ODHAD PARAMETRŮ ROZŠÍŘENÉHO KALDOROVA MODELU A ANALÝZA STABILITY STACIONÁRNÍHO ŘEŠENÍ

DOI: 10.18267/j.polek.1096

Jan Kodera, Quang Van Tran*

Abstract

An Inflation Analysis Using an Endogenous Business Cycle Model

In this article we analyze the continuous inflation dynamics using a four-equation model. When constructing the model, the traditional Kaldorian two-equation model is extended by adding two other equations. One of them describes an adaptive inflation expectations and the other continuous dynamics of the money market. In this setting, the instability velocity of money circulation is assumed due to the effects of expected inflation on money circulation velocity. Then the parameters of the model are estimated using the real Czech economic data. As it is a non-linear model in its parameters, a non-linear estimation technique is used for this purpose. Further, the stationarity as well as the stability of the estimated model is thoroughly examined as its instability may indicate that the model can generate some complex dynamics.

Keywords: Kaldorian model, monetary inflation model, nonlinear estimation, bootstrapping, stationary solution, stability analysis

JEL Classification: C62, C88, E32

Úvod

Stávající hlavní proud ekonomické vědy je zastoupený především modely dynamické stochastické celkové rovnováhy – tzv. modely DSGE vycházející ze zásadní práce o reálném hospodářském cyklu od Kydlanda a Prescottta (1982), která je postavena na mikroekonomickém základě. Pojetí celkové rovnováhy je mikroekonomickou konstrukcí, kdy spotřebitel maximalizuje užitekovou funkci při daném rozpočtovém omezení a výrobce maximalizuje zisk při technologickém omezení, které je dáno produkční funkcí. Struktura modelu je uzavřena rovnicemi tržní rovnováhy. Ceny a mzdy v modelech DSGE jsou pružné, tj. okamžitě vyrovnávají komoditní a pracovní trh, nebo nepružné tj. jsou pomalu adaptovány různými mechanismy adaptace (např. Calvův adaptační mechanismus). Modely s nepružným cenovým a mzdovým mechanismem jsou obvykle nazývány modely nové keynesovské ekonomie. Tvary užitekových a produkčních funkcí jsou v modelech DSGE

* **Jan Kodera, Quang Van Tran** (jan.kodera@vse.cz; tran@vse.cz), Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví.

Tento článek byl zpracován v rámci institucionální podpory výzkumu na Fakultě financí a účetnictví VŠE v Praze č. IP 100040.

spekulativní, jejich konstrukce je silně ovlivněna požadavkem snadného výpočetního zpracování. Navíc redukované tvary těchto modelů jsou linearizovány, čímž ztrácejí schopnost zachytit složitější chování. Linearizace je prováděna z toho důvodu, že odhad lineárních modelů nepředstavuje závažnější problém. Dále linearizace velmi usnadňuje následné simulace. Simulovaná řešení linearizovaných modelů vytvářejí jednoduchou dynamiku, která je často v rozporu s realitou vývoje ekonomických veličin.

Výše uvedené nedostatky modelů DSGE nás vedou k tomu, že v této stati se vracíme k makroekonomickému modelování. Makroekonomický přístup zkoumá vztahy mezi ekonomickými agregáty. Tento teoretický proud prožíval od 60. let až do začátku 80. let 20. století značný rozvoj. V 80. a 90 letech v rámci makroekonomického modelování nastal rozmach dynamických nelineárních modelů (modely endogenního cyklu). Předností těchto modelů je, že dokáží generovat složitější vývoj makroekonomických veličin, který je konzistentní s reálným vývojem. Využití dynamických nelineárních modelů pro empirické účely přinášelo značné problémy především v oblasti odhadu parametrů. Pravděpodobně z těchto důvodů byl rozvoj těchto modelů na přelomu tisíciletí utlumen a nastoupily modely DSGE, a tak v současné době nelineární dynamické makroekonomické modely zaujímají spíše marginální úlohu. Nicméně, vzhledem k tomu, že modely DSGE nesplňují očekávání do nich vložené, v poslední době dochází k určitému oživení makroekonomických modelů (Hillinger, 2005, 2010; Davanzati *et al.*, 2016), ke kterému chceme přispět mimo jiné i tímto článkem.

Matematická teorie, kterou využívají spojitě nelineární dynamické makroekonomické modely je ve značné části obsažena ve známé knize autorů Guckenheimera a Holmese (1986). Protože tato zajímavá část teorie systémů je stále aktuální, můžeme se setkat s řadou modernějších publikací rozvíjejících dosavadní poznatky, jako např. Kuznetsov (1998), Perko (2001). Makroekonomické dynamické modely jsou nelineární proto, že obsahují investiční a spotřební funkce, které mají z podstaty problému nelineární tvar. Takové systémy jsou schopny generovat složitější dynamiku, viz např. Lorenz (1994), Chiarella (1990), Flaschel *et al.* (1997), Rosser (1999). Dosavadní snahy využít těchto nelineárních systémů pro modelování ekonomiky však končí pouze u odvození modelů bez dalšího ověření, zda tyto modely jsou schopny vygenerovat dynamiku podobnou skutečnému ekonomickému vývoji. Rovněž nebyl věnován dostatek pozornosti tomu, zda lze odhadnout parametry těchto modelů z reálných ekonomických dat.

Ve snaze zaplnit výše zmíněnou mezeru se v této stati pokoušíme ověřit, zda kromě teoretické analýzy, která byla provedena dříve (Kodera *et al.*, 2002, 2003, 2006 a 2013), je možné na datech skutečné ekonomiky odhadnout parametry těchto nelineárních dynamických modelů. Tento úkol nemusí být zcela jednoduchý, protože až na malé výjimky teoretické modely jsou ve vědecké literatuře většinou budovány jako spojitě dynamické modely. Další problém realizace tohoto záměru spočívá v tom, že tyto modely jsou nelineární nejen v proměnných, ale často také v parametrech. Kromě toho v neposlední řadě je také důležité najít vhodné programovací prostředí na realizaci tohoto záměru.

Pro náš záměr empirického výzkumu je vybrán model navržený Chiarellou (1990). Jedná se o model se dvěma rovnicemi s proměnnými *očekávaná inflace* a *inflace*. Chiarellovým modelem rozšíříme původní Kaldorův model (Kaldor, 1940), který má rovněž dvě rovnice. Společně tvoří spojitý dynamický systém se čtyřmi diferenciálními rovnicemi, z nichž některé obsahují nelinearity. Naším hlavním cílem bude nejprve provést odhad parametrů. Protože námi navržený model není lineární v parametrech, bude nutno použít vhodné nelineární metody odhadu.

Kromě odhadů parametrů pomocí nelineárních metod se zaměříme na nalezení bodu rovnováhy modelu. Bod rovnováhy je v oblasti analýzy dynamických ekonomických modelů často nazýván stacionárním řešením. Zde je třeba rozlišit tento pojem v prostředí nelineárních systémů, aby nedošlo k terminologické záměně s pojmem celková rovnováha modelu, která je v oblasti dynamických modelů definována jako řešení dynamického modelu ve formě časově proměnných trajektorií. V této souvislosti připomínáme, že v případě hlavního proudu ekonomického bádání (modely DSGE) je pro výzkumníky „žádoucí“, aby stacionární stav systému (tj. bod rovnováhy) byl stabilní. V případě nelineárních makroekonomických modelů jsou daleko zajímavější nestabilní rovnovážné body, protože v tomto případě řešení modelu představované trajektoriemi jeho proměnných může probíhat daleko od bodu rovnováhy a vykazovat znaky složitější dynamiky (periodické nelineární oscilace, aperiodický pohyb atd.).

Záměrem našeho článku je tedy zkoumat, zda je možné reformulovat nelineární dynamické modely jako ekonometrické modely, které obvykle jsou nelineární nejen v proměnných, ale i v parametrech. To však, jak jsme již řekli, vyžaduje nelineární metody odhadu. V tomto případě jak při sestavení konkrétního tvaru věrohodnostní funkce, tak při nalezení optimálního řešení je nutné mnohem větší úsilí než při řešení tradičních problémů. Pro řešení problému minimalizace věrohodnostní funkce jsme se rozhodli využít programového prostředku Mathematica s tím, že zároveň ověřujeme jeho schopnost takové problémy řešit. Pro odhad parametrů modelu používáme údaje o hrubém produktu, kapitálu, peněžní zásobě a cenové hladině české ekonomiky v období let 2000–2014. Po odhadu dotyčných parametrů nelineárního dynamického modelu používáme tyto parametry pro výpočet bodu rovnováhy systému a jeho stability, případně nestability. V našem případě české ekonomiky indikujeme nestabilitu bodu rovnováhy, jak uvidíme v závěru článku.

Zbývající část našeho článku je strukturována následovně: Ve druhé sekci článku je formulován obecný dynamický model, který je rozšířením Kaldorova modelu o peněžní sektor a adaptivní očekávání inflace. Ve třetí sekci specifikujeme nelinearity modelu. Ve čtvrté sekci se věnujeme stacionárnímu řešení obecného modelu a podmínkám stability. Pro podmínky stability stacionárního řešení jsou důležitá vlastní čísla Jacobiovy matice soustavy. Jejich vlastnosti vyžadují rozsáhlejší analýzu a odvození některých vztahů. Abychom se vyhnuli zneprůhlednění základního textu, odvození zmíněných vztahů jsme zařadili do dodatků. V páté sekci řešíme odhady parametrů modelu na čtvrtletních údajích české ekonomiky od roku 2000 do 2015. V šesté sekci je analyzováno stacionární řešení odhadnutého modelu a jeho stabilita. Výsledky jsou shrnuty v závěru

1. Obecná formulace modelu

V této stati se zabýváme analýzou původního Kaldorova modelu, který rozšiřujeme o model popisující peněžní trh a adaptivní očekávání inflace, který je uveden v knize Chiarelli (1990). Model je vytvořen dvěma diferenciálními rovnicemi. Tato práce navázala na výsledky dřívějších studií v této oblasti, jejich autoři jsou např. Timbergem (1930), Goodwin (1951), Phillips (1954), Allen (1956) a Gabisch a Lorenz (1989). První rovnice je rovnicí pro dynamiku peněžního trhu, kde nerovnováha mezi peněžní nabídkou a poptávkou působí na vývoj cen. Jestliže například je nabídka peněz vyšší než poptávka po penězích, vznikají na běžných účtech ekonomických subjektů nadbytečné peníze, které subjekty použijí na nákup komodit, což zvýší ceny a s jistým zpožděním

poptávku po penězích a původní převis nabídky peněz nad poptávkou se zmenší. Opačný proces nastane, je-li nabídka peněz nižší než poptávka po penězích. Zmíněný proces se nazývá Marshallův přizpůsobovací proces. Dynamika peněžního trhu je doplněna rovnicí pro adaptivní očekávání inflace. Právě jsme řekli, že vyšší nabídka peněz vyvolá růst cen a růst cen vyvolá růst poptávky po penězích. Dalším účinkem růstu cen je zvýšení očekávané inflace a zvýšení rychlosti obratu peněžního a následné snížení poptávky po penězích. Existují tedy dva procesy namířené proti sobě. Přímé působení cen na poptávku po penězích a zároveň nepřímý vliv přes očekávanou inflaci.

Předchozí úvahy zpřesníme prezentací modelu publikovaného v Chiarellově knize. V daném modelu se jedná v podstatě o monetární přístup k inflaci. Monetární modely inflace se vyskytovaly velice často ve vědecké literatuře. V české vědecké literatuře např. Arlt *et al.* (2006). Základním východiskem pro modelování peněžního trhu v neoklasických modelech je Fisherova rovnice pro určení množství peněz v oběhu, kterou zadáváme v důchodovém tvaru

$$M^d V = PY. \quad (1)$$

Symbolem M značíme poptávku po penězích V rychlost oběhu peněžního P cenovou hladinu a Y hrubý domácí produkt. Všechny uvedené proměnné závisí na čase.

Rychlost oběhu peněžního v tradičním neoklasickém pojetí je závislá na technologických podmínkách platebního styku. To znamená, že její změna může nastat v souvislosti se změnou těchto podmínek, je tedy většinou pomalá. Rychlá a velká změna může nastat pouze v případě revolučních změn platebního styku. Moderní neoklasická teorie předpokládá (Chiarella, 1990), že rychlost peněžního oběhu roste v rámci technologických omezení s očekávanou inflací, protože ekonomické subjekty očekávají znehodnocení peněz a drží menší množství peněz v hotovosti a na běžných účtech. Matematicky je to vyjádřeno funkcí očekávané inflace, která je rostoucí a má infimum a supremum.

Označme očekávanou inflaci v čase t symbolem $\pi(t)$, rychlost peněžního oběhu navrhneme ve tvaru

$$V(t) = V_0 e^{\theta(\pi(t))}.$$

Funkci θ budeme uvažovat jako nelineární funkci proměnné π . Vzhledem k výše uvedenému vztahu má rovnice (1) po logaritmování tvar

$$m^d(t) + v_0 + \theta(\pi(t)) = y(t) + p(t),$$

kde jsme pro označení logaritmů původních veličin použili malých písmen.

Dynamika cen bude důsledkem nerovnováhy na peněžním trhu. Peněžní nabídku označíme $M(t)$ a její logaritmus $m(t)$. Pro vyjádření poptávky po penězích použijeme rovnice (1), takže dostaneme

$$\dot{p}(t) = \gamma [m(t) + v_0 + \theta(\pi(t)) - y(t) - p(t)]. \quad (2)$$

Rovnice popisuje Marshallův přizpůsobovací proces na peněžním trhu, kdy převaha nabídky peněz, tj. přebytek peněžních zůstatků na běžných účtech nad poptávkou po penězích, je použit na nákupy zboží na komoditním trhu, a tak zvedá cenovou hladinu, zde ovšem vyjádřenou logaritmicky. Podobně převaha poptávky po penězích nad nabídkou vyvolá omezení nákupů na komoditním trhu a pokles cenové hladiny.

Předpokládáme spojité adaptivní očekávání inflace, které je vyjádřeno rovnicí

$$\dot{\pi}(t) = \omega[\dot{p}(t) - \pi(t)]. \quad (3)$$

Je-li historická inflace vyšší než očekávaná inflace, dojde následně k jejímu zvýšení. V případě menší historické inflace dojde ke snížení očekávané inflace. Rovnice (3) se upraví, přičemž se využije rovnice (2) tak, že ji dosadíme za $\dot{p}(t)$ do rovnice (3) a dostaneme:

$$\dot{\pi}(t) = \omega\{\gamma[m(t) + v_0 + \theta(\pi(t)) - y(t) - p(t)] - \pi(t)\}. \quad (4)$$

Diferenciální rovnice (2) a (4) popisují dynamiku cen $p(t)$ a očekávané inflace $\pi(t)$ pomocí nerovnováhy na peněžním trhu (rovnice (2)) a pomocí adaptivního očekávání inflace (rovnice (4)).

Veličiny $m(t)$ a $y(t)$ jsou exogenní proměnné. Při rozšíření modelu budeme endogenizovat veličinu $y(t)$ a veličinu $m(t)$ zvolíme jako konstantní. Model vytvořený rovnicemi (2) a (4) použijeme na rozšíření původního Kaldorova modelu, který je tvořen dvěma diferenciálními rovnicemi. První diferenciální rovnice popisuje dynamiku komoditního trhu. Původní verze této rovnice je formulována jako

$$\dot{Y}(t) = [I(Y(t), K(t)) - S(Y(t))], \quad (5)$$

kde K je zásoba kapitálu I investice jako rostoucí funkce produkce a klesající funkce kapitálu, S úspory jako funkce produkce (důchodu). Investiční funkci upravíme jako součin investiční míry j a produkce. Funkce investiční míry bude záviset na produktivitě kapitálu¹, tedy

$$I(Y(t), K(t)) = j\left(\frac{Y(t)}{K(t)}\right)Y(t) = j\left(e^{y(t)-k(t)}\right)Y(t) = i(y(t) - k(t))Y(t).$$

Podobně upravíme funkci úspor tak, aby byla od určité úrovně důchodu rostoucí a konvexní, což odpovídá ekonomickým zkušenostem

$$S(Y(t)) = (s_0 + s_1 \log Y(t))Y(t) = (s_0 + s_1 y(t))Y(t).$$

Z výše uvedených dvou rovnic dosadíme do rovnice (5), vydělíme obě strany rovnice $Y(t)$ a dostaneme

$$\dot{y}(t) = [i(y(t) - k(t)) - (s_0 + s_1 y(t))]. \quad (6)$$

Další rovnice popisuje tvorbu kapitálu

$$\dot{K}(t) = i(y(t) - k(t))Y(t) - aK(t),$$

kde $a > 0$ značí amortizaci. Obě strany rovnice vydělíme $K(t)$ a dostaneme v logaritmickém vyjádření proměnných

$$\dot{k}(t) = i(y(t) - k(t))e^{y(t)-k(t)} - a. \quad (7)$$

Rovnice (6) a (7) tvoří Kaldorův model, zde jsme však jeho původní tvar poněkud upravili.

1 Převrácenou hodnotu produktivity kapitálu nazýváme kapitálovým koeficientem.

2. Specifikace nelinearit v modelu

V modelu tvořeném rovnicemi (2), (4), (5) a (6) jsou dvě nelineární funkce. Je to funkce $\theta(\pi(t))$, která je logaritmem rychlosti oběhu peněžního (až na konstantu v_0) a funkce investiční míry $i(y(t) - k(t))$. Funkce $\theta(\pi(t))$, je definována na intervalu $(-\infty, \infty)$, protože očekávaná inflace teoreticky nabývá všech záporných hodnot (deflace), nuly a všech kladných hodnot. Technologické parametry silně determinují rychlost oběhu peněžního, takže funkční hodnoty funkce $\theta(\pi(t))$ se pohybují v relativně úzkém pásu, tedy tato funkce má své supremum a infimum. Funkce investiční míry $i(y(t) - k(t))$ bude mít podobné vlastnosti. Bude definována na intervalu $(-\infty, \infty)$, protože efektivnost kapitálu $Y(t) / K(t)$ bude teoreticky nabývat všech kladných hodnot, a tedy její logaritmus libovolných reálných hodnot. Infimum investiční míry bude 0. Z ekonomické teorie a praxe víme, že investiční míra nemůže překročit jisté procento produktu. Tato funkce tedy bude mít i své infimum a supremum. Pro aproximaci těchto vlastností se nejlépe hodí logistická funkce, která má obecný tvar:

$$L(x) = \frac{L_0}{1 + e^{l(x-x_0)}}.$$

Na základě vlastních zkušeností s těmito funkcemi (Kodera *et al.*, 2002) pro funkci θ volíme následující tvar:

$$\theta(\pi) = \frac{\theta}{1 + e^{-\pi}}; \theta > 0.$$

Infimum výše uvedené funkce je 0 a supremum θ .

Funkce investiční míry je specifickým případem logistické funkce a volíme ji ve tvaru:

$$i(y - k) = \frac{i_0}{1 + e^{-(y-k-i_0)}}; i_0 > 0; \mu = 0, 1.$$

Infimum investiční míry je 0 a supremum i_0 .

Dosadíme-li specifikace nelinearit do rovnic (2), (4), (6) a (7), dostaneme

$$\dot{p}(t) = \gamma \left[m(t) + v_0 + \frac{\theta}{1 + e^{-\pi(t)}} - y(t) - p(t) \right] \quad (8)$$

$$\omega \left\{ \gamma \left[m(t) + v_0 + \frac{\theta}{1 + e^{-\pi(t)}} - y(t) - p(t) \right] - \pi(t) \right\} \quad (9)$$

$$\dot{y}(t) = \alpha \left[\frac{i_0}{1 + e^{-(y(t)-k(t)-i_0)}} - (s_0 + s_1 y(t)) \right] \quad (10)$$

$$\dot{k}(t) = \frac{i_0}{1 + e^{-(y(t)-k(t)-i_0)}} e^{y(t)-k(t)} - a. \quad (11)$$

Výše uvedené rovnice tvoří Kaldorův dynamický model rozšířený o rovnice peněžního trhu. Na levé straně jsou derivace endogenních proměnných dynamického systému podle času, na pravé straně jsou endogenní proměnné a exogenní proměnná $m(t)$. V následující sekci zjistíme stacionární řešení a podmínky stability.

3. Stacionární řešení modelu a podmínky stability

Připomínáme, že stacionární řešení je takové řešení, které se nemění v čase. V našem případě toto řešení označíme $\bar{p}$, $\bar{\pi}$, $\bar{y}$, $\bar{k}$. Rovnice (8)–(11) po dosazení těchto konstantních hodnot a úpravě získají tvar.

$$0 = m + v_0 + \frac{\theta}{1 + e^{-\bar{\pi}}} - \bar{y} - \bar{p} \quad (12)$$

$$0 = \gamma \left(m + v_0 + \frac{\theta}{1 + e^{-\bar{\pi}}} - \bar{y} - \bar{p} \right) - \bar{\pi} \quad (13)$$

$$0 = \frac{i_0}{1 + e^{-(\bar{y} - \bar{k} - i_1)}} - (s_0 + s_1 \bar{y}) \quad (14)$$

$$0 = \frac{i_0}{1 + e^{-(\bar{y} - \bar{k} - i_1)}} e^{\bar{y} - \bar{k}} - a. \quad (15)$$

Nejdříve začneme s řešením rovnice (15). Za tímto účelem položíme $X = \exp(\bar{y} - \bar{k})$ a rovnice (15) přejde ve tvar:

$$0 = \frac{i_0}{1 + e^{i_1} X^{-1}} X - a. \quad (16)$$

Připomeneme, že $X \in (0, \infty)$. Výraz (16) upravíme na

$$i_0 X = a(1 + e^{i_1} X^{-1}).$$

Po dalších úpravách spočívajících v převedení na levou stranu rovnice a vynásobení X dostáváme následující kvadratickou rovnici

$$i_0 X^2 - aX - ae^{i_1} = 0.$$

Bereme v úvahu pouze kladný kořen

$$X = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4ae^{i_1}i_0}}{2i_0}.$$

Z rovnice (14) vypočítáme veličinu $\bar{y}$ snadno

$$\bar{y} = \frac{1}{s_1} \left(\frac{i_0}{1 + e^{i_1} X^{-1}} - s_0 \right).$$

Stacionární veličina kapitálu je dána vztahem

$$\bar{k} = \bar{y} - \log X.$$

Srovnáním rovnic (12) a (13) zjistíme, že stacionární inflace je $\bar{\pi} = 0$. Potom z rovnice (8) snadno vypočteme:

$$\bar{p} = m + v_0 + \frac{\theta}{2} - \bar{y}.$$

Model popsaný rovnicemi (8)–(11) má právě jeden stacionární bod určený rovnicemi (12)–(15). Stabilitu nebo nestabilitu stacionárního bodu určíme po vyřešení linearizované úlohy. Linearizaci soustavy provádíme v okolí stacionárního řešení. Řešení linearizované soustavy je stabilní, právě když stacionární bod je stabilní. Připomeneme stručně některá pravidla linearizace soustavy nelineárních diferenciálních rovnic. Vezměme soustavu

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (17)$$

kde $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a $f = (f_1, \dots, f_n)$ je vektor funkcí hladkých na $\mathcal{R}$. Symbolem $\bar{x}$ označme stacionární bod, tedy $f(\bar{x}) = 0$. Soustavu rovnic (20) aproximujeme lineární soustavou

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})\delta x(t),$$

kde $\delta x(t)$ aproximuje řešení $x(t) - \bar{x}$ blízko stacionárního bodu a $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ je hodnota

Jacobiho matice ve stacionárním bodě. Nalezením vlastních čísel Jacobiho matice a prozkoumáním jejich vlastností vyřešíme otázku stability stacionárního bodu námi zkoumaného čtyřrozměrného modelu.

Za účelem konstrukce Jacobiho matice seřadíme proměnné soustavy diferenciálních rovnic (8)–(11) do vektoru $x(t) = (p(t), \pi(t), y(t), k(t))$. Soustavu (17) budeme derivovat podle $x(t)$ a dosadíme $\bar{x}$. Pokud tento postup aplikujeme na soustavu (8)–(11), postupujeme následujícím způsobem. Derivujeme (8) po řadě podle $p(t)$, $\pi(t)$, $y(t)$, $k(t)$ a po dosazení souřadnic stacionárního bodu $\bar{p}$, $\bar{\pi}$, $\bar{y}$, $\bar{k}$ dostáváme

$$A_{11} = -\gamma \quad (18)$$

$$A_{12} = \frac{\gamma\theta e^{-\bar{\pi}}}{[1 + e^{-\bar{\pi}}]^2} \quad (19)$$

$$C_{11} = -\gamma$$

$$C_{12} = 0.$$

Derivace jsme označili velkými písmeny zdánlivě nepřírozným způsobem. Máme pro to však dobré důvody, jak později uvidíme. Nyní budeme derivovat rovnici (9) podle jednotlivých proměnných a dosadíme jednotlivé souřadnice stacionárního bodu

$$A_{21} = -\gamma\omega \quad (20)$$

$$A_{22} = \omega \left\{ \frac{\gamma\theta e^{-\bar{\pi}}}{[1 + e^{-\bar{\pi}}]^2} - 1 \right\} \quad (21)$$

$$C_{21} = -\gamma\omega$$

$$C_{22} = 0.$$

Rovnice (10) a (11) neobsahuje proměnné $p(t)$ a $\pi(t)$, takže derivace podle těchto proměnných budou nulové. Dále derivujeme (10) podle $y(t)$, $k(t)$ a dosadíme $\bar{y}$, $\bar{k}$:

$$B_{11} = \alpha \left\{ \frac{i_0 e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{\left[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}\right]^2} - s_1 \right\} \quad (22)$$

$$B_{12} = - \frac{\alpha i_0 e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{\left[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}\right]^2}. \quad (23)$$

Derivací (11) podle $y(t)$, $k(t)$ a dosazení $\bar{y}$, $\bar{k}$ dostaneme

$$B_{21} = \left\{ \frac{i_0 e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{\left[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}\right]^2} + \frac{i_0}{1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}} \right\} e^{-(\bar{y}-\bar{k})} \quad (24)$$

$$B_{22} = - \left\{ \frac{i_0 e^{-i_2(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{\left[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}\right]^2} + \frac{i_0}{1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}} \right\} e^{(\bar{y}-\bar{k})}. \quad (25)$$

Jacobiho matici $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ soustavy (8)–(11) označíme J . Snadno zjistíme, že platí:

$$J = \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix},$$

$$\text{kde } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z teorie dynamických systémů víme, že pro analýzu stability stacionárního bodu je nutné znát charakteristická čísla matice linearizované soustavy. Charakteristická čísla matice jsou kořeny tzv. charakteristické rovnice. Pro náš případ je charakteristická rovnice dána výrazem

$$\det(\lambda I_4 - J) = \det(\lambda I_2 - A) \det(\lambda I_2 - B) = 0,$$

kde jsme symbolem I_n označili jednotkovou matici o n řádcích a sloupcích a použili větu o rozvoji determinantu. Dosadíme-li do předešlého výrazu za A a B a spočteme-li determinanty, dostáváme:

$$[\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}][\lambda^2 - (B_{11} + B_{22})\lambda + B_{11}B_{22}].$$

Výše uvedená rovnice je algebraická rovnice 4. stupně, která je součinem dvou kvadratických trojčlenů. Číslo λ je řešením dané rovnice, právě když je řešením kvadratické rovnice

$$\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0. \quad (26)$$

nebo

$$\lambda^2 - (B_{11} + B_{22})\lambda + B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 0. \quad (27)$$

Pro řešení první kvadratické rovnice máme:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(A_{11} + A_{22} + \sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(A_{11} + A_{22} - \sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}} \right).$$

Pro řešení druhé kvadratické rovnice platí:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left(B_{11} + B_{22} + \sqrt{(B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{21}} \right)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left(B_{11} + B_{22} - \sqrt{(B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{21}} \right).$$

Po dosazení z rovnic (22)–(25) snadno zjistíme, že pro absolutní členy kvadratických rovnic (26) a (27) platí

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} > 0, \quad B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} > 0. \quad (28)$$

Důkaz výše uvedených nerovností je proveden v dodatku 1. Vzhledem k tomu, že absolutní členy kvadratických rovnic (26) a (27) jsou kladné, podle teorie kvadratických rovnic platí:

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\lambda_2) \text{ a } \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\lambda_3) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\lambda_4).$$

To je tak vše, co se dá o vlastnostech stacionárního bodu obecně zjistit. Charakteristická čísla mohou být reálná i imaginární, což závisí na znaménku diskriminantů

$$(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21} \text{ a } (B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{21}.$$

Dále platí, že pro

$$\frac{\omega}{\left(1 + \sqrt{\omega \frac{\theta e^{-\bar{\pi}}}{[1 + e^{-\bar{\pi}}]^2}}\right)^2} < \gamma < \frac{\omega}{\left(1 - \sqrt{\omega \frac{\theta e^{-\bar{\pi}}}{[1 + e^{-\bar{\pi}}]^2}}\right)^2} \text{ je } (A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21} < 0$$

a pro

$$\left(\sqrt{\frac{i_0 e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}]^2}} - \sqrt{s_1} \right)^2 R < \alpha < \left(\sqrt{\frac{i_0 e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}]^2}} + \sqrt{s_1} \right)^2 R,$$

kde

$$R = \left(\frac{i_0 e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}]^2} + \frac{i_0}{1 + e^{-i_2(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}} \right) e^{\bar{y}-\bar{k}} \text{ je } (B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{21} < 0.$$

Důkaz výše uvedených nerovností je proveden v dodatku 2.

4. Odhad parametrů modelu

Rozšířený Kaldorův model je nelineární jak v proměnných, tak i v parametrech, které chceme odhadovat. Parametry modelu odhadneme z dat české ekonomiky. Použijeme čtvrtletní údaje reálného domácího produktu, peněžního agregátu M1, investic a čtvrtletní míry inflace z období let 2000–2014. Originální čtvrtletní data kapitálové zásoby nejsou dostupná. Kapitál je totiž k dispozici pouze v ročních údajích. Data na první tři čtvrtletí daného roku jsme získali tak, že jsme použili údaje o investicích a odpisech a dopočetli jsme chybějící údaje o kapitálu. Jsme si samozřejmě vědomi problémů, které souvisejí s těmito úpravami. Použitá data pro odhad parametrů Kaldorova modelu charakterizujeme popisnými statistikami v tabulce 1.

Tabulka 1 | Popisné statistiky použitých dat

	HDP (v mil. Kč)	Peněžní agregát M1 (v mil. Kč)	Zásoba kapitálu (v mil. Kč)	Investice (v mil. Kč)	Cenový index
Průměr	803 899,5	1 430 289	23 244 631	244 550,3	100,0263
Medián	828 681,0	1 335 745	23 216 414	242 469,0	100,1000
Maximum	936 276,0	2 546 996	26 310 589	322 648,0	101,0000
Minimum	591 380,0	546 326	19 776 757	178 900,0	99,20000
Směrodatná odchylka	105 719,9	602 699,4	2 110 535	34 861,19	0,342536
Šikmost	−0,401773	0,238217	−0,039520	0,110802	−0,086410
Špičatost	1,747132	1,788964	1,634164	2,146762	3,452682
Jarque-Berra	5,261488	4,022298	4,445421	1,845671	0,557621
Pravděpodobnost	0,072025	0,133835	0,108315	0,397391	0,756683
Pozorování	57	57	57	57	57

Zdroj: Český statistický úřad, Česká národní banka (statistiky) a vlastní výpočty

4.1 Odhad parametrů pro rovnici adaptivního očekávání inflace

I když rovnice adaptivního očekávání je v základním tvaru modelu v pořadí druhá, použijeme ji v rámci odhadu modelu jako první, protože pomocí odhadnutého tvaru této rovnice vypočítáme časovou řadu očekávané inflace, kterou budeme používat v následujícím

odhadu rovnice pro dynamiku cen, která je v základním tvaru modelu jako první. Adaptivní očekávání je dáno rovnicí (9), ale my použijeme pro účely odhadu její základní tvar (3). Provedeme následující aproximaci. Okamžitou změnu očekávané inflace $\pi(t)$ aproximujeme výrazem $\pi_{t+1} - \pi_t$ a okamžitou změnu cenové hladiny $p(t)$ aproximujeme výrazem $p_t - p_{t-1} = \Delta p_t$. Po dosazení uvedených aproximací rovnice (3) dostane tvar.

$$\pi_{t+1} - \pi_t = \omega(\Delta p_t - \pi_t)$$

nebo

$$\pi_{t+1} = \omega \Delta p_t + (1 - \omega) \pi_t,$$

kde předpokládáme, že $\omega \in (0,1)$. Když budeme řešit výše uvedenou rovnici vzhledem k π_{t+1} , dostaneme

$$\pi_{t+1} = \omega \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \omega)^k \Delta p_{t-k}. \quad (29)$$

Pro náš experiment budeme řadu ve výše uvedeném výrazu aproximovat součtem prvních dvou členů, tj. $k = 0,1$. Po substituci Δp_{t+1} za π_{t+1} dostaneme

$$\Delta p_{t+1} = \omega \Delta p_t + \omega(1 - \omega) \Delta p_{t-1}.$$

Věrohodnostní funkce pro tento odhad je nelineární a dokonce nekonvexní v parametrech. Procedury na nalezení globálního minima nekonvexních funkcí nemohou být stoprocentně spolehlivé. Nejvhodnější procedurou pro nalezení globálního minima se jeví procedura ArgMin systému Mathematica. Pro nalezení konfidenčních intervalů nelineárních odhadů použijeme metody tzv. bootstrappingu² podle Martineze (2007). Bylo sestrojeno empirické rozdělení četností a nalezeny příslušné kvantily. Parametr ω odhadneme z časových řad čtvrtletních cenových indexů české ekonomiky. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 2. Odhad parametru je statisticky významný a splňuje předpoklad, že $\omega \in (0,1)$, použijeme ho tedy v rovnici (9).

Tabulka 2 | Výsledky odhadu parametrů rovnice adaptivního očekávání

Parametr	Odhad	0,025-kvantil	0,975-kvantil
ω	0,264801	0,129410	0,485373

Zdroj: vlastní zpracování

Časovou řadu očekávané inflace získáme z aproximace rovnice (29), ve tvaru

$$\pi p_{t+1} = \omega \Delta p_t + \omega(1 - \omega) \Delta p_{t-1}.$$

Očekávanou inflaci použijeme při odhadu rovnice (8).

2 Metoda bootstrappingu je statistická metoda, která využívá výpočetní techniku k vygenerování tzv. bootstrapových výběrů, ze kterých lze vypočítat různé statistiky na určení přesnosti odhadu, intervalu spolehlivosti a na testování hypotéz.

4.2 Odhad parametrů pro rovnici dynamiky cen

Výsledky odhadů rovnice (8) jsou uvedeny v tabulce 3. Rovnici (8) jsme pro odhad upravili následujícím způsobem:

$$\dot{p}(t) = m(t) + c_0 + \frac{c_1}{1 + e^{-\pi(t)}} - c_2 [y(t) - p(t)]. \quad (30)$$

Pro odhad jsme použili místo proměnné $\dot{p}(t)$ čtvrtletní difference logaritmu cenového indexu, místo $m(t)$ čtvrtletní údaje o peněžní zásobě, místo $\pi(t)$ data získaná autoregresním modelem odhadnutým s diferencí logaritmů cenových indexů, místo $y(t)$ čtvrtletní údaje o logaritmu hrubého domácího produktu a místo $p(t)$ údaje o logaritmu cenového indexu. Rovnice je lineární v parametrech, proto jsme se rozhodli pro proceduru LinearFit, která je součástí software Mathematica. Odhadnutou rovnici, která bude mít tvar

$$\dot{p}(t) = m(t) + \hat{c}_0 + \frac{\hat{c}_1}{1 + e^{-\pi(t)}} - \hat{c}_2 [y(t) - p(t)],$$

dále upravíme tak, že vytkneme $\hat{c}_2$ a dostaneme

$$\dot{p}(t) = \hat{c}_2 \left[\frac{m(t)}{\hat{c}_2} + \frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_2} + \frac{\hat{c}_1 / \hat{c}_2}{1 + e^{-\pi(t)}} - [y(t) - p(t)] \right].$$

Všechny parametry odhadu mají z hlediska ekonomické interpretace správné znaménko a jsou statisticky významné. Pro experimenty s odhadnutou rovnicí používáme upravenou logaritmickou peněžní zásobu $m^s(t) = m(t)/\hat{c}_2$.

Tabulka 3 | Výsledky odhadu parametrů rovnice dynamiky cen

Parametr	Odhad	Směrodatná chyba	t-statistika	p-value
$\hat{c}_0$	-28,6761	8,0420	-3,5658	0,0008
$\hat{c}_1$	105,9210	15,8635	6,6770	0
$\hat{c}_2$	2,0881	0,0556	35,5783	0

Zdroj: vlastní zpracování

Položíme $\gamma = \hat{c}_2 = 2,08808$, $v_0 = \frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_2} = -13,7332$, $\theta = \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_2} = 50,7265$ a dostaneme

numerické hodnoty parametrů rovnice (8), které budeme užívat v simulacích. Musíme rovněž dosadit za m_t . Za tuto hodnotu arbitrárně dosadíme průměr logaritmů údajů o peněžní zásobě, což je 13,9871. V modelu používáme upravenou peněžní zásobu

$$m^s(t) = \frac{m(t)}{\hat{c}_2} = 6,69857.$$

4.3 Odhady parametrů pro rovnici kapitálové tvorby

Data pro kapitál a produkci použijeme pro odhad tří parametrů rovnice (11). Rovnice je nelineární v parametrech, proto používáme metodu ArgMin systému Mathematica a pro stanovení konfidenčních intervalů metody „bootstrappingu“. Výsledky odhadu a oboustranné konfidenční intervaly jsou uvedeny v tabulce 4, kde vidíme, že hodnoty parametrů i_0 , i_1 , a , leží uvnitř jejich konfidenčního intervalu, jsou tedy statisticky významné.

Tabulka 4 | Výsledky odhadu parametrů rovnice kapitálové tvorby

Parametr	Odhad	0,025-kvantil	0,975-kvantil
i_0	0,499945	0,371622	3,095300
i_1	-8,743439	-9,135705	-0,909430
a	0,010847	0,000757	0,014502

Zdroj: vlastní zpracování

Výsledky tohoto odhadu pokládáme z hlediska významnosti za uspokojivé a použitelné v dalších výpočtech. Ekonomická interpretace numerických výsledků odhadu může být diskutabilní, což je u úloh tohoto typu je běžné. Například parametr $i_0 = 0,499945$ je hodnota míry investic při vysoké produkci³. Číslo by se mohlo intuitivně zdát relativně vysoké. Na druhé straně nejde o pozorovanou hodnotu investiční míry, ale o predikovanou hodnotu za podmínky enormně vysoké produkce. Podobný případ je $a = 0,010847$. Zde se jedná o míru amortizace kapitálu. Toto číslo je relativně malé a intuitivně by se mohlo zdát, že neodpovídá míře amortizace v praxi, která je ovšem účetním pojmem. Parametr a z tabulky 4, který interpretujeme jako míru amortizace, byl získán odhadem z pozorovaných dat, takže je skutečně problém řešit otázku, který parametr je vhodnější pro analýzu. Dáváme samozřejmě přednost hodnotám odhadnutým.

4.4 Odhad parametrů rovnice pro dynamiku produkce

Dynamika produkce je definována rovnicí (10), která obsahuje výraz pro sklon k investicím

$$\frac{i_0}{1 + e^{-(y(t)-k(t)-i_1)}},$$

jehož parametry jsme odhadli v subsekcí 4.3. Vypočtené hodnoty sklonu k investicím jsme spolu s logaritmy produkce využili k odhadu parametrů rovnice (10) v upraveném tvaru

$$\dot{y}(t) = \alpha \frac{i_0}{1 + e^{-(y(t)-k(t)-i_1)}} - (\alpha s_0 + \alpha s_1 y(t)),$$

takže neodhadujeme parametry přímo, ale jejich funkce, ze kterých dané parametry vypočítáme. Protože rovnice (10) po je rovnice lineární v parametrech, použili jsme metodu

3 i_0 je limita funkce investiční míry, jakmile y diverguje do nekonečna.

LinearFit, která je procedurou systému Mathematica. Výsledky odhadu nalezneme v tabulce 5. Výsledky odhadu jsou statisticky významné, proto je můžeme použít pro další zpracování.

Tabulka 5 | Výsledky odhadu parametrů rovnice dynamiky produkce

Parametr	Odhad	Směrodatná chyba	t-statistika	p-value
α	314,3730	64,6501	4,8627	0
αs_0	154,1550	31,5070	4,8927	0
αs_1	0,1646	0,0735	2,2387	0,0294

Zdroj: vlastní zpracování

Z tabulky 5 vypočteme následující hodnoty parametrů rovnice dynamiky produkce $\alpha = 314,373$, $s_0 = 0,490356$, $s_1 = 0,00052$. Ekonomicky interpretovatelné jsou parametry s_0 a s_1 , což je po řadě míra úspor a parametr zakřivení funkce úspor, který pro náš odhad je nízký oproti lineárnímu členu s_0 .

5. Analýza stability stacionárního řešení odhadnutého modelu

Použijeme odhady získané v sekci 5 a dostaneme:

Rovnice adaptivního očekávání:

$$\dot{\pi}(t) = 0,264801[\dot{p}(t) - \pi(t)]$$

Rovnice pro inflaci:

$$\dot{p}(t) = 2,08808 \left[6,750096 - 13,7332 + \frac{50,7265}{1 + e^{-\pi(t)}} - (y(t) + p(t)) \right]$$

Rovnice kapitálové tvorby:

$$\dot{k}(t) = \frac{0,499945}{1 + e^{-(y(t) - k(t) + 8.743439)}} e^{y(t) - k(t)} - 0,010847$$

Rovnice dynamiky produkce:

$$\dot{y}(t) = 314,373 \left[\frac{0,499945}{1 + e^{-(y(t) - k(t) + 8.743439)}} - (0,490356 + 0,00052y(t)) \right]$$

Stacionární stav modelu je dán rovnicemi:

$$0 = \bar{\pi}$$

$$0 = 6,750096 - 13,7332 + 25,36325 - (\bar{y} + \bar{p})$$

$$0 = \frac{0,499945}{1 + e^{-(\bar{y} - \bar{k} + 8.743439)}} e^{\bar{y} - \bar{k}} - 0,010847$$

$$0 = \frac{0,499945}{1 + e^{-(\bar{y} - \bar{k} + 8,743439)}} - (0,490356 + 0,00052\bar{y}).$$

Ve druhé rovnici stacionárního stavu modelu jsme nechali hodnotu upravené peněžní zásoby $m^s = 6,69857$ separovanou z interpretačních důvodů. Totéž platí pro parametr $v_0 = -13,7332$.

Stacionární řešení výše uvedené soustavy provedeme podle vzorců, které jsme odvodili v sekci 4. Rovnici (15) jsme upravili na rovnici (16), která po úpravě získá tvar kvadratické rovnice. Její kladný kořen má po dosazení hodnotu:

$$X_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4ae^{i_1}}}{2i_0} = 0,00546248.$$

Dosadíme-li odhady parametrů a vypočtenou hodnotu X_1 do následující rovnice pro stacionární hodnotu produkce, dostaneme

$$\bar{y} = \frac{1}{s_1} \left(\frac{i_0}{1 + e^{i_1} X^{-1}} - s_0 \right) = -8,83694129$$

a pro stacionární hodnotu kapitálu máme

$$\bar{k} = \bar{y} - \log X_1 = -3,62708926.$$

Stacionární hodnota očekávané inflace $\bar{\pi} = 0$ a stacionární hodnota cenové hladiny je

$$\bar{p} = m + v_0 + \frac{\theta}{2} - \bar{y} = 27,21708729.$$

Pro výpočet charakteristických čísel matice linearizované soustavy byla využita procedura Eigenvalues programu Mathematica s následujícími výsledky:

Všechna charakteristická čísla jsou reálná a kladná. Model má tedy nestabilní stacionární řešení. U nelineárních modelů to nemusí však znamenat explozivní řešení jako u modelů lineárních. U nelineárních modelů je kromě explozivních oscilací možnost složitější dynamiky, tj. periodické nebo dokonce neperiodické oscilace (viz Guckenheimer a Holmes, 1986; nebo Lorenz, 1994). Podrobnější analýza dynamiky tohoto modelu přesahuje však rámec tohoto článku.

Závěr

Nelineární dynamické makroekonomické modely, mezi něž patří i námi analyzovaný model, jsou většinou analyzovány obecně, případně kalibrovány za účelem simulací. V této stati jsme se pokusili o odhad parametrů modelu, i když jsme si byli vědomi problémů spojených s tím, že nám není známa literatura, která by se odhadem nelineárních dynamických modelů zabývala. Z tohoto důvodu jsme odhad parametrů Kaldorova rozšířeného dynamického nelineárního modelu na datech české ekonomiky zvolili za hlavní cíl článku. Dalšími cíli jsou výpočet stacionárního řešení odhadnutého modelu a analýza vlastností rovnovážného řešení s využitím linearizovaného modelu.

Zásadním problémem při odhadu Kaldorova rozšířeného modelu bylo, že se jedná o model, který je nelineární v proměnných a parametrech. Odhadové funkce dvou rovnic

tohoto modelu jsou nekonvexní, proto je velmi obtížné nalézt jejich globální minimum. Pro řešení tohoto problému jsme využili program ArgMin, který je součástí systému Mathematica. Pro testování statistické významnosti odhadnutých parametrů v těchto dvou rovnicích modelu jsme použili metody bootstrappingu. Parametry zbývajících dvou rovnic Kaldorova rozšířeného modelu jsme odhadli lineárními metodami. Z důvodů kompatibility jsme zůstali u software Mathematica a použili jsme funkci LinearFit. Výsledky, které jsme obdrželi, jsou z hlediska statistické významnosti odhadů a jejich ekonomické interpretace, přijatelné.

Velmi důležitým poznatkem je zjištění, zda je zkoumaný model stabilní nebo nestabilní, proto bylo nezbytné spočítat stacionární řešení odhadnutého modelu. Model byl linearizován ve stacionárním bodě. Vlastní čísla Jacobiho matice soustavy diferenciálních rovnic tvořících Kaldorův rozšířený model jsou kladná, tedy stacionární řešení soustavy je nestabilní.

Nestabilita nelineárních systémů má veliký význam pro teoretické vysvětlení složité dynamiky skutečných ekonomických veličin, protože nestabilní nelineární ekonomické modely jsou za určitých podmínek schopny napodobit složitější dynamiku skutečných ekonomických veličin. Toto empirické zjištění vede k myšlence, že simulace odhadnutého nelineárního Kaldorova modelu mohou lépe napodobit skutečný vývoj ekonomických veličin než často využívané modely DSGE. Provedení takových simulací přesahuje cíle tohoto článku a tak bude předmětem následujícího výzkumu.

Literatura

- Allen, R. D. G. (1956). *Mathematical Economics*. London: Macmillan.
- Arlt, J.; Kodera, J.; Mandel, M.; Tomšík, V. (2006). Monetary Approach to Inflation: A Medium Term Structural Model in a Small Open Economy. *Politická ekonomie*, 54(3), 326–338, <http://dx.doi.org/10.18267/j.polek.561>
- Chiarella, C. (1990). *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics*. Berlin: Springer Verlag.
- Davanzati, G. F.; Patalano, R.; Traficante, G. (2016). *The Italian Economic Decline in a Kaldorian Theoretical Perspective*. PKSG Working Paper No. 1606.
- Flaschel, P.; Franke, R.; Semmler, W. (1997). *Dynamic Macroeconomics*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Gabisch, G.; Lorenz, H. W. (1989). *Business Cycle Theory*. Berlin: Springer Verlag.
- Goodwin, R. M. (1951). The Nonlinear Accelerator and Persistence of Business Cycle. *Econometrica*, 19(1), 1–17, <http://dx.doi.org/10.2307/1907905>
- Guckenheimer, J.; Holmes, P. (1986). *Non-Linear Oscillation, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer Verlag.
- Hillinger, C. (2005). *Evidence and Ideology in Macroeconomics: The Case of Investment Cycle*. Munich Discussion Paper No 2005–16.
- Hillinger, C.; Suessmuth, B. (2010). *The Quantity Theory of Money: An Assessment of Its Real Linpinch Prediction*. CESifo Working Paper Series No. 2995.
- Kaldor, N. (1940). A Model of the Trade Cycle. *Economic Journal*, 50(197), 78–92, <http://dx.doi.org/10.2307/2225740>
- Kodera, J. (2002). Four Equation Model of Price Dynamics, in Proc. 20th Internat. Conference *Mathematical Methods in Economics*, University of Economics, Ostrava, pp. 151–155.

- Kodera, J.; Sladký, K; Vošvrda, M. (2003). The Extended Kalecki-Kaldor Model Revisited, in Proc. 21th Internat., M. Houška, ed., *Conference Mathematical Methods in Economics*. Faculty of Economics, Czech University of Agriculture, Praha, pp. 160–165.
- Kodera, J.; Vošvrda, M. (2006). Product, Capital and Price dynamics in the simple model of closed economy (Produkt, kapitál, a cenový pohyb v jednoduchém modelu uzavřené ekonomiky). *Politická ekonomie*, 54(3), 339–350, <http://dx.doi.org/10.18267/j.polek.562>
- Kodera, J.; Tran, Q. V.; Vošvrda, M. (2013). Complex Price Dynamics in the Modified Kaldorian Model. *Prague Economic Papers*, 22(3), 362–384, <http://dx.doi.org/10.18267/j.pep.457>
- Kuznetsov, Y. A. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Berlin: Springer Verlag.
- Kydland, F. E.; Prescott, E. C. (1982). Time to Build and Aggregate Fluctuations. *Econometrica*, 50(6), 1345–1370, <http://dx.doi.org/10.2307/1913386>
- Lorenz, H. W. (1994). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Berlin: Springer Verlag.
- Martinez, W. L.; Martinez, A. R. (2007). *Computational Statistics Handbook with Matlab*. New York: Chapman & Hall.
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Berlin: Springer Verlag.
- Phillips, A. W. (1954). Stabilisation Policy in a Closed Economy. *Economic Journal*, 64(254), 290–323, <http://dx.doi.org/10.2307/2226835>
- Rosser, J. B., Jr. (1999). On the Complexities of Complex Economic Dynamics. *The Journal of Economic Perspectives*, 13(4), 169–192, <http://dx.doi.org/10.1257/jep.13.4.169>
- Tinbergen, J. (1930). Ein Schiffsbauzyklus? in *Weltwirtschaftliches Archiv* Reprinted in Klaasen, L.H. et al. (1959), ed., *Selected Papers*, Amsterdam. 1959.

Přílohy

Dodatek 1

V tomto dodatku dokážeme, že nerovnosti (28) platí. Nejdříve položíme

$$X = \frac{\theta e^{-\bar{\pi}}}{\left[1 + \theta e^{-\bar{\pi}}\right]^2} > 0. \quad (\text{D } 1.1)$$

Potom po dosazení do (19) a (21) dostaneme

$$A_{12} = \gamma X, \quad A_{22} = \omega(\gamma X - 1).$$

Připomeneme ještě, že

$$-\gamma \text{ a } A_{21} = -\gamma \omega.$$

Z výše uvedených vztahů dosadíme do první nerovnosti (28) a dostaneme

$$-\gamma \omega(\gamma X - 1) + \gamma^2 \omega X = \gamma \omega > 0.$$

Vzhledem k tomu, že $\gamma > 0$ a $\omega > 0$, uvedená nerovnost platí.

Nyní přejdeme k důkazu druhé nerovnosti (28). Položíme

$$U = \frac{i_0 e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}}{\left[1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}\right]^2} > 0, \quad V = \frac{i_0}{1 + e^{-(\bar{y}-\bar{k}-i_1)}} > 0.$$

Dosadíme-li do (22)–(25), dostaneme

$$B_{11} = \alpha(U - s_1), B_{12} = -\alpha U, B_{21} = (U + V)e^{\bar{y}-\bar{k}}, B_{22} = -(U + V)e^{\bar{y}-\bar{k}}.$$

Dosadíme-li do druhé nerovnosti (28), dostaneme

$$-\alpha(U - s_1)(U + V)e^{\bar{y}-\bar{k}} + \alpha U(U + V)e^{\bar{y}-\bar{k}} = \alpha s_1(U + V)e^{\bar{y}-\bar{k}} > 0.$$

Jelikož $\alpha > 0$, a $s_1 > 0$.

Dodatek 2

Nejdříve se budeme zabývat stabilitou a nestabilitou bodu rovnováhy. Jestliže

$$A_{22} < 0 \text{ a } B_{11} + B_{22} < 0, \quad (\text{D2.1})$$

potom je stacionární bod stabilní. Dosazením hodnotu A_{11} a A_{22} do první nerovnosti (D 2.1) dostaneme

$$-\gamma + \omega(\gamma - 1).$$

Výše uvedený výraz není obecně menší než nula, stačí aby γ i ω bylo relativně velké a první ze dvou výrazů (D 2.1) bude kladný. Jestliže dosadíme hodnotu B_{11} a B_{22} do druhé nerovnosti dostaneme:

$$\alpha(U - s_1) - (U + V)e^{\bar{y}-\bar{k}}$$

V tomto případě, jestliže $U < s_1$ je i výše uvedený výraz záporný, ovšem pokud $U > s_1$ a α dostatečně veliká je daný výraz kladný.

Zajímavé bude zjistit, kdy charakteristická čísla zkoumané soustavy jsou imaginární. To nastává v případě, pokud

$$(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21} < 0 \quad \text{nebo} \quad (B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{21} < 0.$$

Do první nerovnosti dosadíme hodnotu A_{11} , A_{22} , A_{12} a A_{21} , a dostaneme:

$$[\gamma + \omega(\gamma X - 1)]^2 - 4\omega\gamma^2 X < 0.$$

Výše uvedený vztah je možné chápat jako rozdíl čtverců, který upravíme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} [\gamma + \omega(\gamma X - 1)]^2 - [2\gamma\sqrt{\omega X}]^2 &= [\gamma(1 + \omega X + 2\sqrt{\omega X}) - \omega][\gamma(1 + \omega X - 2\sqrt{\omega X}) - \omega] = \\ &= [\gamma(1 + \sqrt{\omega X})^2 - \omega][\gamma(1 - \sqrt{\omega X})^2 - \omega] < 0. \end{aligned}$$

Výše uvedený vztah je splněn pro

$$\frac{\omega}{(1 + \sqrt{\omega X})^2} < \gamma < \frac{\omega}{(1 - \sqrt{\omega X})^2} \quad \text{kde} \quad X = \frac{\theta e^{-\bar{\pi}}}{[1 + e^{-\bar{\pi}}]^2}$$

Dosadíme-li do druhého vztahu ve (D 2.2) hodnotu B_{11} , B_{22} , B_{12} a B_{21} , dostaneme:

$$\left[\alpha(U - s_1) + (U + V)e^{\bar{y} - \bar{k}} \right]^2 - 4\alpha U(U + V)e^{\bar{y} - \bar{k}} < 0.$$

Výše uvedený výraz zjednodušíme tak, že položíme

$$R = (U + V)e^{\bar{y} - \bar{k}}.$$

A tak dostaneme

$$\left[\alpha(U - s_1) + R \right]^2 - 4\alpha UR < 0.$$

Po úpravě máme

$$\alpha^2(U - s_1)^2 - 2\alpha(UR + s_1R) + R^2 < 0.$$

Na výraz vlevo v dané nerovnosti nahlížíme jako na polynom v proměnné α .

Pro $\alpha \rightarrow \pm \infty$ konverguje do nekonečna. Pro nás bude zajímavé, jestli bude mít dva od sebe různé reálné kořeny. Jestliže ne, nemůže nabývat záporných hodnot a charakteristická čísla λ_3 , λ_4 nebudou imaginární. Kořeny kvadratického trojčlenu, jsou řešením rovnice

$$\alpha^2(U - s_1)^2 - 2\alpha(UR + s_1R) + R^2 = 0.$$

Její diskriminant je

$$4(U^2R^2 + 2UR^2s_1 + s_1^2R^2) - 4(U^2R^2 - 2UR^2s_1 + s_1^2R^2) = 16UR^2s_1 > 0.$$

Diskriminant je kladný a lineární člen rovnice je $-2(UR + s_1R) < 0$ tedy kořeny rovnice jsou kladné. Jejich hodnoty vypočítáme:

$$\alpha_{1,2} = \left[(U + s_1) \pm 2\sqrt{URs_1} \right] R, \text{ kde } R = (U + V)e^{\bar{y} - \bar{k}}.$$

Je-li $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$, je druhý z výrazů (D 2.2) záporný a charakteristická čísla λ_3 , λ_4 budou imaginární.