# POSOUZENÍ ODHADU MĚNOVÉHO RIZIKA PORTFOLIA POMOCÍ LÉVYHO MODELŮ

**Tomáš Tichý,** Ekonomická fakulta VŠB-TU Ostrava*

## 1. Úvod

Modelování pravděpodobnostního rozdělení výnosů portfolií finančních instrumentů je nedílnou součástí řízení rizik finančních institucí, ať už se jedná o banky, pojišťovny, nebo investiční společnosti. S portfoliem finančních instrumentů je spojeno především tržní riziko. V rámci něj můžeme dále rozlišit riziko akciové, měnové, úrokových sazeb a případně komoditní, přičemž pro mezinárodně aktivní subjekty je klíčové riziko měnové, tj. riziko vyplývající z neočekávané změny kurzů cizích měn, v důsledku čehož dochází ke změně tržní ceny v cizí měně denominovaných pozic.

Kvalitně sestavený model pro pravděpodobnostní rozdělení výnosů portfolií představuje nezbytný krok pro efektivní odhad rizika a jeho následné řízení. S tím zároveň souvisí určení úrovně kapitálu, který je nutný k jeho pokrytí na dané hladině významnosti, respektive s danou spolehlivostí.

Výkonnost finančních institucí je obecně velmi citlivá na důvěru klientů a potažmo i celého trhu. Jejich stabilita je zároveň důležitá pro funkčnost vztahů v současné ekonomice. To indikuje požadavky na řízení rizik ze dvou stran: z pohledu veřejného zájmu (orgány regulace a dohledu) a z pohledu vlastníků kapitálu. V prvém případě je riziko řízeno na bázi regulatorního kapitálu a kapitálové přiměřenosti, ve druhém se jedná o ekonomický kapitál na bázi cíleného ratingu. Právě ekonomický kapitál je zpravidla založen na velmi vysoké úrovni spolehlivosti krytí rizik, která mohou nastat, a indikuje potřebu efektivních postupů modelování zohledňujících pravdivé vystižení těžkých konců pravděpodobnostního rozdělení.

Druhým bodem, který vymezuje požadavky na vhodný model, je charakter reálných výnosů finančních aktiv. Skutečné výnosy finančních aktiv v posledních letech vykazují velmi výraznou odchylku od normálnosti – tedy Gaussova pravděpodobnostního rozdělení výnosů, tj. s nulovou šikmostí a nulovou dodatečnou špičatostí. Ačkoliv již například Fama (1965) zamítl předpoklad Gaussova rozdělení výnosů, je tohoto zjednodušení stále v hojné míře využíváno jako standardu. Pro efektivní odhad rizika však je vhodnější aplikovat některý z modelů, které umožňují vystižení i vyšších momentů pravděpodobnostního rozdělení výnosů, jako jsou Lévyho modely (pro přehled viz například Cont a Tankov, 2004).

* Významná část tohoto příspěvku vznikla v rámci projektu Grantové agentury České republiky, GAČR: 402/08/1237 a projektu SGS VŠB-TUO SP/20104.

Třetím bodem, který úzce souvisí s předchozím, je výběr modelu pro vhodné vyjádření závislostí mezi dílčími zdroji rizika. Zatímco standardní předpoklad Gaussova rozdělení pravděpodobnosti umožňuje aplikovat při modelování pravděpodobnostního rozdělení portfolia sdružené Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti, práce s komplexnějšími modely nebo dokonce aplikace různých procesů pro dílčí zdroje rizika (tj. více různých mezních rozdělení pravděpodobnosti) vyžaduje zahrnutí složitějších postupů, jako jsou kopula funkce (Sklar, 1973).

Tento článek je zaměřen na posouzení vhodnosti aplikace Lévyho modelů na bázi subordinátoru sdružených pomocí běžných eliptických kopula funkcí při odhadu rizika portfolia citlivého na vývoj měnových kurzů.[1] Cílem tedy je porovnat úspěšnost dvou Lévyho modelů (variance gamma model a normal inverse Gaussian model) vzhledem ke standardnímu (geometrickému) Brownovu pohybu při odhadu rizika portfolia citlivého ve stejné míře na vývoj šesti normalizovaných měnových kurzů (tři středoevropské a tři světové měny). Riziko je formulováno jako Value at Risk (conditional Value at Risk) na hladinách významnosti, které jsou dány v Basel II, Solvency II a dvěma cílovými ratingy s vysokým stupněm návratnosti, tj. 15%, 1%, 0,5%, 0,1% a 0,03%, doplněné o 5%.[2] Za účelem spojení mezních rozdělení pravděpodobnosti jsou uvažovány dvě běžné eliptické kopula funkce – Gaussova kopula funkce (symetrická, bez zdůraznění těžkých konců) a Studentova kopula funkce (symetrická, avšak se zdůrazněním těžkých konců).

V článku je postupováno následujícím způsobem. Nejprve je poskytnut stručný přehled řízení rizik finančních institucí na bázi kapitálové přiměřenosti, ekonomické kapitálu a Value at Risk (část 2). V další části je pozornost věnována definici a objasnění modelů (část 3), které budou následně aplikovány za účelem odhadu rizika (část 5). Před vlastními výpočty však dojde k vymezení datové základny a popisu empirických charakteristik vstupních měnových kurzů a normalizovaného portfolia. Srovnání jednotlivých modelů v části páté bude provedeno na bázi empirických charakteristik portfolií (modelování ex-post) i zpětného testování (modelování ex-ante).

## 2. Řízení finančních rizik ve finančních institucích

Finanční instituce, jako banky, pojišťovny, nebo investiční společnosti hrají v ekonomickém systému nezastupitelnou roli, neboť umožňují přenos kapitálu, rizika, likvidity a splatnosti mezi jednotlivými subjekty. Aby však tato funkce mohla být vykonávána opravdu efektivně, je nezbytná důvěra klientů. Zdraví finančních institucí má významný dopad na celé makroekonomické prostředí, viz například Festic a Romih (2008). V této souvislosti je nutné zmínit specifický znak finančních institucí – klienti zpravidla vystupují i jako věřitelé (*debtholders*) či případně držitelé vlastnických podílů (*equityholders*). Tento jev nastává u nefinančních institucí, tedy výrobních podniků či poskytovatelů služeb, jen velmi zřídka.

1 Tyto modely byly aplikovány pro odhad rizika v Tichý (2008a), avšak závislost byla získána na bázi jedinečného subordinátoru, nikoliv kopula funkcí. Naopak eliptické kopula funkce byly využity v Rank (2007), přičemž pro mezní rozdělení byly naopak předpokládány více standardní procesy (Studentovo rozdělení).

2 V původní koncepci Solvency II byla pro minimální kapitálový požadavek uvažována hladina významnosti 10 %, případně 20 % (příslušný kapitálový požadavek přibližně odpovídá 1/3 požadavku při významnosti 0,5 %). Nakonec však došlo k upřednostnění 15% hladiny.

Důvěra klientů je silně provázána na rizikovost subjektu, tedy spolehlivost, s jakou daná finanční instituce dodrží své závazky, ať už finanční či morální povahy. Neboť finanční operace jsou poměrně složité pro pochopení ze strany běžných klientů, nemluvě o vysoké informační náročnosti na reálné ocenění, je akceptovatelná úroveň rizikovosti subjektu často garantována nezávislými a uznávanými institucemi, ať už se jedná o ratingové agentury (*přístup na bázi ratingu*) nebo (nad)národní orgány regulace a dohledu (*přístup na bázi kapitálové přiměřenosti*). Podrobnější vymezení postupů lze nalézt v některé z monografických publikací, jako Hull (2010) nebo Resti a Sironi (2007).

### *Přístup na bázi ratingu*

O celkové strategii řízení rizik a detailních krocích jejího naplnění rozhoduje vrcholový management, přičemž by měl brát v potaz cíl subjektu v podobě cílového ratingu. Rating je obecně uznávaným měřítkem kvality subjektu, co se týče schopnosti dostát svým závazkům v požadovaném čase a míře. V případě velkých subjektů nachází uplatnění rating přiřazovaný uznávanými agenturami jako Standard&Poor's nebo Moody's, které lze považovat za nezávislé. Tyto agentury přiřazují na základě vlastního šetření vybranému subjektu ratingovou kategorii, která nejlépe vypovídá o jeho kvalitě. Přitom s každou ratingovou kategorií je spjata implikovaná pravděpodobnost selhání, zjištěná na bázi historických dat, případně upravená na základě fáze hospodářského cyklu či obdobné veličiny.

Cílový rating by měl vycházet z požadavků akcionářů a schválené strategické politiky subjektu, tj. jaký je cíl z dlouhodobého hlediska (např. maximalizace tržní hodnoty akcií) a na jaký segment trhu se společnost chce zaměřit (např. více či méně rizikově averzní klienti). Cílový rating $R$ dále implikuje pravděpodobnost selhání $PD^R$, tj. že subjekt nebude schopen dostát svým závazkům:

$$Pr\,(UL \geq AC) = PD^R, \tag{1}$$

kde $UL$ představuje neočekávanou ztrátu (*unexpected loss*), tj. skutečná ztráta snížená o ztrátu očekávanou, a $AC$ je dostupný kapitál (*available capital*), tj. kapitál, který je, či může být v případě potřeby vyhrazen pro krytí rizik. Je však nutné mít na paměti, že ztrátu očekávanou je možné odečíst pouze tehdy, pokud je zahrnuta v cenotvorbě, případně pokud na ni jsou vytvořené rezervy, které však nejsou zahrnuty do výpočtu $AC$, a že dostupný kapitál je tvořen položkami dle rozhodnutí finanční instituce, které je možné reálně považovat za dostatečně kvalitní s ohledem na pokrytí důsledků možných rizik. Kvalitou zde chápeme především splatnost a likviditu, pro některé hybridní instrumenty též riziko operační či selhání protistrany.

Z hlediska řízení rizik lze vztah (1) přeformulovat do té podoby, že subjekt musí držet dostupný kapitál alespoň ve výši kapitálu ekonomického,

$$AC \geq EC(\Delta t,\alpha), \tag{2}$$

kde $EC(\Delta t,\alpha)$ představuje ekonomický kapitál určený na hladině významnosti $\alpha$ pro časový horizont $\Delta t$, přičemž pro konkrétní portfolio $X$, respektive jeho výnos, platí:

$$EC_X(\Delta t,\alpha) = VaR_X(\Delta t,\alpha) + E(X) \tag{3}$$

Zde $E(X)$ je střední hodnota výnosu portfolia $X$ a $VaR_X(\Delta t,\alpha)$ označuje Value at Risk na hladině významnosti $\alpha$ pro časový horizont $\Delta t$, tedy minimální $x$ (minimální výnos portfolia nebo též maximální ztrátu z jeho držení), pro které platí, že pravděpodobnost, že náhodná veličina $X$ bude menší než $x$, je $\alpha$:

$$VaR_X(\Delta t,\alpha) = -\min\{x|Pr(X \leq x) \geq \alpha\}\ . \tag{4}$$

Alternativně lze potřebnou výši kapitálu provázat na kritérium na bázi střední hodnoty pro případ, že dojde k překročení hodnoty *VaR*. To může mít například následující podobu (*conditional Value at Risk*):

$$CVaR_X(\Delta t,\alpha) = -\mathrm{E}[x|-x > VaR_X(\Delta t,\alpha)]\ . \tag{5}$$

Nerovnost ve vztahu (2) by měla být co nejmenší, neboť příliš vysoké *AC* vzhledem k vypočtenému *EC* znamená neefektivní způsob řízení (drahý kapitál není využíván optimálně a je ho zbytečně hodně). Naopak opačné znaménko by znamenalo vyšší rizikovost, a tedy že kapitál není využíván v souladu s definovanou strategií a rating by měl být snížen (akcionáři i věřitelé by měli požadovat vyšší výnos). Rovnost by pak indikovala „perfektní“ způsob řízení rizik, i když to zpravidla platí jen v dlouhodobém období. Z krátkodobého hlediska je s ohledem na nejistotu, problematickou likviditu a obtíže spojené se získáváním dodatečného, respektive snižováním přebytečného kapitálu vhodné udržovat mírný převis *AC* vůči *EC*. Určitým motivem pro vyšší *AC* může být rovněž snaha ochránit tzv. *charter value*, viz například Stolz (2007).

### *Přístup na bázi kapitálové přiměřenosti*

Nezastupitelnou roli při řízení rizik finančních institucí hrají také orgány regulace a dohledu (v Evropě zejména centrální banky). Primární myšlenkou je posílit informovanost veřejnosti (klientů) a její důvěru ve finanční systém jako celek. Děje se tak jak z kvalitativního, tak kvantitativního pohledu. Neboť orgány regulace a dohledu nemají možnost rozlišit skutečný zájem a vztah k riziku akcionářů a klientů u konkrétní finanční instituce, definují své aktivity na globální bázi.

Způsob stanovení potřebného kapitálu je poněkud odlišný pro jednotlivé finanční instituce: v případě bankovního sektoru se jedná o soubor pravidel a doporučení, který vešel ve známost pod označením Basel II, v případě pojišťovnictví pak jako Solvency II, s tím, že první z nich již byl implementován do závazných právních norem a uveden v praxi. Společným znakem je, že subjekty mohou pro kvantifikaci rizik aplikovat jen takové postupy, které byly předem schváleny orgánem dohledu, a k jejich krytí může být využit jen takový kapitál, který je uznatelný (*eligible capital*), tj. předem taxativně vymezený.

Jedná-li se o tržní rizika, pak banky (Basel II) mohou postupovat dle standardního přístupu nebo dle vlastního modelu (preferován), který je zpravidla koncipován na bázi Value at Risk. Value at Risk je přitom určována na hladině významnosti 1% pro časový horizont 10 dnů, avšak pouze za předpokladu držení likvidních pozic. Kapitálový požadavek k portfoliu $X$ tedy odpovídá (*capital requirement*):

$$CR_X = VaR_X(10; 1\%) . \tag{6}$$

Banky mají povinnost určovat výši kapitálového požadavku každodenně.

Na druhou stranu, v rámci Solvency II, tedy v pojistném sektoru, se nepředpokládá silně aktivní správa portfolií – časový horizont proto je nastaven na jeden rok a v souvislosti s tím dochází ke snížení významnosti ztráty na 0,5%. Požadavek na kapitál je označován jako *solvency capital requirement*:

$$SCR_X = VaR_X(255; 0{,}5\%). \tag{7}$$

Vzhledem k poněkud odlišnému zaměření pojišťoven a relativně dlouhodobému investičnímu horizontu je v rámci Solvency II dále definována kritická úroveň kapitálu – *minimal capital requirement*:

$$MCR_X = VaR_X(255; 15\%). \tag{8}$$

Zatímco SCR je určován alespoň jednou ročně a kapitál může výjimečně klesnout i pod tuto mez, pod MCR by neměl kapitál klesnout v žádném okamžiku. Srovnání CR (6), SCR (7), MCR (8) a EC (3) je obsaženo v Tabulce 1.

Tabulka 1
**Srovnání VaR pro Basel II, Solvency II a Ekonomický kapitál**

| **Přístup** | | | **Období (obchodní dny)** | **α** |
|---|---|---|---|---|
| **Basel II** | CR | Kapitálový požadavek | 10 | 0,01 |
| **Solvency II** | SCR | Solventnostní kapitálový požadavek | 255 | 0,005 |
| **Solvency II** | MCR | Minimální kapitálový požadavek | 255 | 0,15 |
| **Ekonomický kapitál** | EC | Ekonomický kapitál | 255 | 0,0003* |

Zdroj: vlastní zpracování; * předpoklad ratingové kategorie AA s danou pravděpodobností selhání pro období následujícího roku (Hull, 2010)

## 3. Modelování tržního rizika portfolia pomocí Lévyho modelů

Je obecně známo,[3] že výnosy finančních aktiv vykazují vyšší než normální špičatost, tj. pravděpodobnost extrémních výkyvů je vyšší než u Gaussova rozdělení pravděpodobnosti, a nejsou symetricky rozdělené, tj. pravděpodobnost pozitivních výkyvů je znatelně odlišná od pravděpodobnosti negativních výkyvů, což dále souvisí s nerovností mediánu a střední hodnoty. Za účelem modelování budoucích výnosů proto je vhodné aplikovat modely, které umožňují vystižení právě těchto charakteristik.

Zajímavým přístupem, který umožňuje zohlednění jak reálné (či v případě oceňování rizikově neutrální) nesymetričnosti (šikmost), tak těžkých konců (špičatost), je aplikace Lévyho modelů řízených na bázi subordinátoru. Ačkoliv počátky teorie Lévyho modelů se skoky se vztahují až do počátku minulého století, jejich

3 Viz například Fama (1965), pro český trh pak kupříkladu Filáček a kol. (1998). Dynamiku měnových kurzů pak v nedávné době studovali například Bubák a Žikeš (2009).

relativně nestandardní definice na bázi subordinátoru (vnitřního procesu) byla dána Mandelbrotem a Taylorem (1967), Clarkem (1973) či případně Bochnerem (1949). Komplexní monografické zpracování teorie a/nebo aplikace obsahují zejména Kyprianou et al. (2005), Applebaum (2004), Cont a Tankov (2004), Barndorff-Nielsen et al. (2001) nebo Bertoin (1998). V českém prostředí byly Lévyho modely aplikovány například při ověření replikace (Tichý, 2006), oceňování opcí (Tichý, 2008b), odhadu kapitálového požadavku pro oblast pojišťovnictví (Kresta a kol, 2009) i k odhadu pravděpodobnosti selhání finančních institucí (Gurný a Tichý, 2009).

Samostatným problémem při aplikaci Lévyho modelů je, jak spojit mezní rozdělení pravděpodobnosti, tj. rozdělení pravděpodobnosti pro dílčí zdroje rizika, abychom získali rozdělení pravděpodobnosti pro komplexní portfolio $n$ finančních aktiv. Intuitivním přístupem bylo využití lineární korelace jednotlivých procesů, což vedlo buď k jedinečnému subordinátoru pro všechny náhodné složky, nebo k jednomu subordinátoru pro systematické riziko a $n$ nezávislých subordinátorů pro vyjádření jedinečného rizika jednotlivých zdrojů rizika. Tento postup našel uplatnění zejména při modelování úvěrového rizika a na něm závislých derivátů. Co se týče tržního rizika, tak v současné době je preferovaným řešením aplikace kopula funkcí, tedy projekce závislosti mezi dílčími zdroji rizika (mezními distribučními funkcemi) do jednotkového prostoru. Tímto způsobem lze efektivně rozložit sdružené rozdělení pravděpodobnosti celého portfolia na (a) mezní distribuční funkce a (b) vhodnou kopula funkci.

V případě práce s Lévyho modely je teoreticky správnějším postupem sestavit kopula funkci na bázi Lévyho míry. Pak hovoříme o tzv. Lévyho kopulích, oproti běžným kopulím, které jsou založeny na pravděpodobnostní míře. V tomto článku však budeme pro zjednodušení předpokládat pouze běžné symetrické kopule, tj. na bázi pravděpodobnostní míry pro eliptická rozdělení pravděpodobnosti.

### *Mezní rozdělení pravděpodobnosti*

Lévyho proces je obecný stochastický proces, který počíná v nule, jehož trajektorie v čase je spojitá zprava s limitou zleva a má nezávislé a stacionární přírůstky. Mezi jeho důležité vlastnosti patří stochastická spojitost, tedy že i přes nekonečnou intenzitu skoků je pravděpodobnost, že právě v daném čase dojde ke skoku (nespojitosti), rovna nule. Důležitým předpokladem též je, že odpovídající pravděpodobnostní rozdělení musí být nekonečně dělitelné. Základním teorémem je Lévyho-Khintchinova formule:

$$\Phi(u)=i\gamma u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2+\int_{-\infty}^{\infty}(\exp(\mathrm{i}ux)-1-\mathrm{i}ux\mathrm{II}_{|x|<1})\nu(dx)\ . \tag{9}$$

Na bázi (9) lze pro dané nekonečně dělitelné rozdělení pravděpodobnosti definovat trojici Lévyho charakteristik:

$$\{\gamma,\sigma^2,\ \nu(dx)\},$$

kde první představuje drift procesu (deterministickou část) a druhá určuje jeho difúzní koeficient. Poslední pak označuje tzv. Lévyho míru. Za předpokladu, že ji lze formulovat jako $\nu(dx) = u(x)dx$, pak hovoříme o Lévyho hustotě. Ta je vcelku obdobná k pravděpodobnostní funkci hustoty, nicméně nemusí vycházet z počátku a nemusí být vždy integrovatelná. Právě Lévyho hustota bývá využívána při definici Lévyho kopula funkcí.

Definujme stochastický proces $Z(t; \mu, \sigma)$, který je Wienerovým procesem (nebo též tzv. *standard Brownian motion*). Jestliže $\mu = 1$ a $\sigma = \sqrt{t}$ , pak lze přírůstky za nekonečně malý časový úsek $dt$ zapsat jako:

$$dZ = \varepsilon\sqrt{dt}, \varepsilon \in N[0,1], \tag{10}$$

kde N[0,1] označuje Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou nula rozptylem jedna. Pak lze Lévyho model na bázi subordinátoru definovat jako Brownův pohyb řízený jiným Lévyho procesem $\ell(t)$ s jednotkovou střední hodnotou a kladným rozptylem $\kappa$. Jediným omezením na tento řídící proces je, že na daném intervalu musí být neklesající a má omezenou variaci.

Tedy, běžný čas $t$ v Brownově pohybu $X$,

$$X(t; \mu, \sigma) = \mu t + \sigma Z(t) \tag{11}$$

nahradíme jeho funkcí $\ell(t)$ takto:

$$X(\ell(t); \theta, \vartheta) = \theta\ell(t) + \vartheta Z(\ell(t)) = \theta\ell(t) + \vartheta\varepsilon\sqrt{\ell(t)}\ . \tag{12}$$

Vzhledem ke svým specifickým vlastnostem a určité jednoduchosti (*tempered stable subordinator* se známou funkcí hustoty v uzavřené podobě), jsou vhodnými modely variance gamma model (VG model) – konečný proces je řízen gama procesem z gama rozdělení s parametry $a$ a $b$ v závislosti na rozptylu $\kappa$, $G[a, b]$ ; a normal inverse Gaussian model (NIG model) – subordinátor je dán inverzním Gaussovým procesem na bázi inverzního Gaussova rozdělení pravděpodobnosti, $IG[a, b]$; pro srovnání s (geometrickým) Brownovým pohybem blíže viz Tabulka 2. Další rozdílnosti modelů VG a NIG oproti geometrickému Brownovu pohybu je fakt, že ve vztahu (12) není přímo kalibrován drift reálného procesu. K tomu je třeba dodatečný vztah – například pro modelování výnosů $x$ lze postupovat dle:

$$x(t) = \mu t + X(\ell(t)) - \theta t, \tag{13}$$

Kde $-\theta t$ představuje korekci (12) na střední hodnotu nula a $\mu$ je reálný drift modelovaného procesu. Obdobně lze postupovat při formulaci modelu s Lévyho procesem $X$ v exponentu (tj. alternativa ke geometrickému Brownově pohybu):

$$x(t) = x(0) \exp[\mu t + X(\ell(t)) - \omega t] \tag{13}$$

při parametru korekce $\omega$.

Tabulka 2
**Srovnání vybraných modelů**

| Model | Šikmost | Špičatost | Vnitřní čas |
|---|---|---|---|
| Brownian motion | 0 | 0 | Ekvivalentní k *t* |
| Variance gamma $VG(\ell(t);\theta,\vartheta)$ | nenulová pokud $\theta \neq 0$; její znaménko odpovídá znaménku $\theta$ | dodatečná | $\ell(t) \in G[a,b]$ |
| Normal inverse Gaussian $NIG(\ell(t);\theta,\vartheta)$ | nenulová pokud $\theta \neq 0$; její znaménko odpovídá znaménku $\theta$ | dodatečná | $\ell(t) \in IG[a,b]$ |

Zdroj: Vlastní zpracování

### *Modelování závislostí pomocí kopula funkcí*

Kopula funkce představují vhodný prostředek pro modelování závislostí komplexněji pojatých portfolií, jejichž hodnota závisí na více různorodých procesech či alespoň na procesech složitějších, které neumožňují využití jednodušších prostředků, jako je Choleskyho dekompozice. Kopula funkce[4] je definována jako projekce závislosti mezi jednotlivými rozděleními pravděpodobnosti na interval [0,1],

$$C\colon [0,1]^n \rightarrow [0,1] \text{ na } \mathbb{R}^n,\ n \in \{2, 3, ...\}. \tag{14}$$

Z určitého pohledu lze jakoukoliv kopula funkci považovat za vícerozměrné rozdělení pravděpodobnosti na normovaném rovnoměrném rozdělení.

Pro zjednodušení předpokládejme dvě potenciálně závislé náhodné veličiny s mezními distribučními funkcemi $F_X$, $F_Y$ a sdruženým rozdělením pravděpodobnosti $F_{X,Y}$ . Pak dle Sklarova teorému (Sklar, 1973; Nelsen, 2006):

$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \tag{15}$$

Pokud jsou $F_X$, $F_Y$ , spojité, je kopula funkce jedinečná. Sklarův teorém dále implikuje pro (15) i inverzní vztah:

$$C(u,v) = F_{X,Y}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)). \tag{16}$$

Předpokládáme-li, že mezní rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých zdrojů rizika je již známo, je třeba zvolit pouze vhodnou kopula funkci. Přitom lze rozlišit dvě základní skupiny, kopula funkce na bázi eliptických rozdělení pravděpodobnosti a Archimédovy kopula funkce. Rozdíl spočívá v tom, že pro definici a odhad prvních lze využít odpovídajícího sdruženého rozdělení pravděpodobnosti (Gaussovo, Studentovo), ve druhém se pak pracuje s generující funkcí.

4 V tomto článku se omezujeme na běžné kopula funkce. Základním odkazem pro kopula funkce je Nelsen (2006), zatímco Rank (2007) a Cherubini et al. (2004) cílí především na aplikační stránku ve financích.

### *Odhad parametrů*

Za účelem odhadu parametrů kopula funkcí lze rozlišit tři základní skupiny přístupů: EMLM (*exact maximum likelihood method*), IFM (*inference function for margins*) a CML (*canonical maximum likelihood*). V prvém případě jsou všechny parametry odhadovány v rámci jednoho kroku, což může být náročné zejména pro vícerozměrné úlohy. U dalších metod se postupuje zvlášť pro mezní rozdělení a zvlášť pro kopula funkci. Avšak zatímco u IFM se nejprve odhadnou parametry mezních rozdělení, se kterými se dále pracuje při odhadu parametrů kopula funkce, v případě CML je namísto parametrických mezních rozdělení pravděpodobností využito empirických rozdělení pravděpodobnosti, tj. neparametrického přístupu. Více detailů je možné nalézt například v Cherubini et al. (2004). V tomto článku budeme pracovat na bázi přístupu IFM.

## 4. Data

Pro srovnání úspěšnosti jednotlivých modelů při odhadu rizika se bude pracovat s denními měnovými kurzy šesti měn, a to eura (EUR), britské libry (GBP), maďarského forintu (HUF), polského zlotého (PLN), slovenské koruny (SKK) a amerického dolaru (USD), vůči české koruně (CZK) tak, jak jsou zveřejňovány Českou národní bankou. Datová základna obsahuje kotace počínaje 1. lednem 2000 až po 31. prosinec 2008, tedy 2 268 pozorování spojitých (logaritmických) výnosů pro každý měnový kurz. Základní popisné statistiky – střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka, šikmost a špičatost – pro každý z měnových kurzů (jejich výnosy) lze vyhodnotit na základě Tabulky 3.

Tabulka 3
**Popisné statistiky denních spojitých výnosů (p.a.)**

| Parametr | EUR | GBP | HUF | PLN | SKK | USD |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **mean** | –0,032 | –0,079 | –0,037 | –0,032 | 0,005 | –0,068 |
| **variance** | 0,0037 | 0,0088 | 0,0074 | 0,0106 | 0,0043 | 0,0135 |
| **St.deviation** | 0,0161 | 0,094 | 0,096 | 0,1030 | 0,065 | 0,116 |
| **skewness** | –0,131 | –0,236 | –0,737 | –0,410 | 0,209 | 0,029 |
| **kurtosis** | 13,010 | 9,357 | 9,951 | 11,511 | 11,192 | 6,829 |

Zdroj: Vlastní výpočty

Je zřejmé, že střední hodnoty (*mean*) jsou s výjimkou SKK záporné, tj. česká koruna v rozhodném období v průměru posilovala, ať už méně (EUR, HUF, PLN) či více (GBP, USD). Obdobné rozdíly jsou patrné pro volatilitu jednotlivých měnových kurzů – přitom lze vysledovat dvojici méně volatilní (EUR a SKK – tedy úzce provázané a častěji obchodované). Ostatní měnové kurzy mají volatilitu relativně vyšší (GBP, HUF, PLN, USD).

Mírné posílení SKK je spojeno s kladnou šikmostí, zatímco ostatní měnové kurzy vykazují zápornou šikmost spojitých výnosů. Výjimku pak představuje USD s téměř symetrickým rozdělením výnosů. Co se týče špičatosti, kterou lze chápat také jako pravděpodobnost extrémních výnosů, vykazuje většina měnových kurzů velmi vysoké hodnoty (nejvyšší je pro EUR). Výjimku opět tvoří USD, nicméně i zde je nutné na základě testů Jarque-Bera typu odmítnout předpoklad Gaussova rozdělení pravděpodobnosti.

Ve studii Lévyho modelů na bázi jedinečného subordinátoru (Tichý, 2008a) se pracovalo se stejnou datovou bází, avšak bez roku 2008. Nyní tak můžeme zdůraznit některé odlišnosti, které přineslo zahrnutí roku 2008 – roku nadměrné nestability. Došlo k růstu směrodatné odchylky o přibližně 1% (absolutně), dodatečná špičatost vzrostla dvakrát až třikrát (mimo HUF a PLN), především v důsledku velkého počtu významných výkyvů v měnových kurzech, a to s kladným znaménkem (tj. oslabení CZK). Tato skutečnost dále vedla k výraznému oslabení záporné šikmosti.

Ačkoliv je význam empiricky zjištěných hodnot korelací v případě výnosů, které nesplňují předpoklad Gaussova rozdělení pravděpodobnosti, často přeceňován, stále hraje významnou roli. Z tabulky 4 můžeme vidět, že měřítko lineární závislosti (Pearsonovo $\rho$) se převážnou měrou pohybuje v rozmezí 0,31 a 0,47, s několika málo výjimkami na obě strany. Nejvyšší korelace je dle očekávání pro dvojici měnových kurzů, u kterých lze předpokládat nejvyšší provázanost (EUR, SKK), zatímco nejnižší korelaci vykazuje (GBP, USD), tedy dvě relativně vzdálené ekonomiky, z pohledu vazby k té české.

Tabulka 4

**Lineární koeficient korelace výnosů jednotlivých měn vzhledem k CZK.**

| | EUR | GBP | HUF | PLN | SKK | USD |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **EUR** | 1 | 0,58 | 0,39 | 0,25 | 0,71 | 0,47 |
| **GBP** | 0,58 | 1 | 0,26 | 0,35 | 0,45 | 0,65 |
| **HUF** | 0,39 | 0,26 | 1 | 0,48 | 0,45 | 0,14 |
| **PLN** | 0,25 | 0,35 | 0,46 | 1 | 0,34 | 0,31 |
| **SKK** | 0,71 | 0,37 | 0,45 | 0,34 | 1 | 0,31 |
| **USD** | 0,47 | 0,65 | 0,14 | 0,31 | 0,31 | 1 |

Zdroj: Vlastní výpočty

Vzhledem k tomu, že tato práce je zaměřena především na schopnost běžných eliptických kopula funkcí vystihnout riziko na měnové kurzy citlivého portfolia, není vztah výnos a riziko (směrodatná odchylka) natolik významný, jako šikmost a špičatost (tj. odchylky od normálnosti výnosů). Časová řada spojitých výnosů je proto normalizována tak, abychom získali nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.

Normalizace podkladových výnosů nám dále umožňuje sestavit jednoduché portfolio se stejnou citlivostí na jednotlivé měnové kurzy. Popisné statistiky pro takové portfolio, jak na bázi celé časové řady normalizovaných spojitých výnosů, tak pro dílčí čtyřleté subintervaly jsou zachyceny v tabulce 5.

Neboť střední hodnota výnosů jednotlivých měnových kurzů je po příslušné normalizaci nulová, musí být nulový i výnos jednotlivých portfolií. Na základě porovnání hodnot rozptylu a směrodatné odchylky je vidět významný efekt diverzifikace v jednotlivých subintervalech – pokles rozptylu z jedné (dokonalá závislost) na jednu polovinu, přičemž tento pokles je významnější v pozdějších časových úsecích.

Mnohem důraznější však je dopad na šikmost a špičatost – nahrazení roku 2004 rokem 2008 znamená pro čtyřletý časový úsek trojnásobnou špičatost (šestinásobná dodatečná) a dvojnásobnou šikmost, avšak s opačným znaménkem. Právě rok 2008 tak výrazně ovlivňuje hodnoty i pro celé sledované období (2000–2008).

Tabulka 5
**Popisná statistika portfolií se stejnou citlivostí na jednotlivé měnové kurzy**

| Parametr | 2000-2008 | 2000-2003 | 2001-2004 | 2002-2005 | 2003-2006 | 2004-2007 | 2005-2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Mean** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **Variance** | 0,508 | 0,528 | 0,558 | 0,554 | 0,449 | 0,457 | 0,487 |
| **St.dev.** | 0,712 | 0,727 | 0,747 | 0,745 | 0,670 | 0,676 | 0,698 |
| **Skewness** | 0,114 | –0,476 | –0,478 | –0,453 | –0,390 | –0,403 | –0,831 |
| **Kurtosis** | 10,108 | 6,587 | 6,463 | 6,578 | 5,102 | 5,210 | 15,528 |
| **VaR(0,15)** | 0,594 | 0,614 | 0,638 | 0,646 | 0,620 | 0,637 | 0,559 |
| **VaR(0,05)** | 1,100 | 1,204 | 1,233 | 1,193 | 1,114 | 1,136 | 1,025 |
| **VaR(0,01)** | 1,196 | 2,071 | 2,139 | 2,186 | 1,988 | 1,817 | 1,807 |
| **VaR(0,005)** | 2,717 | 2,935 | 2,988 | 3,150 | 2,521 | 2,263 | 2,671 |
| **VaR(0,001)** | 4,048 | 9,974 | 4,079 | 4,378 | 3,624 | 4,018 | 4,775 |
| **VaR(0,0003)** | 4,789 | – | – | – | – | – | – |

Zdroj: Vlastní výpočty

Zahrnutí roku 2008 má znatelný dopad i při výpočtu hodnot VaR, i když z výsledků v tabulce 5 je zřejmé, že distribuční charakter je velmi rozdílný i pro ostatní intervaly – zatímco některé hodnoty VaR rostou, jiné pro stejnou posloupnost roků klesají. Velmi vysoká pravděpodobnost extrémních scénářů, nebo přesněji pravděpodobnost velmi extrémních ztrát v roce 2008 má za následek, že pro období 2005-2008 je VaR(0,001) je nejvyšší, zatímco ostatní VaR jsou obecně nižší.

## 5. Porovnání jednotlivých modelů

Základním cílem článku je porovnat schopnost zvolených modelů vystihnout výši tržního rizika portfolia, které je citlivé na měnové riziko, přičemž je brán ohled zejména na empirické hodnoty špičatosti a šikmosti logaritmických výnosů. Při výpočtech obecně předpokládáme čtyři různé úrovně hladiny spolehlivosti,1 – $\alpha$ = {0,85; 0,95; 0,99; 0,995; 0,999; 0,9997}. Zatímco první odpovídá původnímu minimálnímu kapitálovému požadavku (MCR – Solvency II), třetí je spjata s kapitálovým požadavkem dle Basel II, čtvrtá odpovídá solventnostnímu kapitálovému požadavku (SCR – Solvency II). Poslední dvě úrovně pak odpovídají pravděpodobnosti přežití implikované nadprůměrným, respektive vynikajícím ratingem.

Pro odhad mezního rozdělení pravděpodobnosti podkladových výnosů jsou aplikovány dva nejběžnější Lévyho modely na bázi subordinátoru, VG (variance gamma) model a NIG (normal inverse Gaussian) model. Pro účely srovnání budeme předpokládat i jednoduchý (geometrický) Brownův pohyb (GBM). Modely mezního rozdělení pravděpodobnosti budou dále spojeny pomocí dvou různých běžných eliptických kopula funkcí (Gaussova a Studentova). Pro jednotlivé modely tak budeme používat toto značení: GBM-G, VG-G, NIG-G a GBM-St, VG-St, NIG-St. V následující části jsou jednotlivé modely využity pro odhad parametrů portfolia ex-post, poté dochází k odhadu ex-ante a jeho ověření pomocí metody zpětného testování.

### *Ex-post modelování*

Za účelem odhadu parametrů pravděpodobnostního rozdělení portfolia ex-post postupujeme takto. Nejprve je provedena normalizace časové řady jednotlivých výnosů měnových kurzů, a to pro zvolený časový úsek (celé sledované období/čtyři po sobě jdoucí celé roky). Dále je odhadnuta empirická šikmost a špičatost mezních rozdělení pravděpodobnosti (střední hodnota i rozptyl jsou již známy). Tyto čtyři parametry představují vstupy pro odhad parametrů mezního rozdělení pravděpodobnosti pomocí (zobecněné) metody momentů (GBM, VG, NIG). Následně je odhadnuta funkce závislosti mezních rozdělení pravděpodobnosti, tedy kopula funkce a její parametry – korelační matice (Gaussova kopula funkce), respektive korelační matice a počet stupňů volnosti (Studentova kopula funkce). Po zjištění všech parametrů je přikročeno k simulaci závislých výnosů jednotlivých měn pomocí simulace Monte Carlo při $n$ = 1 000 000 nezávislých scénářů (viz například Tichý, 2008b):

1. Získání náhodných veličin $x_i^{(j)}$ dle vícerozměrného Gaussova (Studentova) rozdělení o dimenzi $d$ (portfolio je citlivé vůči $i = 1, ..., d$ odlišných aktiv – měnových kurzů, $d = 6$) při zohlednění empirické závislosti dané korelační maticí (a případně počtem stupňů volnosti);

2. Transformace náhodných proměnných $x_i^{(j)}$ na jednotkový interval – tímto způsobem je získána kopula funkce, nebo též “závislé pravděpodobnosti”, $p_i^{(j)}$ :

   $p_i^{(j)} = F_N\left(x_i^{(j)}\right)$;

3. Získání náhodného vývoje pro každý z měnových kurzů na základě “závislých pravděpodobností” – předpokládáme-li, že $i$-té aktivum má distribuční funkci $F_i$, můžeme získat náhodný výnos $r$ pro daný scénář $j$ takto:

   $r_i^{(j)} = F_i^{-1}(p_i^{(j)})$;

   *Poznámka: Neboť získání hodnoty inverzní funkce k distribuční funkci některých pravděpodobnostních rozdělení (VG, NIG) může být výpočetně velmi náročné, lze postup zjednodušit tak, že analytický výpočet nahradíme simulačním, tj. náhodné realizace pro danou distribuční funkci setřídíme dle* $p_i^{(j)}$ .

4. Sestavení stejnoměrně citlivého portfolia (výnos portfolia pro každý scénář $j$). Poté, co je zjištěn výnos na jednotlivé měny stejnoměrně citlivého portfolia, dochází k určení prvních čtyř momentů (střední hodnota, směrodatná odchylka/rozptyl, šikmost, špičatost) a VaR (CVaR) pro zvolené úrovně významnosti.

Předpokládejme nejprve celou časovou řadu, tedy výnosy za období let 2000 až 2008, což nám dává přibližně 340, 113, 23, 11, 2 a 1 pozorování pro jednotlivé úrovně významnosti $\alpha$. Výsledky simulací dle jednotlivých modelů jsou obsaženy v Tabulce 6 (počet stupňů volnosti $m = 5$). Odhad střední hodnoty výnosů je vcelku dobrý, dochází však k nepatrné odchylce v rozptylu a směrodatné odchylce, zejména pro VG-G a NIG-G modely. Zbylé modely fungují vcelku dobře.

Detailněji je nutné okomentovat výsledky pro šikmost a špičatost výnosů portfolia. Připomeňme nejprve, že obě kopula funkce jsou symetrické. Nemělo by tedy docházet k vychýlení závislosti ať už na jednu či druhou stranu a vystižení empiricky pozorovaného vychýlení. To však není potvrzeno výsledky dle příslušného řádku tabulky (mimo oba GBM modely) ze dvou důvodů (1) počet pokusů $n$ = 1 000 000 není dostatečný pro kompenzaci výnosů jednotlivých složek portfolia; (2) v případě VG a NIG modelů se předpokládá přítomnost v zásadě negativní šikmosti u mezního rozdělení pravděpodobnosti – jelikož kopula funkce neumožňuje její kompenzaci pomocí posílení empiricky pozorované závislosti pozitivních, zejména extrémních výchylek (oslabení české koruny), jsou výsledné hodnoty jakýmsi zprůměrováním. Přitom platí, že Studentova kopula funkce přináší díky zdůraznění závislostí extremních scénářů její posílení.

Situace je poněkud odlišná pro hodnoty špičatosti. GBM model sám osobě totiž neumožňuje modelovat dodatečnou špičatost, což lze jen mírně vylepšit zohledněním vyšší závislosti extrémních scénářů pomocí Studentovy kopula funkce. Mnohem lepší výsledky ukazuje aplikace Lévyho modelů na bázi subordinátoru, neboť právě ty umožňují posílení extrémních scénářů u mezního rozdělení pravděpodobnosti. Aplikace Gaussovy kopula funkce umožňuje částečné zlepšení (závislost extrémních scénářů stále není zohledněna a tak dochází k jejich částečné kompenzaci), využití Studentovy kopula funkce při $df = 5$ pak téměř dokonalé sladění, přičemž rozdílnost mezi modely NIG a VG není statisticky významná (na základě $k$ opakování stanoveného počtu $n$ scénářů).

Více podrobné posouzení může být učiněno na základě měřítek rizika VaR a CVaR pro příslušné úrovně významnosti. Co se týče hodnot VaR, je zřejmé, že GBM nadhodnocuje riziko pro $\alpha = 0{,}15$ (MCR v rámci Solvency II) a mírně i pro $\alpha = 0{,}05$, oproti tomu pro nižší hodnoty významnosti dochází k silnému podcenění rizika, což není znatelně vylepšeno ani při aplikaci GBM-St. Obdobně slabé výsledky lze pozorovat při určení CVaR.

Tabulka 6

**Stejnoměrně citlivé portfolio – simulace Monte Carlo, *df* = 5**

| Parametr | 2000-8 | GBM-G | VG-G | NIG-G | GBM-St | VG-St | NIG-St |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **mean** | 0,000 | –0,001 | –0,001 | 0,001 | 0,000 | –0,001 | 0,000 |
| **variance** | 0,508 | 0,507 | 0,476 | 0,487 | 0,503 | 0,500 | 0,503 |
| **st.dev.** | 0,712 | 0,712 | 0,690 | 0,698 | 0,709 | 0,707 | 0,709 |
| **skewness** | 0,114 | 0,002 | –0,112 | – 0,102 | –0,001 | –0,169 | –0,186 |
| **kurtosis** | 10,109 | 2,999 | 6,191 | 5,744 | 3,654 | 10,625 | 10,466 |
| **VaR(0,15)** | 0,594 | 0,738 | 0,591 | 0,621 | 0,708 | 0,541 | 0,575 |
| **VaR(0,05)** | 1,100 | 1,171 | 1,130 | 1,126 | 1,160 | 1,099 | 1,087 |
| **VaR(0,01)** | 1,996 | 1,655 | 1,935 | 1,902 | 1,733 | 2,106 | 2,031 |
| **VaR(0,005)** | 2,717 | 1,836 | 2,282 | 2,244 | 1,960 | 2,556 | 2,488 |
| **VaR(0,001)** | 4,047 | 2,186 | 3,156 | 3,102 | 2,508 | 3,891 | 3,832 |
| **VaR(0,0003)** | 4,789 | 2,428 | 3,808 | 3,754 | 2,863 | 4,768 | 4,889 |
| **CVaR(0,15)** | 1,082 | 1,108 | 1,083 | 1,089 | 1,106 | 1,088 | 1,084 |
| **CVaR(0,05)** | 1,670 | 1,469 | 1,631 | 1,611 | 1,522 | 1,738 | 1,695 |
| **CVaR(0,01)** | 2,702 | 1,893 | 2,466 | 2,419 | 2,078 | 2,864 | 2,799 |
| **CVaR(0,005)** | 3,331 | 2,063 | 2,826 | 2,787 | 2,261 | 3,308 | 3,294 |
| **CVaR(0,001)** | 4,418 | 2,378 | 3,711 | 3,677 | 2,800 | 4,773 | 4,830 |
| **CVaR(0,0003)** | 4,789 | 2,599 | 4,418 | 4,444 | 3,144 | 5,868 | 6,121 |

Zdroj: Vlastní výpočty

V případě aplikace modelů VG a NIG ve spojitosti s Gaussovou kopula funkcí je možné dosáhnout velmi dobré výsledky pro $\alpha = 0{,}1$ (CR v rámci Basel II), nicméně pro nižší významnosti (tj. SCR v rámci Solvency II a EC pro vysoký rating) tyto modely opět znatelně zaostávají. Pro účely vytvoření portfolia, tj. získání závislosti náhodných mezních výnosů, tedy je nezbytné aplikovat Studentovu kopula funkci. Tato zjištění jsou podpořeny při srovnání hodnot CVaR, přičemž simulační výsledky CVaR pro velmi nízké úrovně významnosti dle modelů GV-St a NIG-St se zdají být pravdivějším vystižením reality než empiricky zjištěná čísla (pro $\alpha = 0{,}001$ můžeme uvažovat pouze dvě pozorování, pro $\alpha = 0{,}0003$ pak nanejvýš jedno)

Stejné modely byly vyhodnoceny rovněž pro dílčí subintervaly zahrnující vždy čtyři celé roky. K nejvýznamnějším zjištěním patří následující: měnící se empirický rozptyl portfolia vede k odlišným odhadům korelační matice; počet stupňů volnosti pro období 2002–2005 je 4 (empirická špičatost je sice přibližně stejná, nicméně došlo k posunu závislosti těžkých konců) a pro období 2005–2008 je 3; první dva momenty jsou obecně velmi dobré pro všechny modely; většina zjištění ohledně šikmosti a špičatosti z Tab. 5 pro jednotlivé modely je opětovně potvrzena; VG-G a NIG-G modely překonávají GBM-St tím více, čím je empirická špičatost vyšší; při vyloučení roku 2008 je modelování šikmosti velmi dobré.

### *Modelování ex-ante (zpětné testování)*

Druhou aplikační oblastí, na kterou se v tomto článku zaměřujeme, je ověření spolehlivosti odhadu rizika pomocí tzv. procedury zpětného testování: v daný den $t$ jsou odhadnuty jednotlivé parametry rizika na bázi VaR pro den $t + 1$ dle zvolených modelů (viz výše, tentokrát však pouze s využitím $n = 10\,000$ scénářů), a to na bázi dat za předchozí čtyři roky (čtyři roky se ukázaly jako ideální pro odhad šikmosti a zejména špičatosti – tj. pravděpodobnosti extrémních scénářů), respektive jeden rok (parametry kopula funkcí, tj. korelační matice a případně počet stupňů volnosti); odhad rizika je porovnán se skutečnou realizovanou ztrátou za období ($t$, $t + 1$) – v případě, že je realizovaná ztráta vyšší, je daný den označen jako výjimka; takto se postupuje od počátku roku 2004 po konec roku 2008; celkový počet výjimek je sečten a porovnán s empirickým předpokladem. Vzhledem k množství dat je riziko sledováno pouze pro spolehlivosti $\alpha = \{0,15; 0,05; 0,01; 0,005; 0,001\}$. To postupně znamená předpoklad 126,7, 63,35, 12,67, 6,33 a 1,267 výjimek. Zvažované modely zůstávají stejné jako výše, úspěšnost odhadu je určena na základě Kupiecova testu (Kupiec, 1995) pro pravděpodobnosti 1% (***), 5% (**) a 10% (*).

Výsledky jsou zřejmé z tabulky 6. Podívejme se nejprve na počet výjimek, získaných při určování MCR ($\alpha = 0,1$) v rámci Solvency II – při modelování ex-post nám Lévyho modely poskytovaly vcelku přesný odhad hodnoty VaR, kdežto zjednodušující model GBM riziko nadhodnocoval. Nyní je opět patrné, že GBM model riziko nadhodnocuje (výchylek je méně). Naopak Lévyho modely jsou v počtu překročení výchylek mírně úspěšnější.

Pro úroveň významnosti 0.05 je úspěšnost jednotlivých modelů přibližně stejná – riziko je mírně podhodnoceno, neboť počet výchylek je vyšší, než bychom předpokládali. Situace se dále obrací při CR dle Basel II – GBM-G (-St) je zcela neúspěšný, VG-G a NIG-G jsou úspěšné spíše podprůměrně. To platí i pro dále se snižující významnost (počet výjimek pro GBM-G relativně roste). Naopak mezní Lévyho modely sdružené pomocí Studentovy kopula funkce poskytují téměř přesný odhad rizika, což vede k počtu výjimek jen mírně odlišného od toho, který je předpokládán.

Tabulka 7

**Počet výjimek pro období 2004–2008, kombinovaný odhad**

| | Předpoklad | GBM-G | VG-G | NIG-G | GBM-St | VG-St | NIG-St |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **VaR(0,15)** | 189,9 | 168** | 183*** | 181*** | 175*** | 204*** | 193*** |
| **VaR(0,05)** | 63,35 | 75*** | 76*** | 75*** | 75*** | 76*** | 79** |
| **VaR(0,01)** | 12,67 | 25 | 19** | 18*** | 23* | 12*** | 14*** |
| **VaR(0,005)** | 6,33 | 16 | 11** | 10** | 16 | 7*** | 8*** |
| **VaR(0,001)** | 1,27 | 8 | 4** | 5 | 7 | 2*** | 2*** |
| **VaR(0,0003)** | 0,38 | 7 | 2** | 2** | 3 | 2** | 2** |

Lze akceptovat dle Kupiecova testu na hladině p = 1 %(***), p = 5 %(**), p = 10 %(*),

Zdroj: Vlastní výpočty

Jiným problémem, který při odhadu rizika a sledování jeho kvality na bázi výjimek může nastat, je existence shluků. V tomto případě lze k testování využít test Christoffersona (1998) – při aplikaci VG-St a NIG-St modelů je možné shluky považovat za nevýznamné na hladině pravděpodobnosti 1%.

## 6. Závěr

Modelování finančního rizika vyplývajícího z (neočekávaného) posunu měnových kurzů je nezbytnou součástí řízení rizik ve finančních institucích. V tomto článku byly aplikovány vybrané Lévyho modely (VG, NIG) sdružené pomocí běžných eliptických kopula funkcí jako prostředek pro modelování rizika na měnové kurzy citlivého portfolia a srovnány vůči běžnému předpokladu normálního rozdělení (GBM). Jednotlivé modely byly posouzeny jak při modelování ex-post, tak ex-ante.

Co se týče modelování ex-post, GBM model, byť spojený pomocí Studentovy kopula funkce, se ukázal jako zcela nevyhovující pro vystižení rizika (nadhodnocení pro nižší spolehlivost, podhodnocení pro vyšší spolehlivost). Naopak VG a NIG modely, zejména při využití Studentovy kopula funkce, prokázaly vysokou schopnost vystižení skutečné míry rizika, jak pomocí VaR, tak CVaR. V případě modelování ex-ante a následném backtestingu fungoval GBM model lépe (a téměř dokonale) pro nižší spolehlivost (85% a 95%), avšak velmi slabě pro ostatní úrovně $\alpha$. Nejlepšími opět byly modely VG-St a NIG-St, které se ukázaly jako akceptovatelné i pro nízké hladiny pravděpodobnosti. Odhad závislostí, tedy parametrů kopula funkcí, na bázi ročních dat rovněž umožnil vyloučit nerovnoměrné rozdělení výchylek (jejich shluky).

Celkově lze shrnout, že aplikace Lévyho modelů na bázi subordinátoru, byť spojených běžnými kopula funkcemi, představuje zajímavou a efektivní alternativu při odhadu úrovně tržního rizika.

### Literatura


APPLEBAUM, D. 2004. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

BARNDORFF-NIELSEN, O.E., MIKOSCH, T., RESNICK, S.I. (eds.) 2001. *Lévy processes. Theory and Applications*. Boston: Birkhäuser. 2001.

BARNDORFF-NIELSEN, O. E. 1995. Normal inverse Gaussian distributions and the modeling of stock returns, *Research report* No. 300, Department of Theoretical Statistics, Aarhus University, 1995.

BARNDORFF-NIELSEN, O. 1998. E. Processes of Normal Inverse Gaussian type, *Finance and Stochastics*. 1998, vol. 2, No. 1, pp. 41–68.

BERTOIN, J. 1998. *Lévy Processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

BOCHNER, S. 1949. Diffusion equation and stochastic processes. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, Vol. 85, 1949, pp. 369–370.

BUBÁK, V., ŽIKEŠ, F. Distribution and Dynamics of Central-European Exchange Rates: Evidence from Intraday Data. *Czech Journal of Economics and Finance* Vol. 59 No. 4, pp. 334-359, 2009.

CLARK, P. K. 1973. A subordinated stochastic process model with fixed variance for speculative prices. *Econometrica* 41, pp. 135–-156, 1973.

CONT, R., TANKOV, P. 2004. *Financial Modelling with Jump Processes*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC press, 2004.

FAMA, E. F. 1965. The Behaviour of Stock Market Prices. *Journal of Business*. 1965, Vol. 38, pp. 34–105.

FESTIC, M, ROMIH, D. 2008. Cyclicality of the banking sector performance and macro environment in the Czech republic, Slovakia and Slovenia. *Prague Economic Papers* Vol. 17, No. 2, pp. 99-117.

FILÁČEK J., KAPIČKA M., VOŠVRDA M. 1998. Testování hypotézy efektivního trhu na BCPP, *Czech Journal of Economics and Finance* Vol. 48, No. 9, pp. 554-566.

GURNÝ, P., TICHÝ. T. 2009. Estimation of Future PD of Financial Institutions on the Basis of Scoring Model. In: Polouček, S. and Stavárek, D. (ed.) *Structural and Regional Impacts of Financial Crises. Proceedings of 12th International Conference on Finance and Banking*. Karvina: Silesian University, 2009, pp. 215-228.

HULL, J.C. 2010. *Risk Management and Financial Institutions*. 2e. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2010.

CHERUBINI, G., LUCIANO, E., VECCHIATO, W. 2004. *Copula Methods in Finance*. Chichester: Wiley, 2004.

CHRISTOFFERSON, P.F. 1998. Evaluating Interval Forecasts, *International Economic Review* 39, pp. 841–862, 1998.

KRESTA, A., PETROVÁ, I., TICHÝ, T. 2009. Market Risk Capital Requirements for Insurance Companies by Copula Approach. In: Polouček, S. and Stavárek, D. (ed.) *Structural and Regional Impacts of Financial Crises. Proceedings of 12th International Conference on Finance and Banking. Karvina: Silesian University, 2009*, pp. 318-334.

KUPIEC, P. 1995. Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives* **3**, pp. 73–84, 1995.

KYPRIANOU, A., SCHOUTENS, W., WILMOTT, P. (eds.) 2005. *Exotic Options Pricing and Advanced Lévy Models*. Chichester: Wiley, 2005.

MADAN, D.B., SENETA, E. 1990. The VG model for Share Market Returns, *Journal of Business* Vol. **63**, No. 4, pp. 511–524, 1990.

MADAN, D.B., CARR, P., CHANG, E.C. 1998. The variance gamma process and option pricing, *European Finance Review* **2**, 79–105, 1998.

MADAN, D.B., MILNE, F. 1991. Option pricing with VG martingale components, *Mathematical Finance* **1**, 39–56, 1991.

MANDELBROT, B.H., TAYLOR, H.M. 1967. On the distribution of stock price differences. *Operations Research* **15**, 1057–1062, 1967.

NELSEN, R.B. 2006. *An Introduction to Copulas*. 2nd ed. New York: Springer, 2006.

RANK, J. 2007. *Copulas. From theory to application in finance.* London: Risk books, 2007.

RESTI, A., SIRONI, A. 2007. *Risk Management and Shareholders' Value in Banking: From Risk Measurement Models to Capital Allocation Policies*. Chichester: Wiley, 2007.

SKLAR, A. 1973. Random variables, joint distributions, and copulas. *Kybernetica*, vol 9, 449-460.

STOLZ, S.M. 2007. *Bank Capital and Risk-Taking*. Kiel Studies 337. Berlin: Springer.

TICHÝ, T. 2006. Model Dependency of the Digital Option Replication: Replication under Incomplete Model. *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance* Vol. 56, No. 7-8, pp. 361-379.

TICHÝ, T. 2008a. Dependency models for a small FX rate sensitive portfolio. In: Stavárek, D. and Polouček, S. (ed) *Consequences of the European Monetary Intergration on Financial Markets.* Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2008.

TICHÝ, T. 2008b. Posouzení vybraných možností zefektivnění simulace Monte Carlo při opčním oceňování. *Politická ekonomie* Vol. 56, No. 6, pp. 772–794, 2008.

# EXAMINATION OF PORTFOLIO CURRENCY RISK ESTIMATION BY MEANS OF LÉVY MODELS

**Tomáš Tichý**, Department of Finance, Faculty of Economics, Technical University Ostrava, Sokolská 33, 701 21 Ostrava, Czech Republic. E-mail: tomas.tichy@vsb.cz.

**Abstract**

Financial risk modeling, measuring, and managing are an inherent part of management in financial institutions. It is also an important step within the setting of optimal level of capital eligible to cover risk exposures. A significant portion of capital is usually assigned to cover the risk of unexpected changes in FX rates. FX rates (the returns) commonly exhibit significant skewness and relatively huge kurtosis. In this paper, we apply subordinated Lévy models coupled together by ordinary elliptical copula functions in order to estimate the FX rate risk of normalized portfolio. Selected models are applied in order to estimate the risk ex-post, as well as ex-ante. The models are also compared to the more standard assumption of the joint normal distribution. Although the results for both types of modeling are quite different and Lévy measure is ignored, suggested models deliver us improved risk estimation.

**Keywords**

Lévy models, variance gamma model, normal inverse Gaussian model, ordinary elliptical copula function, financial risk, backtesting

**JEL Classification**

C4, C5, G2