejích výsledků dělá z této metody velice populární a využívanou možnost řešení simulačních modelů.

Nevýhodou obecně všech simulačních modelů je, že kvalita celé simulace spočívá v přesnosti a korektnosti základních předpokladů. Nejrizikovější částí je tedy samotná příprava simulačního modelu, která je založena na subjektivních rozhodnutích zadavatele. Při simulaci metodou Monte Carlo má navíc vliv to, že se jedná o metodu založenou na teorii pravděpodobnosti a dalších statistických principech, tudíž všechny získané výsledky mají vždy omezenou přesnost a spolehlivost (víc než v deterministických modelech, kde je chyba pouze důsledkem zjednodušení reálného systému). Pravděpodobnostní rozdělení proměnných, typy závislostí mezi proměnnými, důležitost vybraných a zanedbaných vlivů a samotný výběr metody zpracování nám při chybné přípravě od začátku dávají nevýznamné a chybné výstupy.

¹⁶ Kapitola shrnutí výhod a nevýhod metody Monte Carlo vychází z Poloučka (2006)

3. Využití metody Monte Carlo¹⁷

Obecně lze říci, že možnost využít metodu Monte Carlo máme všude tam, kde je možné nalézt řešení problému pomocí mnohokrát opakovaných náhodných pokusů. Možnost použití metody Monte Carlo je v mnoha různých oborech. Pracuje se s ní ve výzkumu polovodičů k modelování přenosu nabitých částic (podobně jako při zkoumání průchodu neutronů skleněnou deskou, které je popsáno v kapitole 3.1.1), při zkoumání znečištění životního prostředí nebo třeba při pátracích a záchranných činnostech (simuluje se náhodný pohyb záchranných člunů, šíření ropné skvrny atd.).

3.1 Využití ve fyzice

Zjišťování vlastností celého systému na základě velkého množství dílčích mikročástic se zabývá tzv. *statistická fyzika*¹⁸, která vlastnosti atomů a molekul zobecňuje na makroskopický systém například na vzorek kapaliny. Je to stejné jako když zjišťujeme v sociální statistice vlastnosti a údaje o „mikročástech“ (např. o jednotlivých respondentech) a z nich potom usuzujeme na vlastnosti celé společnosti. Ve fyzice se simulace metodou Monte Carlo, podobně jako simulace molekulární dynamiky, využívá k těmto pseudoexperimentům, kvůli časté neproveditelnosti reálných experimentů, vysokým nákladům na jejich realizaci nebo v neposlední řadě jejich nebezpečnosti (simulace explozí).

Ve fyzice rozlišujeme různé statistické soubory pro simulaci (ať už simulace probíhá metodou Monte Carlo nebo metodou molekulární dynamiky). Jedním z hlavních kritérií je, zda systém popisujeme klasickou nebo kvantovou mechanikou. Simulace klasických modelů je technicky i koncepčně mnohem jednodušší a navíc je možné v nich pracovat s větším rozsahem souboru než u kvantových modelů. Dále stejně jako v ostatních oblastech uplatnění simulačních metod rozdělujeme modely na diskrétní a spojitě (podle charakteru proměnných určujících souřadnice ve fyzikálním prostoru – např. v kartézské

¹⁷ Kapitola vychází zejména z Fabiana a Kluibera (1998)

¹⁸ Více k fyzikální disciplíně „statistická fyzika“ ve skriptech od Varadyho (2007)

soustavě souřadnic). Ve fyzice se navíc, například oproti simulacím v ekonomii, ještě setkáváme se závislostí efektivnosti simulace na termodynamických vlastnostech látek, čímž je náročnost těchto simulací mnohem větší a tím i jejich chybovost a možné nepřesnosti získaných výsledků.

3.1.1 Simulace průchodu neutronu deskou

Simulace průchodu neutronů skleněnou deskou je ve fyzice považována za typický příklad využití metody Monte Carlo. Je důležité co nejpřesněji charakterizovat vlastnosti neutronu (délka doletu volného neutronu, mikroskopický průřez atomu a makroskopický průřez desky)¹⁹ a až po té můžeme přistoupit k vlastnímu řešení. Například hlavní předpoklady by v tomto případě byly stejná počáteční energie všech vysílaných neutronů, pružnost jejich srážek (odrazem od desky neutron neztrácí žádnou energii) a izotropní prostředí (neboli pravděpodobnost odchýlení neutronu od různých směrů je stejná).

Jednoduše řečeno se vysílají neutrony kolmo na desku, počítáme neutrony odražené, pohlcené a ty, které deskou prošly. Výsledná pozice neutronu závisí na tom, co se s ním děje uvnitř desky, což nám simulují zavedené náhodné veličiny – pohlcení (resp. odraz) při srážce s jinou částicí a směr odrazu. Po provedení potřebného počtu opakování můžeme určit pravděpodobnosti všech tří možných výsledků pokusu, následně je interpretovat a vyvozovat závěry platné pro celý systém.

Ve fyzice se metoda Monte Carlo využívá v různých podoborech. Například v chemické fyzice se její pomocí řeší problematika sestavení rovnice modelového plynu.²⁰ V počítačové grafice se využívá tzv. metoda Quasi Monte Carlo při renderování²¹ ve 3D modelech. Slouží k vytváření odrazů světla od různých ploch, přičemž simulační metody Monte Carlo se využívá k náhodnému generování těchto odrazů.

¹⁹ Podrobná charakteristika a vysvětlení pojmů na str. 120-125 Fabiana a Kluibery (1998)

²⁰ Více v publikovaném článku Malijevského a spol. (1995)

²¹ Z anglického „rendering“. Renderování je proces v počítačové grafice, při němž ze zadaných dat vzniká cílový obraz.“

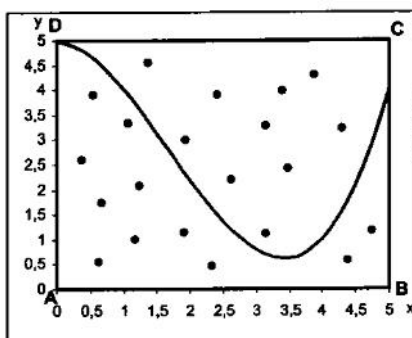
3.2 Využití v matematice²²

V oblasti „královny věd“ se dá metoda Monte Carlo využít při výpočtu určitých jednoduchých i složených integrálů, při řešení systému lineárních algebraických rovnic, při hledání kořenů rovnic nebo k řešení parciálních diferenciálních rovnic. Dále budou uvedeny některé z těchto možností využití metody v matematice.

3.2.1 Výpočet určitého integrálu

Jedním z možných využití metody Monte Carlo je výpočet určitých integrálů. Pro větší názornost a pro jednoduchost bude popsán postup výpočtu integrálu jedné proměnné.

Křivku předepsanou funkcí dané proměnné ohraničíme obdélníkem tvořeným čtyřmi body tak, aby celá křivka byla tímto obdélníkem ohraničena a aby hrany obdélníku byly rovnoběžné s osami souřadnic. Nyní budeme náhodně generovat body ležící v tomto obdélníku a až jich budeme mít dostatečné množství, vypočítáme poměr počtu bodů pod křivkou k celkovému počtu generovaných bodů (podobně jako při výpočtu Ludolfova čísla). Když vynásobíme obsah obdélníku a relativní vyjádření počtu bodů pod křivkou, dostaneme odhad hodnoty povrchu plochy části obdélníku pod křivkou a tím odhad určitého integrálu. Vygenerované hodnoty pro výpočet určitého integrálu jsou na obrázku 3-1 (počet bodů není dostatečný, jde pouze o názornou ukázkou).



Obrázek 3-1 Příklad vygenerovaných bodů při výpočtu určitého integrálu

²² Kapitola vychází z Viriuse (2010, str. 75-101), kde je podrobně popsáno využití metody Monte Carlo při výpočtu integrálů jednoduchých i vícerozměrných.

3.2.2 Řešení systému lineárních algebraických rovnic²³

Metodu Monte Carlo můžeme využít také pro vyřešení systému lineárních algebraických rovnic. Postup a průběh tohoto řešení je dobře popsán na příkladu dvou rovnic o dvou neznámých se zahrnutím podmínky jediného řešení v kapitole na to zaměřené - Virius na str. 106-115. Využití této metody se pro svoji náročnost vyplatí hlavně pro složitější soustavy s vysokým počtem proměnných. Metoda využívá při řešení soustav tzv. Markovovy řetězce²⁴ s konečným počtem stavů.

3.3 Další využití a aplikace²⁵

Jedno ze zajímavých a velice atraktivních uplatnění metody Monte Carlo je v hazardních hrách. Často v nich jde o nemalé peníze a přesto je jejich průběh pouhou souhrou náhod²⁶. Například obyčejné házení kostkou, které snadno popíšeme pomocí principů teorie pravděpodobnosti, je založeno na náhodných jevech. Přívlasek hazardní se používá, protože s hrami založenými na náhodě bývá spojeno sázení finančních prostředků na očekávané výsledky. Hra v kostky, ruleta ale i karetní hry jako poker nebo bridž se mezi tyto hry řadí.

Jediné, s čím při nich můžeme pracovat, jsou pravděpodobnostní a statistické postupy k předpovědi výsledků. Existují proto hráči, kteří zakládají své herní strategie pouze na neustálém sledování průběhu hry a průběžným přepočítáváním jejich šancí na výhru. Tento obtížný přístup vyžaduje velké soustředění, a proto se ujalo označení takových her jako hazardní²⁷. Postupem času se označení „hazardní hra“ rozšířilo na všechny hry, ve kterých je vliv náhody silně ovlivňujícím faktorem. Rozmach hazardních her v XVI. století vedl později ke zrodu a velkému vývoji teorie pravděpodobnosti jako takové.

²³ Více o Markovových řetězcích a řešení systému lineárních algebraických rovnic uvádí například Virius (2010, str. 102-138)

²⁴ Markovovy řetězce jsou řetězce stavů s Markovskou vlastností, což znamená, že budoucí hodnota nezáleží na předchozím vývoji náhodné veličiny, ale pouze na přímo předešlé hodnotě.

²⁵ Kapitola vychází z Fabiana a Kluibera (1998, str. 116-118)

²⁶ Nebereme v potaz případy, kdy majitelé heren a jiní provozovatelé s průběhem hazardních her manipulují (nevyvážené hrací kostky, pro majitele výhodné nastavení herních automatů aj).

²⁷ Z arabského slova „hazard“ = obtížný, nesnadný

3.4 Využití ve financích a pojišťovnictví²⁸

Metoda Monte Carlo nejen testuje a ověřuje teorie nebo nově vymyšlené reálné systémy, ale jedná se o oblíbený prvek i co se týká předpovědí a predikcí budoucího průběhu jevů²⁹, ke kterým existuje dostatek napozorovaných reálných dat. Ve financích se odhaduje budoucí průběh například měnového kurzu. Právě v oblasti ekonomiky pomáhá tato metoda při oceňování opcí, investic i jiných finančních derivátů a pro různá další hospodářská rozhodování. Velké uplatnění se rozvinulo v oblasti analýzy a řízení rizika, kde jsou získávané výsledky přesnější než za použití jiných metod.

Právě tzv. metoda „Value at risk“, která je při řízení rizika velice často používána, bude předmětem praktické části této práce. Hlavní výhoda a tím i důvod využití této metody spočívá v možnosti simulovat průběh různých rozhodování a porovnávat jejich výsledky. Mezi největší nevýhody naopak patří pracnost metody, nepředvídatelnost zahrnutých faktorů a riziko nezahrnutí významného nečekaného a třeba i nového faktoru.

²⁸ Kapitola vychází z Poloučka (2006)

²⁹ Typickým uplatněním metody Monte Carlo při tvorbě odhadu budoucího vývoje je (mimo jiné) při předpovídání počasí.

4. Praktická část

Banky a jiné finanční instituce pracují s mírou rizika při svých transakcích, obchodech a jiných aktivitách - banky s mnohem většími objemy aktiv a prostředků než kdokoli jiný. Právě v této oblasti se výzkumu a vývoji metod předpovídajících míru rizika dostává největší pozornosti a využití, protože jakékoli obchodování na finančních a kapitálových trzích je ziskové pouze tehdy, když je obchodník ochoten určité riziko podstoupit (jak říká české rčení „bez risku není zisku“). Banky pracují s rizikem úvěrovým, tržním, strukturálním, provozním, likvidním a mnoha dalšími, přičemž všechny pro ně mohou mít katastrofické a existenční následky.

Řízení rizik je nástroj snažící se o co nejpřesnější odhad míry rizika a jeho případné dopady. S jeho pomocí se hledají možnosti minimalizace finančních rizik. Mimo to také využívají banky tento nástroj k oceňování transakcí, do nichž vstupují nebo vstoupit chtějí. Počítání míry rizika a jeho minimalizace jsou důležité, aby transakce nemohly ohrozit samotnou existenci firmy nebo banky.

4.1 Postup řízení rizika

K určení míry rizika se používají různé charakteristiky, protože nás může zajímat náhodnost rizikových faktorů nebo jeho konkrétní vyčíslení. Pravděpodobnostní modely se tvoří do budoucnosti, přičemž vychází z historických údajů (pokud nějaké máme) a statistického odhadu dalšího vývoje. Následující popis postupu určování a řízení rizika vychází z obecného simulačního modelu (který byl popsán v první kapitole této práce).

V první řadě se musí riziko identifikovat (kde vzniká a co ovlivňuje) s následným stanovením cíle, kterého chceme dosáhnout (konkrétní zjišťovaná míra rizika, přesnost odhadu a podobně). Následně se aplikuje některá z metod měření respektive odhadu rizika. Jakmile máme riziko popsané a přibližně známé, přichází na řadu hledání způsobu jeho minimalizace a omezení. Následně zjišťujeme a zaznamenáváme skutečné riziko, které vzniklo, a porovnáváme ho s odhadnutým. To nám dodatečně umožňuje odhad zpřesňovat, popřípadě zkusit vytvořit nový odhad (nová definice modelu).

Určování a minimalizace rizika měly dříve za cíl hlavně připravit banku na možné ztráty, ale v dnešní době se podobně odhaduje i výnosnost investic a ostatních operací banky. Banky potom hledají co nejvhodnější poměr mezi ztrátovostí a výnosností svých aktivit.

Nejvíce zkoumané je riziko tržní, které se podle Sekerky (1998) dále dělí na měnové, úrokové, akciové a komoditní. Tato rizika se sledují každý den a neustále se přepočítávají možné dopady změny některého nebo více tržních parametrů (měnový kurz, úroková míra atp.). Strukturální rizika nejsou tak dynamická, a proto má cenu je bilancovat v delších časových horizontech. Vyplývají z celkové struktury bilance banky a sledují se spíše jejich trendy a změny než jejich přesné odhady.

4.2 Value-At-Risk

Závěrečná část této práce se zabývá standardním měřením tržního rizika a to pomocí míry Value-At-Risk (dále bude používána zkratka VAR). Vychází z historických dat, ze kterých se vytvoří podklady pro model. Simuluje se poté do budoucnosti pomocí metody založené na simulaci Monte Carlo. VAR se vztahuje obecně k variabilitě hodnoty určitého portfolia v budoucnosti. Obecně se hodnota VAR dá počítat více způsoby³⁰. Tato práce se zaměřuje na použití simulace Monte Carlo ve srovnání s historickou simulací.

„Hodnota VAR je definována jako maximální ztráta, kterou vlastník portfolia může utrpět a to pro stanovený časový horizont a spolehlivost.“
(Boleslav, 2009)

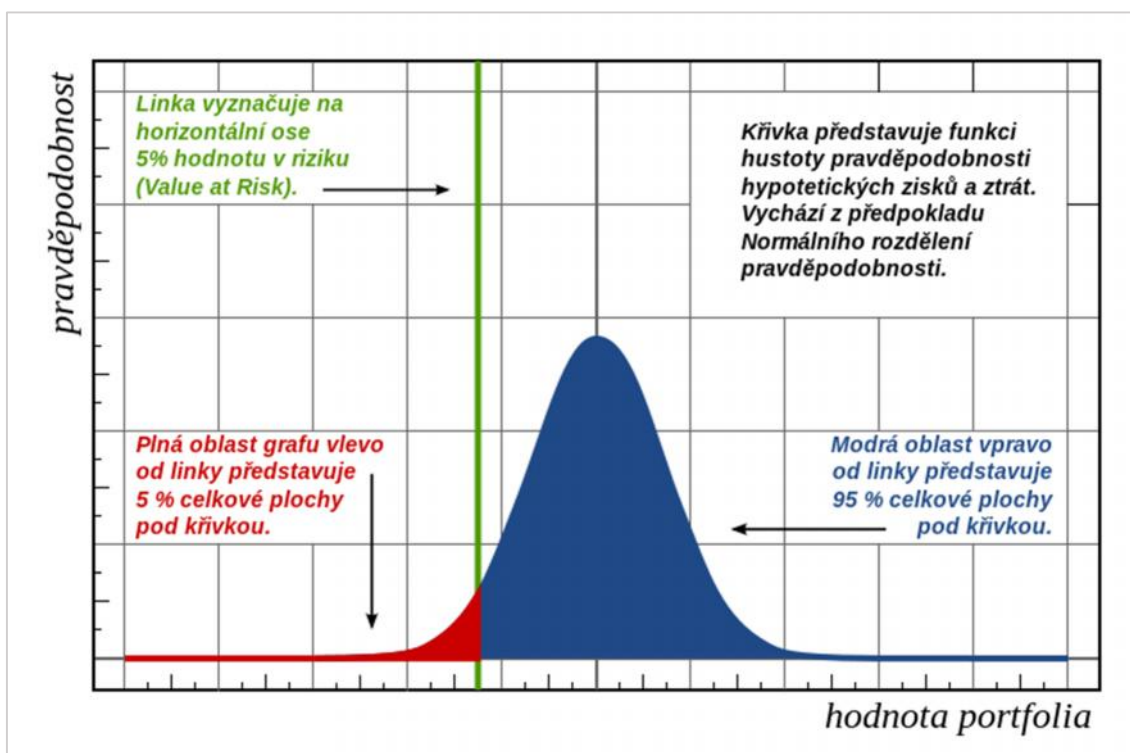
Stanovená spolehlivost odhadnuté ztráty vyjadřuje, s jakou pravděpodobností nebude ztráta vyšší než hodnota VAR během daného časového horizontu. Pro spolehlivost 95 % a horizont 7 dní výslednou hodnotu VAR interpretujeme: „Ztráta během příštího týdne budu vyšší než VAR s pravděpodobností 5 %“.

³⁰ Více například Jorion (2001)

Kromě informací o maximální možné ztrátě portfolia během dané doby a s danou pravděpodobností slouží VAR podle Joriona (2001) také při:

- Informačním reportingu – poskytuje informace o riziku managementu i akcionářům,
- Alokaci zdrojů – stanovení limitů pozic a alokace omezených kapitálových zdrojů,
- Stanovení kapitálového požadavku – stanovení požadované minimální úrovně kapitálu vzhledem k riziku.

Grafické zobrazení VAR se základním popisem je na obrázku 4-1:



Obrázek 4-1 Value at risk

4.2.1 Cenový index pražské burzy - Index PX

Než přikročíme ke konkrétním výpočtům VAR, budou zde popsána data, se kterými budeme pracovat. Protože domácí i světové burzy informují o vývoji akciového trhu pomocí indexů, byl vybrán k výpočtu VAR index pražské burzy.

„Indexy jsou využívány jako ukazatele vývoje akciového trhu, na jejichž základě můžeme sledovat nejen aktuální vývoj části nebo celého trhu, ale i dlouhodobější tendence (trend). Můžeme určit, v jakém stádiu se trh nachází nyní, a odhadovat, jakým směrem se bude ubírat v budoucnu. Pokud se investováním nezabýváme profesionálně a svěřili jsme správu svého portfolia osobnímu makléři, můžeme na základě pohybu indexu zjistit, jak byl ve svých investičních rozhodnutích úspěšný. Pokud se mu podařilo index překonat, byla investice zvolena dobře. Index tedy slouží k porovnání konkrétní investice s vývojem daného trhu.“ (FinExpert.cz)³¹

Cenové indexy neberou v úvahu tržní hodnotu společnosti, ale pouze aktuální cenu akcie. Zvyšování ceny některé akcie z portfolia (za předpokladu ostatních nezměněných) vede k růstu indexu a naopak. Mezi nejznámější indexy pražské burzy patří index PX.

„Index PX je oficiálním cenovým indexem Burzy cenných papírů Praha, a.s. První výpočet indexu PX se uskutečnil 20. 3. 2006, kdy se stal nástupcem indexů PX-50 a PX-D.“ Cenový index PX nezahrnuje dividendové výnosy³².

Pro výpočty a práci s tímto indexem budou použita data od 7. září roku 1993 do 14. května 2014. Index PX při svém vzniku spojitě navázal na index PX-50 a je tedy relevantní tyto dvě řady spojit. Výchozím dnem výpočtu obou indexů je 5. duben 1994, kdy byla nastavena výchozí hodnota indexu 1000,0 bodu.

Původně obsahovala báze indexu 50 emisí, ale od roku 2001 se velikost báze stala variabilní. Emise zahrnuté v bázi musí být způsobilé a musí splňovat určitá kritéria pro zařazení dobře popsaná například v oficiální publikaci Burzy cenných papírů Praha. Báze indexu se pravidelně aktualizuje (v současné době čtvrtletně). Současná báze indexu je shrnuta v příloze 2.

³¹ Adresa článku: <http://finexpert.e15.cz/?article=4689>

³² Oficiální index Pražské burzy cenných papírů, který zahrnuje dividendové výnosy, se označuje jako index PX-TR a z indexu PX vychází.

Pohyby samotného indexu reflektují každou změnu kurzu kterékoli z bazických emisí. Při výpočtech se pracuje s kurzy v okamžiku uzavření burzy, které jsou stanoveny na základě poslední změny kurzu jakékoliv emise z báze indexu. Tuto skutečnost lze interpretovat jako výpočet VAR pro index mezi koncem jednoho obchodovacího dne a začátkem druhého. Tato hodnota VAR udává naši míru rizika pro příští den. Index PX se podle oficiálních zdrojů počítá podle vzorce³³:

$$PX(t) = Base\ Value \times \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} q_i \cdot p_i(t) \times FF_i \times RF_i}{Start\ cap.} \times AF(t) \quad (4.1)$$

- *Start. Cap.* - počáteční kapitalizace k 5. dubnu 1994 (379 786 853 620,-- Kč)
- *Base value* - výchozí hodnota výpočtu (1000,0)
- *AF(t)* - koeficient zřetězení, neboli zohlednění změny provedené v bázi indexu (pro výchozí den 1,00)
- q_i - počet cenných papírů i-té bazické emise indexu
- p_i - kurz i-té emise indexu
- FF_i - podíl volně obchodovatelných akcií
- RF_i - redukční faktor
- a $N(t)$ - počet bazických emisí v indexu v čase t

Kompletní přehled historických dat indexu stažených z webu pražské burzy cenných papírů (www.bcphp.cz) je v příloze 3 s vyjádřením změn indexu mezi jednotlivými dny.

³³ Podrobnější popis viz. „Pravidla pro výpočet indexů PX a PX-TR Burzy cenných papírů Praha“ z oficiálního webu pražské burzy.

4.2.2 Výpočet VAR

„Základní metody výpočtu VAR je možno rozdělit do tří základních skupin: jedná se o parametrickou metodu (metoda variance a kovariance, resp. analytická metoda), metodu empirické distribuce (historická simulace) a simulaci Monte Carlo.“ (Polouček, 2006 str. 323).

Metod pro výpočet VAR je velké množství, přičemž nejčastěji používanými jsou simulační metody - historická simulace a simulace Monte Carlo. Pro obě metody je hlavní nevýhodou předpoklad nezávislého rozdělení přírůstků tržních sazeb.

Výhodou metody Monte Carlo oproti historické simulaci je snadné zvýšení počtu scénářů zahrnutých do odhadu. Historická simulace pracuje pouze s dostupnými daty, v nichž se delší časové řady obtížněji získávají – pokud jsou vůbec k dispozici. Existují i jiné techniky výpočtu VAR³⁴. Příkladem analytického způsobu řešení je metoda delta, která je založena na použití prvního členu Taylorova rozvoje.

Historická simulace funguje tak, že na základě historických dat se vypočítají změny hodnoty portfolia a z nich se vyčlení příslušný kvantil – to je poté považováno za hodnotu VAR. Pro případ portfolia popsaného indexem PX se vypočítá historickou simulací hodnota VAR následovně.

Z dat, která máme k dispozici o historickém vývoji indexu PX³⁵ vypočteme změny mezi jednotlivými dny a seřadíme tyto změny od nejmenší po největší. Nejmenší budou mít záporné hodnoty, přičemž znaménko mínus značí ztrátu (snížení indexu). Z takto uspořádaných historických dat už není problém určit hodnotu VAR.

Dejme tomu, že chceme znát 5% kvantil rozdělení zisku indexu (nejčastější míra spolehlivosti je právě 95 %). Vezmeme tedy tolikátou hodnotu

³⁴ Například zde: http://www.moneco.cz/index.asp?action=s_m_var

³⁵ Viz příloha 3

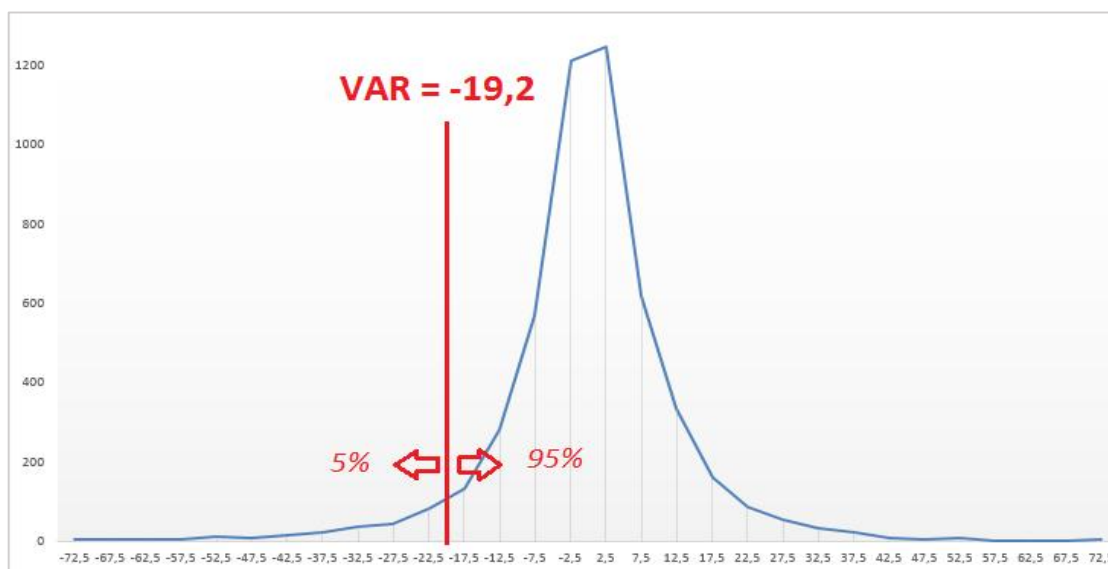
ze vzestupně seřazené řady, která všechny hodnoty rozdělí v poměru 5 : 95. Počet hodnot před vybranou hodnotou tedy musí tvořit 5 % celé řady.

V našem případě máme k dispozici 5022 historických hodnot, takže nás zajímá hodnota 251. nejmenší při vzestupném seřazení.

- Počet pozorování (historických): $n = 5022$
- Kvantil: $p = 5 \%$
- Pozice hodnoty odpovídající kvantilu p : $x = n \cdot p = 251$
- VAR určená pomocí historické simulace: **VAR = -19,2**

Máme denní data, takže vypočtená VAR nám říká, že následující den je 5% pravděpodobnost, že index se sníží o více než 19,2 bodu. Na obrázku 4-1 je znázorněno rozdělení růstu či poklesu indexu se zvýrazněním hledaného 5% kvantilu.

Na zobrazeném grafu na obrázku 4-2 vodorovná osa x představuje velikost změny indexu a svislá osa y četnost velikosti změn indexu pro stejně široké intervaly. Je patrné, že v těsném okolí střední hodnoty se vyskytují změny nejvíce a extrémní změny jsou četnější méně a méně. Četnosti v grafu jsou uvedené v tabulce v příloze 4.



Obrázek 4-2 Graf rozdělení změn indexu PX

Pomocí programu SPSS³⁶ byl zjištěn předpis normálního rozdělení (kterému rozdělení hodnot odpovídá – například podle grafu) změn indexu mezi jednotlivými dny³⁷. Na základě takto zjištěných parametrů rozdělení můžeme použít simulaci Monte Carlo a spočítat VAR touto metodou.

Simulace se skládá z následujících kroků, jak uvádí Jorion (2001):

1. Výběr stochastického procesu a definování parametrů
2. Generování pseudonáhodných hodnot proměnných, ze kterých se ceny počítají
3. Výpočet hodnoty portfolia pro danou iteraci
4. Opakování kroků 2 a 3 tolikrát, kolikrát je potřeba (viz kapitola o vhodném počtu opakování) – počet opakování simulace

Po skončení celého procesu je k dispozici dostatek informací o rozdělení hodnot a může se podobně jako při historické simulaci určit kvantil odpovídající zadané spolehlivosti.

Zahrnutí náhodného faktoru při použití metody Monte Carlo oproti historické simulaci je výhodné jen tehdy, pokud je splněn předpoklad normality statistického rozdělení proměnné (výsledek testu z programu SPSS v příloze 5). Pro jednodušší a méně rozsáhlá portfolia proto stačí použít historickou simulaci, která je citlivá hlavně na délku historické řady hodnot, se kterou se pracuje.

V případě zpracování simulace pomocí programu MS Excel (u takovéto jednodušší není třeba používat speciální software) je postup výpočtu VAR následující.

V prvním sloupci generujeme náhodná čísla generátorem, který je součástí programu a to funkcí „NÁHČÍSLO()“. Tato funkce nám generuje čísla normálního rozdělení v intervalu (0, 1).

³⁶ IBM SPSS Statistics 20 je statistický a analytický software vhodný především pro tvorbu předpovědí (více na webu <http://www-01.ibm.com/software/cz/analytics/spss/>)

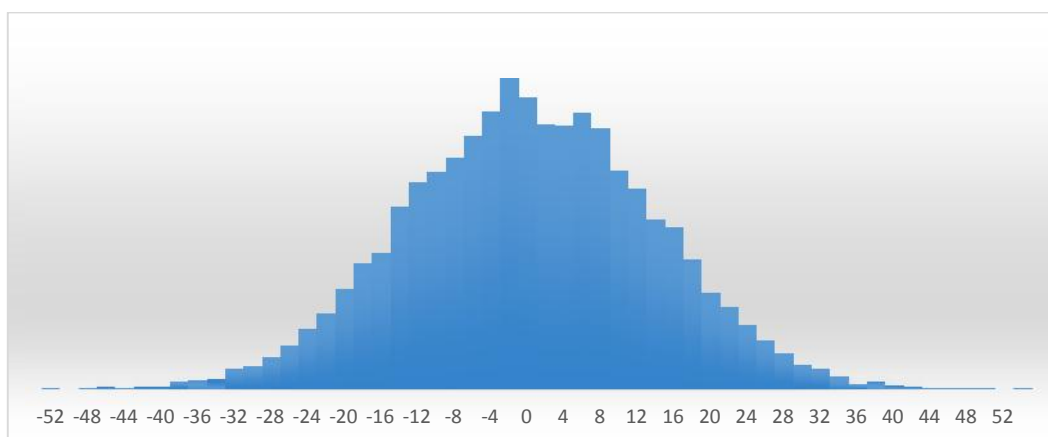
³⁷ Výstup testu viz příloha 5

Tyto hodnoty představují náhodné kvantily z rozdělení zkoumané veličiny a pro tyto pravděpodobnosti se nám v druhém sloupci vypočítává velikost změny indexu. V dalším sloupci jsou tedy hodnoty normovaného normálního rozdělení pro střední hodnotu a směrodatnou odchylku změny indexu vypočítané z historických dat. Oba sloupce mají tolik hodnot, kolik opakování simulace chceme uskutečnit. Ukázka dat z tabulky (včetně vzorců MS Excel) je v tabulce 2.³⁸

Tabulka 2 Část tabulky simulovaných dat

Střední hodnota	0,129547989
Směrodatná odchylka	13,55643437
Počet opakování	10 000
Kvantil (Náhodné číslo)	Změna indexu pro daný kvantil
=NÁHČÍSLO()	=NORM.INV(U6;\$V\$2;\$V\$3)
0,505339333	0,310988967
0,202519936	-11,15827186
0,224376297	-10,13940062
0,399114508	-3,336015592
0,049102401	-22,28763936
0,108375647	-16,61553411
0,251894116	-8,933486068
0,545978784	1,695425433

Data získaná simulací jsou graficky zobrazena na obrázku 4-3.



Obrázek 4-3 Rozdělení simulovaných hodnot

³⁸ Kompletní tabulka četností nasimulovaných změn indexu je v příloze 6

Hodnotu VAR určíme z nasimulovaných dat stejně jako v případě historické simulace. Kvantil 5 % odpovídá hodnotě, která dělí vzestupně seřazené simulované změny indexu v poměru 5 : 95.

- Počet pozorování (simulovaných): $n = 10000$
- Kvantil: $p = 5 \%$
- Hodnota odpovídající kvantilu p : $x = n \cdot p = 500$

VAR určená pomocí historické simulace: **VAR = - 22,04733464**

Tabulka 3 Část vzestupně seřazené řady s vypočtenou VAR

495	-22,1213
496	-22,1077
497	-22,0704
498	-22,0678
499	-22,0635
500	-22,0473
501	-22,0455
502	-22,0451
503	-22,0319
504	-22,0105
505	-21,9993

Závěrečná interpretace vypočtené VAR je, že na 95 % nebudou změny cen akcií báze indexu mít za následek větší pokles než o 22,047 bodu.

Shrneme-li náš předchozí postup, můžeme konstatovat, že metoda Monte Carlo je sice náročnější na výpočetní techniku, ale vede k mnohem přesnějším výsledkům a umožňuje výpočet v reálném čase i pro složitá portfolia. Při výpočtu VAR pomocí historické simulace neuvažujeme vůbec vliv náhodných faktorů, a proto je lepší použití simulace Monte Carlo.

4.2.3 Výhody a nevýhody VAR³⁹

Velká výhoda je, že VAR udává konkrétní číslo, které shrnuje míru rizika pro celé portfolio. Díky tomuto shrnutí je pak snadnější rozhodování a komunikace z pohledu akcionářů i managementu firmy. Uvedená výhoda je současně i nevýhodou, protože vypovídá pouze o zvolené pravděpodobnosti a neudává maximální možnou ztrátu (pouze kvantilovou). Když se vypočítají VAR pro různé kvantily, trochu se tím pohled na riziko rozšíří, nicméně pořád se například pro dvě portfolia se stejnou VAR může riziko výrazně lišit.

Vzhledem k tomu, že nelze pomocí VAR dobře podchytit riziko pro velmi vysoké pravděpodobnosti, je největší nevýhodou této míry obtížné odhadování extrémních ztrát (které jsou sice velice málo pravděpodobné, ale nastat mohou).

Velkou nevýhodou je možnost manipulování s výpočtem. Například obchodník může záměrně počítat na určité hladině spolehlivosti, na které riziko ještě působí přijatelně, aby zapůsobil na investory. VAR totiž není tzv. subaditivní, což dobře popisuje Strnad (2012):

„Tato vlastnost říká, že riziko portfolia lze omezit součtem rizik jeho subportfolií.“

Možnost manipulace se tedy nabízí při interpretaci míry rizika portfolia, tím že ho rozdělíme na více menších subportfolií (např. mezi dceřiné společnosti) a jejich společnou hodnotu VAR získáme sečtením dílčích. Tento postup není matematicky správný a vychází nižší hodnota, než kdybychom vše spojili do jednoho výpočtu VAR pro celé portfolio dohromady.

Nevýhodou všech metod a technik, které něco předpovídají, je mimo jiné závislost na minulém vývoji, ze kterého vycházíme. Při výpočtech VAR například předpokládáme stejné přírůstky tržních sazeb jako v předešlých obdobích. Prudké změny tržních sazeb tak nestačí metoda VAR včas zahrnout do odhadu a predikovat možné dramatické změny (které mohou vést až ke globální finanční krizi, jako například v roce 2007) na finančních trzích. Většinou se ovšem jedná

³⁹ Vychází se zde ze článku Ing. Petra Strnada na téma „Řízení tržních rizik pomocí Value at Risk – úskalí a problémy“, který byl publikován na webových stránkách Komerční banky (2012)

spíše o měnové krize způsobené nepředvídanými pohyby měnových kurzů (nejnebezpečnější u fixních kurzů, které se nepovede udržet a minimální volatilita se změní v extrémní). Pro takové situace se často testují hypotetické stresové scénáře, které zahrnou nějakou vysoce nepravděpodobnou, ale reálnou tržní změnu.

Za zmínku určitě také stojí nevýhoda, která je způsobena nezahrnutím rizika spojeného s likvidací pozic. Při výpočtu VAR se zpravidla pracuje se středovými cenami pozic a zpravidla bývá zahrnuto tržní rozpětí ocenění. Zmíněné rozpětí je ale pevné a jeho zvětšení (zmenšení je zbytečné uvažovat) se již do modelu nezahrnuje. Dojde-li během tržního napětí, kdy se rozpětí i několikanásobně zvětšuje, k likvidaci takových pozic, může dojít k mnohem vyšším ztrátám, než VAR odhadovala. Mimo cenového rozpětí se do likvidačního rizika zahrnuje i nečekané stlačení cen či dlouhý časový horizont likvidace pozic (během likvidace se tak tržní hodnota pozic může ještě měnit).

Poslední nevýhodou je problém statického charakteru hodnoty VAR. Nejsou brány v úvahu změny portfolia v kratších časových intervalech, než je horizont vypočítané hodnoty VAR. Pro obchodníky obchodující například během dne může být jednodenní odhadovaná maximální ztráta výrazně podhodnocená. Řešením pro zahrnutí změn složení portfolia jsou různé dynamické modely, které zohledňují měnící se strukturu.

Závěr

V úvodní kapitole byla charakterizována podstata simulačních modelů a postup jejich přípravy. V jejím závěru byly popsány generátory náhodných čísel včetně vysvětlení rozdílu mezi náhodnými a pseudonáhodnými generovanými hodnotami.

Kapitoly o metodě Monte Carlo a o jejím využití měly za úkol splnit hlavní cíl této práce - popsat princip a možnosti využití této metody. Podrobným vysvětlením typického historického použití metody při výpočtu Ludolfova čísla byla vysvětlena podstata tohoto statistického nástroje pro práci se stochastickými simulačními modely. Bylo demonstrováno, že princip metody spočívá v generování velkého množství hodnot náhodného charakteru a jejich následném zpracování.

Využití metody napříč spektrem vědeckých disciplín a oborů je velké a stále se rozšiřuje. Největší výhodou metody Monte Carlo je velká variabilita nastavení simulace, díky které je možné tímto způsobem řešit jak základní matematické úlohy (například jednoduchý určitý integrál), tak mnohem sofistikovanější příklady. Mezi takové příklady patří zejména aplikace metody v oblastech fyziky, přičemž několik konkrétních příkladů bylo uvedeno a popsáno.

Obtížnost použití metody je čím dál nižší díky programům, které mají její použití přednastavené a stačí je pouze vyvolat. V takovém případě ani nemusíme detailně znát princip metody a pracujeme pouze s výstupy, které získáme na základě zadaných vstupů. Navzdory relativně lehkému principu metody je důležitá určitá alespoň základní znalost statistických a matematických principů aby následné shrnutí a interpretování výsledků neznehodnotilo celý pokus. Simulace experimentů touto metodou umožňuje tvořit přesnější předpovědi a odhady veličin, u nichž například není k dispozici dostatek historických dat.

Velice populární jsou různé pokusy aplikování metody na modelování a predikování všech možných systémů s pravděpodobnostním rozdělením popřípadě s náhodným budoucím vývojem. Pro tuto práci byl vybrán jako příklad užitečného a praktického využití metody - výpočet míry tržního rizika Value at

Risk. Bylo zjištěno, že na základě míry VAR je pro následující den po poslední hodnotě řady 95% pravděpodobnost, že pokles indexu PX nebude o více než 22,0473 bodu. Neboli je 5% pravděpodobnost, že pokles cen emisí v bázi způsobí větší snížení indexu než o 22,0473 bodu.

VAR je velice oblíbená míra používaná při řízení rizika, nicméně její vypovídací hodnota je omezená a přehnané spoléhání na podobné ukazatele chování trhu vedly mj. k hospodářské krizi v letech 2007 - 2008. Je tedy třeba výstupy pokusů a modelů řešených metodou Monte Carlo stále brát jako výsledky vypočítané pro určitou míru spolehlivosti.

VAR se dá počítat pro více různých prvků současně (kombinace akcií atp.) nebo pro různě dlouhá období. Mimo to by se také dalo počítat VAR pro různé hladiny spolehlivosti, což by mohlo být předmětem zpracování navazujícího na tuto z větší části teoreticky zaměřenou práci.

Literatura

- Beckmann, Petr. 1998.** *Historie čísla π* . Praha : Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.
- Beder, Tanya Styblo. 1995.** VAR: Seductive but Dangerous. *Financial Analysts Journal*. Září/Říjen 1995, stránky 12-24.
- Boleslav, Martin. 2009.** Value at Risk and its limits. *Provozně ekonomická fakulta Mendelovy univerzity v Brně*. [Online] 2009.
<http://www.pefka.mendelu.cz/predmety/simul/PEFnet13/prispevky/Boleslav.pdf>.
- Fabian, Zdeněk a Kluiber, František. 1998.** *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*. Praha : Prospektrum spol. s.r.o., 1998. ISBN 80-7175-058-1.
- Fasano, G. a Franceschini, A. 1987.** A multidimensional version of the Kolmogorov-Smirnov test. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1987, 03.
- Fotr, Jiří, a další. 2007.** Simulace Monte Carlo v analýze rizika investičních projektů. *Acta Oeconomica Pragensia*. 2007, 2.
- Houška, Milan. 2009.** *Simulační modely I*. Praha : ČZU v Praze provozně ekonomická fakulta, 2009. ISBN 978-80-213-1334-7.
<http://finexpert.e15.cz/?article=4689>. *FinExpert.cz*. [Online]
- Lopes, R.H.C., Reid, I., Hobson, P.R. 2007.** The two-dimensional Kolmogorov-Smirnov test. *Proceeding of science*. 2007.
- Manlig, F. 2000.** Počítačová simulace výrobních procesů. *MM průmyslové spektrum*. 2000, 10.
- Nezbeda, Ivo, Kolafa, Jiří a Miroslav, Kotrla. 2003.** *Úvod do počítačových simulací: Metody Monte Carlo a molekulární dynamiky*. Praha : Karolinum, 2003.
- Paholok, Igor. 2008.** Simulácia ako vedecká metóda. *Electronic journal for philosophy*. 2008.
- Polouček, Stanislav a kol. 2006.** *Bankovníctví*. Praha : C. H. Beck, 2006.
- Sekerka, B. 1998.** *Řízení bankovních rizik*. Praha : Profess Consulting s.r.o., 1998.
- Strnad, Petr. 2012.** Řízení tržních rizik pomocí Value at Risk - úskalí a problémy. *Risk-management.cz*. [Online] 2012. www.risk-management.cz.
- Varady, M. 2007.** *Statistická fyzika*. Ústí nad Labem : UJEP, 2007.

Seznam tabulek a obrázků:

Tabulka 1 Výsledky hodu kostkou

zdroj: vlastní zpracování „hodu kostkou“ pomocí MS Excel

Tabulka 2 Část tabulky simulovaných dat

zdroj: vlastní nasimulovaná data v programu MS Excel

Tabulka 3 Část vzestupně seřazené řady s vypočtenou VAR

zdroj: vlastní tabulka seřazených dat v MS Excel

Obrázek 1-1 Schéma simulačního projektu

zdroj: Manlig (2000)

Obrázek 1-2 Porovnání náhodných a pseudonáhodných vygenerovaných dvojic čísel

zdroj: <http://home.iscte-iul.pt/~jaats/myweb/Efficient%20methods%20for%20solving%20SDEs.html>

Obrázek 1-3 Ludolfovo číslo

zdroj: <http://a-jojo.blog.cz/0804/ludolfovo-cislo-pi>

Obrázek 2-1 Závislost výpočtu Ludolfova čísla na počtu opakování

zdroj: Fabian a Kluiber (1998, str. 85)

Obrázek 2-2 Buffonova jehla

zdroj: <http://mathworld.wolfram.com/BufonsNeedleProblem.html>

Obrázek 2-3 Hustota pravděpodobnosti protnutí

zdroj: Ing M. Dorda, Ph.D. upravený snímek přednášky o metodě Monte Carlo

Obrázek 2-4 Možné rozložení zrněk hrachu

zdroj: http://tikalon.com/blog/blog.php?article=more_pi

Obrázek 3-1 Příklad vygenerovaných bodů při výpočtu určitého integrálu

zdroj: Houška (2009, str. 10)

Obrázek 4-1 Value at risk

http://cs.wikipedia.org/wiki/Value_at_risk

Obrázek 4-2 Graf rozdělení změn indexu PX

zdroj: vlastní zpracování rozdělení indexu PX v MS Excel

Obrázek 4-3 Rozdělení simulovaných hodnot

Zdroj: vlastní zpracování rozdělení simulovaných hodnot v MS Excel

Příloha 1 – tabulka náhodných čísel a její použití

1564	8048	6359	8802	2860	3546	3117	7357	9945	5739
6022	9676	5768	3388	9918	8897	1119	9441	8934	8555
8418	9906	0019	0550	4223	5586	4842	8786	0655	5650
5943	1652	2545	3981	2102	3523	7419	2359	0381	8457
6945	3629	7351	3502	1760	0550	8874	4599	7609	9474
0370	1165	8035	4415	9812	4312	3524	1382	4732	2303
6702	6457	2270	8611	8479	1419	0835	1866	1307	4211
3740	4722	3002	8020	0182	4451	9389	1730	3394	7094
3833	3356	9025	5749	4780	6042	3629	8458	1339	6848
8683	7947	4719	9403	7863	0701	9245	5960	9257	2588
6794	1732	4809	9473	5893	1154	0067	0899	1184	8630
5054	1532	9498	7702	0544	0087	9602	6259	3807	7276
1733	6560	9758	8586	3263	2532	6668	2888	1404	3887
6609	6263	9160	0600	4304	2784	1089	7321	5618	6172
3970	7716	8807	6123	3748	1036	0516	0607	2710	3700
9504	2769	0534	0758	9824	9536	7825	2985	3824	3449
0668	9636	6001	9372	8746	1579	6102	7990	4526	3429
4364	0606	4355	2395	2070	8915	8461	9820	6811	5873
8875	3041	7183	2261	7210	6072	7128	0825	8281	6815
4521	3391	6695	5986	2416	7979	8106	7759	6379	2101
5066	1454	9642	8675	8767	0582	0410	5515	2697	1575
9138	5003	8633	2670	7575	4021	0391	0118	9493	2291
0975	1836	7629	5136	7824	3916	0542	2614	6567	3015
1049	9925	3408	3029	7244	1766	1013	0221	8492	3801
0682	1343	7454	8600	8598	9953	5773	8482	4439	6708
0263	4909	9832	0627	1155	4007	0446	6986	4699	1740
2733	3398	7630	3824	0734	7736	8465	0849	0459	8733
1441	2684	1116	0758	5411	3365	4489	6241	6413	3615
5014	5616	1721	8772	4605	0388	1399	5993	7459	4445
3745	5956	5512	8577	4178	0031	3090	2296	0124	5896
8384	8727	5567	5881	3721	1896	3758	7236	6860	1740
9944	8361	7050	8783	3815	9768	3247	1706	9355	3510
3045	2466	6640	6804	1704	8665	2539	2320	9831	9442
5939	5741	7210	0872	3279	3177	6021	2045	0163	3706
4294	1777	5386	7182	7238	8408	7674	1719	9068	9921
3787	2516	2661	6711	9240	5894	3068	5524	0932	5520
4764	2339	4541	5415	6314	7979	3634	5320	5400	6714
0292	9574	0285	4230	2283	5232	8830	5662	6404	2514
7876	1662	2627	0940	7836	3741	3217	8824	7393	7306
3490	3071	2967	4922	3658	4333	6452	9149	4420	6091
3670	8960	6477	3671	9318	1317	6355	4982	6815	0814
3665	2367	8144	9663	0990	6155	4520	0294	7504	0223
3792	0557	8489	8446	8082	1122	1181	8142	7119	3200
2618	2204	9433	2527	5744	9330	0721	8866	3695	1081
8972	6829	0962	5597	8834	5857	9800	7375	9209	0630
7305	8852	1688	3571	3393	2990	9488	8883	2476	9136
1794	4551	1262	4845	4039	7760	1565	4745	1178	8370
3179	1304	7767	4769	7373	5195	5013	6894	5734	5852
2930	3828	7172	3188	7487	2191	1225	7770	3999	0006
8418	9627	7948	6243	1176	9393	2252	0377	9798	8648

2. Používání tabulky náhodných čísel

a) Volba náhodných čísel a přiřazení pořadových čísel jednotkám v šarži:

1. V tabulce se libovolně zvolí jako počátek čtyřmístné číslo ležící na průsečíku určité řádky a sloupce (počátek se volí při používání tabulky na různých místech).
2. Náhodně zvolené číslo je počátkem dalších čísel ve sloupci (dolů nebo nahoru) nebo v řádce (doprava nebo doleva).
3. Ze čtyřmístného čísla se zvolí první dvojčíslí nebo trojčíslí v závislosti na počtu jednotek (balení) v šarži nebo části šarže (při počtu do 99 dvojčíslí, při počtu od 100 do 999 trojčíslí atd.); čísla větší, než je počet jednotek v šarži, se vynechají.
4. Odeberou se jednotky balení, jimž jsou přiřazena pořadová čísla (očíslováním nebo jiným způsobem).

Příloha 2 – báze portfolia indexu PX

Název	ISIN	Počet cenných papírů uplatněných ve výpočtu	Free Flow Faktor	Redukční faktor	Redukovaná tržní kapitalizace [mil. Kč]	Podíl na tržní kapitalizaci [%]
ČEZ	CZ0005112300	537 989 759	0,40	0,54	66 690,5	22,02
VIG	AT0000908504	128 000 000	0,50	0,96	64 512,0	21,30
KOMERČNÍ BANKA	CZ0008019106	38 009 852	0,40	0,85	58 155,1	19,20
ERSTE GROUP BANK	AT0000652011	429 800 000	0,80	0,26	55 471,7	18,32
TELEFÓNICA C.R.	CZ0009093209	315 648 092	0,20	1,00	18 938,9	6,25
STOCK	GB00BF5SDZ96	200 000 000	0,50	1,00	9 600,0	3,17
UNIPETROL	CZ0009091500	181 334 764	0,30	1,00	7 616,1	2,51
PHILIP MORRIS ČR	CS0008418869	1 913 698	0,30	1,00	5 913,3	1,95
PEGAS NONWOVENS	LU0275164910	9 229 400	1,00	1,00	5 474,0	1,81
GETV	BMG200452024	134 489 185	0,50	1,00	3 698,5	1,22
FORTUNA	NL0009604859	52 000 000	0,40	1,00	2 658,2	0,88
TMR	SK1120010287	6 707 198	0,50	1,00	1 861,2	0,61
NWR	GB00B42CTW68	264 648 002	0,40	1,00	1 291,5	0,43
ORCO	LU0122624777	114 507 629	0,50	1,00	973,3	0,32
Celkem					302 854,2	100,00

Příloha 3 – začátek a konec vývoje indexu PX⁴⁰

Datum	Hodnota indexu v okamžiku zavření
7.9.1993	335,2
14.9.1993	329
21.9.1993	329,4
28.9.1993	333,1
5.10.1993	340
12.10.1993	372,7
19.10.1993	414,8
26.10.1993	451,7
2.11.1993	524,1
4.11.1993	611,3
9.11.1993	661,5
11.11.1993	662,8
16.11.1993	665,4
18.11.1993	638,6
23.11.1993	619,5
25.11.1993	608,6
30.11.1993	617,1
2.12.1993	643,7
7.12.1993	648,4
9.12.1993	657,7
14.12.1993	678,7
16.12.1993	705,2
6.1.1994	756,5
11.1.1994	810,3
13.1.1994	856,8
18.1.1994	918,3
20.1.1994	979,6
25.1.1994	1037
27.1.1994	1109,7
1.2.1994	1135,8
3.2.1994	1115,3
8.2.1994	1096,6
10.2.1994	1090,2
15.2.1994	1126,4
17.2.1994	1156,5
22.2.1994	1172,9
24.2.1994	1215,8
1.3.1994	1244,7
3.3.1994	1212
8.3.1994	1158,2
10.3.1994	1194,6
14.3.1994	1186,9
15.3.1994	1159,4
17.3.1994	1134,4
21.3.1994	1118,4
22.3.1994	1036,9
24.3.1994	1029,3

Datum	Hodnota indexu v okamžiku zavření
5.3.2014	1004,73
6.3.2014	1008,95
7.3.2014	1002,02
10.3.2014	991,49
11.3.2014	984,54
12.3.2014	967,76
13.3.2014	970,18
14.3.2014	950,17
17.3.2014	978,16
18.3.2014	986,39
19.3.2014	989,36
20.3.2014	985,05
21.3.2014	991,54
24.3.2014	990,37
25.3.2014	994,27
26.3.2014	1002,44
27.3.2014	996,32
28.3.2014	1005,66
31.3.2014	1006,45
1.4.2014	1016,78
2.4.2014	1017,67
3.4.2014	1015,97
4.4.2014	1018,19
7.4.2014	1013,31
8.4.2014	992,41
9.4.2014	1002,64
10.4.2014	1005,09
11.4.2014	992,69
14.4.2014	993,95
15.4.2014	996,01
16.4.2014	1001,78
17.4.2014	1006,38
22.4.2014	1012,2
23.4.2014	1007,8
24.4.2014	1002,04
25.4.2014	992,76
28.4.2014	996,19
29.4.2014	1009,25
30.4.2014	1010,31
2.5.2014	1010,81
5.5.2014	1008,57
6.5.2014	1010,58
7.5.2014	1007,87
9.5.2014	1004,69
12.5.2014	1004,08
13.5.2014	993,98
14.5.2014	985,79

⁴⁰ Pro velké množství dat je přiložena místo všech 5022 hodnot pouze ukázka řady

Příloha 4 – četnosti historických změn indexu PX

Interval		Četnost změn indexu
Dolní mez	Horní mez	
-160	-155	1
-155	-150	0
-150	-145	0
-145	-140	0
-140	-135	0
-135	-130	0
-130	-125	0
-125	-120	0
-120	-115	0
-115	-110	0
-110	-105	0
-105	-100	2
-100	-95	2
-95	-90	0
-90	-85	1
-85	-80	2
-80	-75	0
-75	-70	4
-70	-65	3
-65	-60	4
-60	-55	3
-55	-50	10
-50	-45	7
-45	-40	14
-40	-35	22
-35	-30	37
-30	-25	42
-25	-20	83
-20	-15	132
-15	-10	283
-10	-5	568
-5	0	1212

Interval		Četnost změn indexu
Dolní mez	Horní mez	
0	5	1245
5	10	620
10	15	336
15	20	160
20	25	85
25	30	56
30	35	32
35	40	21
40	45	7
45	50	6
50	55	7
55	60	2
60	65	2
65	70	0
70	75	3
75	80	0
80	85	0
85	90	3
90	95	2
95	100	0
100	105	1
105	110	0
110	115	0
115	120	1
120	125	0
125	130	0
130	135	0
135	140	1

Příloha 5 – test normality rozdělení historických změn indexu PX

Testováno pomocí programu SPSS, přičemž jsme rovnou získali hodnoty parametrů normovaného normálního rozdělení této veličiny (střední hodnoty a směrodatné odchylky)

		index
N		5022
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	,12954799
	Std. Deviation	13,55643437
Most Extreme Differences	Absolute	4
	Positive	,112
	Negative	,101
Kolmogorov-Smirnov Z		-,112
Asymp. Sig. (2-tailed)		7,937
		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Příloha 6 – četnosti simulovaných změn indexu PX

Interval		Četnost změn indexu
Dolní mez	Horní mez	
-53	-51,5	1
-51,5	-50	0
-50	-48,5	1
-48,5	-47	0
-47	-45,5	1
-45,5	-44	1
-44	-42,5	1
-42,5	-41	1
-41	-39,5	4
-39,5	-38	2
-38	-36,5	10
-36,5	-35	11
-35	-33,5	8
-33,5	-32	9
-32	-30,5	16
-30,5	-29	17
-29	-27,5	22
-27,5	-26	27
-26	-24,5	36
-24,5	-23	54
-23	-21,5	60
-21,5	-20	71
-20	-18,5	74
-18,5	-17	92
-17	-15,5	113
-15,5	-14	114
-14	-12,5	133
-12,5	-11	144
-11	-9,5	151
-9,5	-8	171
-8	-6,5	195
-6,5	-5	186
-5	-3,5	226
-3,5	-2	217
-2	-0,5	214
-0,5	1	242

Interval		Četnost změn indexu
Dolní mez	Horní mez	
1	2,5	220
2,5	4	219
4	5,5	231
5,5	7	207
7	8,5	195
8,5	10	170
10	11,5	157
11,5	13	147
13	14,5	155
14,5	16	122
16	17,5	100
17,5	19	93
19	20,5	73
20,5	22	63
22	23,5	57
23,5	25	37
25	26,5	29
26,5	28	33
28	29,5	22
29,5	31	17
31	32,5	13
32,5	34	7
34	35,5	3
35,5	37	6
37	38,5	7
38,5	40	5
40	41,5	1
41,5	43	4
43	44,5	1
44,5	46	1
46	47,5	0
47,5	49	0
49	50,5	0
50,5	52	0
52	53,5	2