JAKÁ JE OPTIMÁLNÍ MÍRA ÚSPOR Z POHLEDU PŘÍJEMCŮ ÚROKŮ?

Pavel Potužák*

Abstract

What is the Optimum Saving Rate from the Perspective of the Receivers of Interest?

This paper investigates the optimum saving rate from the perspective of the receivers of interest. The first part lists major contributions detected in the literature on the optimum saving rate and differential games of capitalism. The second part explores the socially optimal saving rate connected to the maximum sustainable consumption per person. A new graphical method is used to show the distribution of consumption goods between wage earners and receivers of interest. The optimum saving rate of the receivers of interest is derived in the third section. The mathematical formula indicates that this rate is lower than the golden rule, and it coincides with the optimum of the Ramsey-Cass-Koopmans model only under specific circumstances.

Keywords: optimum saving rate, interest rate, time preference, golden rule of capital accumulation

JEL Classification: E21, E13, E25

Úvod

Úspory byly většinou ve vývoji ekonomického myšlení považovány za ctnost, jelikož jsou zdrojem akumulace kapitálu a ten poté růstu bohatství ve společnosti (Smith, 1776). Úvahy zpochybňující tuto roli byly spíše sporadické, přičemž vyvrcholily dílem Keynesovým (1936), který představil teorii, v níž růst míry úspor může vést k poklesu blahobytu ve společnosti.

V moderní ekonomii vykryštovala téměř jednomyslná shoda v podobě blahodárného vlivu úspor ve velmi dlouhém období, v němž se primárně studují síly ekonomického růstu. Naopak nejednoznačná je jejich role v období krátkém, ve kterém náhlé a zásadní změny v mírách úspor mohou významně ovlivňovat průběh hospodářského cyklu, a to zejména v situacích, kdy jsou tyto změny spojeny s monetárními poruchami, ať už na straně poptávky po penězích, anebo nabídky peněz.

Tento článek ponechá stranou problematiku krátkého období a zaměří se na roli úspor v období velmi dlouhém. Zásadní otázkou bude optimální míra úspor ve walrasianské ekonomice, kde monetární síly nemají významnější vliv. Jinými slovy, základním cílem tohoto článku je odpovědět na otázku, jaká je optimální míra (tokových) úspor ve velmi dlouhém období.

Optimální velikost úspor byla podrobně zkoumána zejména v 60. letech 20. století v rámci dynamicky se rozvíjející neoklasické teorie růstu. Tento článek se pokusí doplnit standardní teorii o aspekt, který stál spíše na okraji zájmu, a sice o optimální velikost

* **Pavel Potužák** (pavel.potuzak@vse.cz), Vysoká škola ekonomická v Praze, Národohospodářská fakulta. Autor děkuje anonymním recenzentům za komentáře, které přispěly ke zvýšení kvality a srozumitelnosti tohoto článku. Článek vznikl za podpory grantu poskytnutého Vysokou školou ekonomickou v Praze, IG506016; F5/26/2016.

úspor z pohledu těch, kteří úspory generují, tj. kapitalistů. V textu bude prokázáno, že podmínka známá z literatury tzv. zlatého pravidla se liší, pokud je hlavní pozornost věnována příjemcům úroků. Analýza dokáže, že optimální míra úspor z pohledu kapitalistů je nižší než z pohledu společnosti jako celku. V tomto ohledu bude navázáno na příspěvek Lancastera (1973) a jeho pokračovatelů, kteří explicitně rozdělili společnost na dvě třídy – kapitalisty a pracovníky, a kteří zkoumali optimální chování obou tříd v rámci tzv. diferenciální hry kapitalismu.

V první části textu budou nastíněny hlavní přístupy k optimální velikosti míry úspor detekované v teorii tzv. zlatého pravidla a v literatuře diferenciálních her kapitalismu. Ve druhé části bude představena maximálně udržitelná spotřeba ve stálém stavu a novým způsobem i rozdělení spotřebních statků mezi příjemce mezd a kapitálových důchodů. Třetí část představí rozšíření stávající teorie v podobě optimálních úspor ze strany příjemců kapitálových důchodů. Bude využita nová grafická aplikace Solowova modelu, na níž bude jádro problému demonstrováno. Zároveň sekce 3 uvede matematické řešení nastoleného problému a prokáže rozdíly oproti standardnímu přístupu z části 2. Nový vyvozený vzorec naznačí, že optimální míra úspor z pohledu příjemců úroků je nižší než ve zlatém pravidle, avšak splývá s řešením složitějšího modelu optimalizujících jedinců pouze za specifických podmínek. V závěru budou shrnuty klíčové příspěvky této práce a naznačeny směry pro další výzkum.

1. Optimální míra úspor kapitalistů v literatuře

Blahodárná síla úspor byla podrobně vysvětlena Böhm-Bawerkem (1891), který celý proces popsal komplexněji, než je zvykem v moderní ekonomii: Snížená poptávka po současných spotřebních statcích uvolní výrobní faktory pro delší, avšak produktivnější metody výroby, které poskytnou vyšší output spotřebních statků v budoucnu. Böhm-Bawerkův korunní princ Hayek (1941) tuto teorii podrobně rozvinul a využil ji pro kritiku teorií (nejenom) nově se rodícího keynesovského směru, naznačujícího depresivní účinky úspor (Hayek 1931a,b; 1932; 1935a). Podle Hayeka jsou úspory zejména poptávkou po budoucích spotřebních statcích a restrukturační kapitálu ve formě zahájení oklikovějších metod výroby je přirozenou odpovědí tržního systému reagujícího na signály v podobě poklesu úrokové míry. Hayek zároveň zdůraznil roli ušetřených spotřebních statků v momentě poklesu poptávky, které mohou být zásobou v obdobích, kdy nové delší metody ještě nedozrály.

Otázku optimální velikosti úspor pro celý národ si kladl Ramsey (1928) ve slavném článku, který Hayek (1941) také znal a který položil základy moderní dynamické makroekonomii. Na Ramseyho průkopnické, avšak na mnoho let zapomenuté dílo navázali Cass (1965) a Koopmans (1963) teorií o optimální intertemporální alokaci zdrojů, která vedla ke konstrukci základního modelu, dnes známého jako Ramsey-Cass-Koopmansův model.

V návaznosti na dílo Solowa (1956) a Swana (1956) se podrobně optimální mírou úspor, respektive optimální velikostí kapitálové zásoby, zabýval Phelps (1961; 1965). Na základě neoklasického modelu podrobně rozpracoval podmínky tzv. zlatého pravidla, představujícího cestu spotřeby, jež nemůže být překonána žádnou jinou alokací zdrojů.

Základy teorie optimálního intertemporálního chování třídy pracovníků a kapitalistů položil Lancaster (1973) v rámci tzv. diferenciálních her kapitalismu. Pracovníci rozhodují o části celkového outputu, která bude spotřebována. Kapitalisté pak kontrolují, jaká

část uspořeného produktu ze strany pracovníků bude využita pro investování do kapitálové zásoby. Dle Lancasterova modelu vede toto oddělení rolí a nekooperace k nižší než optimální akumulaci kapitálu, jež by mohla být dosažena kooperací mezi třídami či centrálním plánovačem, a ztrátě společenského blahobytu. „Třídní konflikt“ tu tedy nemá marxistický charakter, jelikož snížení spotřeby pracovníků ve prospěch kapitalistického investování může zvýšit jejich spotřebu v budoucnu. Problém zde vyvstává z oddělení aktu spoření a investování a tím se blíží keynesovskému chápání. Na druhou stranu zde není oproti Keynesovi blokována hladká přeměna úspor v investice, oddělení rolí vede spíše k suboptimální akumulaci kapitálu. Tato je způsobena tzv. dynamickou externalitou, kdy intertemporální rozhodování jedné třídy a jeho důsledky neberou v úvahu dopad na intertemporální výplaty druhé třídy.

První rozšíření Lancasterova modelu lze nalézt v podobě analýzy vlastností paretovských optim a zahrnutím diskontování budoucích užitek (Hoel, 1978). Dále byly hledány cesty nápravy suboptimality této diferenciální hry kapitalismu. Pohjola (1983a) reformuloval hru z Cournotova modelu na model Stackelbergova vůdce a ukázal, že tento typ modelu může nekooperativní hru posunout blíže společenskému optimu. Pohjola (1983b) prokázal, že možnost ovládnutí části investičního procesu ze strany pracovníků posune ekonomiku blíže optimu. Optimální chování lze také vynutit pomocí vhodně zvolených hrozeb (Pohjola, 1984), či volbou nekonečného horizontu a formulací tzv. trigger strategies zajišťujících disciplínu nekooperujících hráčů (Haurie a Pohjola, 1987). Suboptimalitu diferenciální hry kapitalismu může omezit i optimální transfer mezi třídami (Kaitala a Pohjola, 1990), který byl poprvé zkoumán v modelu (Hamada, 1967).¹

Tento článek se od Lancasterovy větve výzkumu bude lišit zejména v tom, že důchody pro práci a kapitál budou odvozeny čistě od mezní produktivity jednotlivých výrobních faktorů. Dále zde nebudou odděleny akty spoření a investování. Článek tak akceptuje brzkou kritiku Lancasterova modelu ze strany Freche (1975), který upozornil na to, že diferenciální hry kapitalismu se od skutečného kapitalismu významně odchylují z důvodu nedostatečně vymezených vlastnických práv, čímž jednotlivé subjekty nemohou uzavírat efektivní smlouvy, ve kterých by pracovníci a kapitalisté získali odměny, které jim na základě jejich mezních produktivit náleží, a to ve všech periodách.

2. Zlatá míra úspor a její grafická a matematická reprezentace

V této sekci bude stručně představen základní model, na kterém bude jádro problému demonstrováno, a jehož teoretické rozšíření bude obsahem klíčové části 3. Uvažujeme ekonomiku, kterou lze popsat jednoduchou produkční funkcí, vykazující konstantní výnosy z rozsahu, klesající mezní výnosy z faktorů, splňující Inadovy podmínky (Romer, 2006), esencialitu výrobních faktorů (Barro a Sala-i-Martin, 2004) a práci rozšiřující technologický pokrok, jenž je nutný pro stabilitu kapitálového koeficientu K/Y ve stálém stavu (Acemoglu, 2011).

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) \cdot \quad (1)$$

1 Diferenciální hry kapitalismu nacházejí uplatnění i v jiných částech makroekonomie. Akimoto (2014) je využil pro interakci mezi monetárním a reálným sektorem při analýze imbalancí během finanční krize.

Díky předpokladu o konstantních výnosech z rozsahu ji lze převést na tzv. intenzivní tvar:

$$y(t) = f(k(t)), \quad (2)$$

kde $k \equiv K/(AL)$, $y \equiv Y/(AL)$, $f(k) \equiv F(k, 1)$. Zákon pohybu kapitálu v tomto neoklasickém modelu uvádí, že čisté investice $dK(t)/dt$ jsou rozdílem hrubých investic $I(t)$ a opotřebení kapitálu $\delta K(t)$. Jedná se o jednoduchý předpoklad, který však může být zpochybněn na základě tvrzení, že v realitě je často velmi obtížné rozpoznat, zda nový stroj pouze nahrazuje starý, či se jedná i o čistý přírůstek kapitálu (Hayek, 1935b).

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), \quad (3)$$

kde s je národohospodářská míra (hrubých) úspor, Y je celkový (hrubý) důchod a produkt, δ je míra opotřebení kapitálu. Model předpokládá hladkou přeměnu úspor $S = sY$ v investice I , čímž se odlišuje jak od Keynesova přístupu, tak od lancasterovských modelů, jelikož v našem případě jsou úspory proinvestovány totožnou skupinou agentů. Snadno lze ukázat, že zákon pohybu kapitálu pro veličiny v intenzivním vyjádření má tvar:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + g + n)k(t) = f(k(t)) - c(t) - (\delta + g + n)k(t), \quad (4)$$

kde n je exogenní tempo růstu populace i pracovní síly a g je tempo růstu exogenního práci rozšiřujícího technologického pokroku. Následující oddíl se zaměří na takovou míru úspor, která maximalizuje velikost spotřeby na jednotku intenzivní práce $c \equiv C^{agr}/(AL)$ ve stálém stavu, kdy $dk(t)/dt = 0$:

$$c^* = f(k^*) - (n + g + \delta)k^*. \quad (5)$$

Objem kapitálu ve stálém stavu k^* , který maximalizuje c^* , pak musí odpovídat podmínce:

$$\frac{dc^*}{dk^*} = 0 \Leftrightarrow f'(k_{GR}^*) - \delta = n + g \quad (6a)$$

$$r_{GR}^* = n + g \quad (6b)$$

$$r_{GR}^* = \left(\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \right)^*. \quad (6c)$$

Výpočty v (6) využívají faktu, že zisk maximalizující firmy srovnají mezní produkt kapitálu $MPK = \partial F(\cdot)/\partial K$ s náklady na kapitál $r + \delta$, kde r je reálná úroková míra. Produkční funkce je homogenní stupně jedna, tudíž její první derivace je homogenní stupně nula a platí $MPK = f'(k)$. Dále je dosazen fakt, že ve stálém stavu veličiny k^* , tj. na tzv. „balanced growth path“, roste produkt $Y(t)$ konstantním tempem, a sice součtem temp růstu pracovní síly n a technologií g .

Velikost kapitálu, která vede k maximální spotřebě ve stálém stavu, tzv. k_{GR}^* , musí splňovat rovnost reálné úrokové míry a tempa růstu ekonomiky. Phelps (1961, s. 638) tento stav nazval zlatým pravidlem v ekonomice Solovie (na počest Solowa). Pokud majitelé kapitálu získávají kompetitivní mezní produkt kapitálu, pak lze přímo nalézt míru úspor vedoucí ke k_{GR}^* . Ze (4), (5) a (6) plyne:

$$s_{GR} = \frac{(\delta + n + g)k_{GR}}{y_{GR}} = \frac{f'(k_{GR})k_{GR}}{y_{GR}} = \alpha_K, \quad (7)$$

kde $\alpha_K = f'(k) \cdot k/f(k) = MPK \cdot K/Y$ je podíl kapitálových důchodů na HDP (capital share of output). Zlatá míra úspor s_{GR} se tedy rovná podílu kapitálových důchodů na HDP α_K (Phelps 1961, s. 642). Pokud by majitelé kapitálu celý svůj příjem uspořili a pracovníci své mzdy spotřebovali, ekonomika by byla na takové cestě, ke které by neexistovala alternativa s permanentně vyšší průměrnou velikostí spotřeby na hlavu.

Obrázek 1 | Grafická reprezentace zlaté míry úspor a rozdělení spotřeby mezi příjemce mezd a úroků

Zdroj: vlastní zpracování

Graficky je zlatá míra úspor s_{GR} představena na obrázku 1. Jelikož se tento článek primárně zajímá o míru úspor, je pro jednoduchost předpokládána stacionární populace a nulový technologický pokrok, tj. $n = g = 0$. Ve zlatém pravidle je tak (přirozená) úroková míra ve stálém stavu nulová, jelikož je tempo růstu ekonomiky také nulové, jak plyne z podmínky (6).

Nachází-li se ekonomika ve stálém stavu nižším, než je zlaté pravidlo, $k_1^* < k_{GR}^*$, mohou pozdější generace dosáhnout asymptoticky maximálně možné udržitelné spotřeby c_{GR}^* , uskromní-li se současná generace ihned na $c(0) = (1 - s_{GR})y_1^*$ a vyšší míru úspor s_{GR} udrží permanentně. Akumulace kapitálu a následný růst produktu a důchodu na hlavu postupně navýší spotřebu na předchozí úroveň a v určitém čase bude tato překonána. Dle Böhm-Bawerka (1891) i Hayeka (1941) argument efektivity vyžaduje, aby byly vybrány pouze takové oklikovější (tj. kapitálově náročnější) metody výroby, které vedou k růstu

outputu. Jinými slovy, delší metody výroby reprezentované kapitálem k_{GR} , avšak poskytující pouze produkt y_D , nebudou nikdy vybrány. Obdobný argument platí pro ostatní metody stejné délky pojící se s kapitálem k_{GR} , avšak poskytující nižší output než y_{GR} . Metody schopné vyrobit při kapitálu k_{GR} output y_{GR} nelze za daných technologických znalostí překonat.

Obrázek 1 tedy naznačuje, že nachází-li se ekonomika pod svým zlatým pravidlem, je možné růstem úspor a omezením dnešní spotřeby díky akumulaci kapitálu a „moudře zvoleným“ (Böhm-Bawerk, 1891, s. 82) metodám výroby dosáhnout vyšší průměrné spotřeby na hlavu v budoucnu. To, co však není v moderní makroekonomii příliš akcentováno, je rozdělení větší zásoby spotřebních statků mezi příjemce mezd a úroků.

Reálná mzda W by se měla v dokonalé konkurenci rovnat fyzickému meznímu produktu práce MPL :

$$W = MPL = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial L} = \frac{\partial [f(k)AL]}{\partial L} = A \left[f(k) - f'(k) \frac{K}{L^2 A} L \right] = A [f(k) - f'(k)k]. \quad (8)$$

Pro stacionární technologie na úrovni $A = 1$ je mzda pracovníka vyjádřena pouze výrazem v hranaté závorce v (8). Mezní produkt kapitálu odpovídá sklonu tečny v bodě produkční funkce. V dokonalé konkurenci je mezní produkt kapitálu roven hrubým výnosům pro každou jednotku kapitálu. Celkový objem kapitálových důchodů na hlavu je tedy $f'(k) \cdot k$. Při kapitálové zásobě k_1^* je tento objem vyjádřen vzdáleností b na obrázku 1, jelikož $\text{tg}(\beta) = f'(k_1^*) = b/k_1^*$. Z výrazu v hranaté závorce v rovnici (8) pak plyne, že mzdu ve stálém stavu je možné reprezentovat vzdáleností W_1^* .

Z obrázku 1 je zřejmé, že při kapitálové zásobě k_1^* pouze část spotřeby na hlavu získávají příjemci mezd ($W_1^* < c_1^*$). Určitou část mohou spotřebovat i příjemci kapitálových důchodů – vzdálenost BO (což se rovná čistému úrokovému výnosu $r_1^* k_1^*$, jak bude ukázáno v rovnici (36) v sekci 3). Tento grafický rozklad rozdělení spotřeby zatím nebyl v literatuře ilustrován, avšak poskytne důležitý vhled do problematiky optimální míry úspor.

Již bylo řečeno, růst míry úspor z s_1 na s_{GR} umožní v novém stálém stavu vyšší průměrnou spotřebu na hlavu ($c_{GR}^* > c_1^*$). Obrázek 1 naznačuje, že z vyšší spořivosti budou nakonec benefitovat příjemci pracovních důchodů, jelikož jejich mzda postupně vyrostle z W_1^* na W_{GR}^* . Zároveň však graf ukazuje, že postupně klesá mezní produkt kapitálu a s ním zákonitě i úroková míra. Je zde tedy při dané technologické úrovni nepřímý úměrný vztah mezi mzdou a úrokovou mírou, který studoval v souvislosti s možnostmi a důsledky tzv. „reswitchingu“ Samuelson (2001) a v české literatuře Holman (1993). V neoklasickém jednostatkovém světě Solowova modelu by však k žádným paradoxům známým ze sporu dvou Cambridgí nemělo docházet.

Ze vztahu (6) vyplývá, že úroková míra ve zlatém pravidle poklesne na nulu a celou zásobu spotřebních statků absorbují příjemci mezd ($c_{GR}^* = W_{GR}^*$), jak je zřejmé z obrázku 1. Celý hrubý kapitálový příjem a je užít na udržení kapitálové zásoby k_{GR}^* (tj. $f'(k_{GR}^*) \cdot k_{GR}^* = a = s_{GR} \cdot y_{GR}^* = \delta k_{GR}^*$), a kapitalistům tak teoreticky na spotřebu nic nezbyvá. Je tedy možné se ptát, zda je zlatá míra úspor opravdu pro všechny subjekty ideální. Z pohledu ekonomiky jako celku toto platí, pro příjemce mezd snad také, avšak pro kapitalisty nikoliv.

Příjemci mezd by dokonce mohli preferovat vyšší objemy kapitálu a vyšší míry úspor ze strany kapitalistů, než je zlaté pravidlo. Jejich mzda by dále rostla, avšak průměrná spotřeba na hlavu v novém stálém stavu by byla paradoxně nižší – dnešní utažení opasků by v průměru nevedlo k růstu spotřeby ani v nekonečně vzdálené budoucnosti oproti

stávající situaci s původní mírou úspor s_{GR} . Důvodem je příliš nízká mezní produktivita kapitálu za zlatým pravidlem vedoucí k negativní reálné (přirozené) úrokové míře.² V této pozici se ekonomika nazývá dynamicky neefektivní a mohou v ní vznikat paradoxní situace, jako je pokles budoucí udržitelné průměrné spotřeby při omezení dnešní spotřeby, či naopak růst budoucí udržitelné spotřeby při růstu dnešní spotřeby. Avšak ostrým rozdělením společnosti mezi příjemce mezd a úroků je možné implikovat, že ti první by mohli tento stav preferovat před zlatým pravidlem. V následující sekci naopak představíme stavy, které preferují příjemci úroků. Je zřejmé, že se bude jednat o alokace s nižším objemem kapitálu, než je zlaté pravidlo s nulovou reálnou úrokovou mírou.

3. Optimální míra úspor z pohledu kapitalistů

V sekci 3 zaměříme pozornost na optimální chování příjemců kapitálových důchodů. Jinými slovy, bude studována optimální míra úspor z pohledu těch, kteří generují úspory. Na individuální úrovni platí, že růst úspor jedince povede k růstu jeho budoucího disponibilního důchodu, pokud tento agent neovlivní svým chováním tržní úrokovou míru.

Při úrokové míře 5 % tak úspora 100 jednotek umožní spotřebu dodatečných 5 jednotek v příštím roce, či 10 jednotek při odepření dnešní spotřeby ve výši 200 jednotek. Avšak rozhodnou-li se zvýšit úspory všichni (respektive významná část agentů), musí při stabilní investiční křivce klesnout úroková míra. Celkový dopad na kapitálové důchody pak závisí na dvou efektech – růstu kapitálu a poklesu úrokové míry. Klesne-li úroková míra na 2 %, pak úspora 200 jednotek vyvolá možnost dodatečné spotřeby pouhých 4 jednotek v budoucnu, což je horší situace pro kapitalisty, než když všichni v průměru spořili pouhých 100 jednotek při úrokové míře 5 %.

Nejprve bude analyzováno optimum kapitalistů z pohledu hrubých výnosů z kapitálu, tj. $(r + \delta)k = f'(k)k$. Z těchto výnosů kapitalisté část použijí na udržovací investice δk a zbytek mohou využít na svou spotřebu či na čisté investice. Analýza čistých kapitálových důchodů rk bude provedena později. Obrázek 1 (vzdálenosti b a a) a obrázek 2 (vzdálenosti b , a , h) ukazují vývoj hrubých kapitálových výnosů na hlavu při různých mírách úspor. Otázkou je, pro jakou národohospodářskou míru úspor je dosaženo maximálního hrubého kapitálového výnosu na hlavu ve stálém stavu $k^*(s, \delta)$.

Řešení nabízí následující postup. Pro maximum platí:

$$\frac{\partial [f'(k^*)k^*]}{\partial s} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial [f'(k^*)k^*]}{\partial s} = k^* f''(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} + f'(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} = 0. \quad (10)$$

Jak je zřejmé z obrázku 1 a jak by bylo možné snadno matematicky dokázat ze (4) a (5), kapitál ve stálém stavu k^* vždy roste s vyšší mírou úspor s , proto (10) přechází na:

$$\frac{k^* f''(k^*)}{f'(k^*)} = -1. \quad (11)$$

2 Negativní přirozenou úrokovou mírou a jejím vztahem k dynamické neefektivnosti se zabývá Potužák (2016).

Podmínka (11) uvádí, že objem kapitálu, který vede k maximálnímu hrubému kapitálovému důchodu na hlavu, je dosažen tehdy, pokud je elasticita mezního produktu kapitálu vzhledem ke kapitálu rovna -1 . Jinými slovy, růst kapitálu o 1 % musí vyvolat pokles mezního produktu kapitálu právě o jedno procento.

Jak ukáže další odvození, podmínku (11) je možné zapsat jako:

$$\frac{1 - \alpha_K}{\sigma_{K,L}} = 1, \quad (12)$$

kde α_K je elasticita outputu vzhledem ke kapitálu a v dokonalé konkurenci odpovídá podílu kapitálových důchodů na HDP a $\sigma_{K,L}$ je elasticita substituce mezi kapitálem a prací. Pro Cobb–Douglasovu produkční funkci (CDPF) $y = k^\alpha$ dosahuje tato elasticita jedné, $\sigma_{CDPF} = 1$, a tak pro jakékoliv pozitivní α nižší než 1 v této funkci je z pohledu maximálních hrubých kapitálových výnosů výhodné neustále zvyšovat objem kapitálu.³ Viděno alternativním pohledem (11), elasticita mezního produktu kapitálu vzhledem ke kapitálu je u CDPF relativně nízká (konkrétně $\alpha - 1$) a nikdy nedosáhne úrovně -1 . U CDPF zvýšení kapitálu o 1 % vždy sníží hrubý výnos pro jednotku kapitálu o méně než jedno procento.

Přechod mezi (11) a (12) je netriviální a lze ho dokázat následovně:

$$\sigma_{K,L} = \frac{d \frac{K}{L}}{dMRTS} \frac{MRTS}{\frac{K}{L}}, \quad (13)$$

kde MRTS je mezní míra technické substituce mezi kapitálem a prací. Pro stacionární technologie $A = 1$, a tudíž $k \equiv K/L$, platí s využitím (8):

$$\begin{aligned} \frac{dMRTS}{d(K/L)} &= \frac{d\left(\frac{MPL}{MPK}\right)}{dk} = \frac{d \frac{f(k) - f'(k)k}{f'(k)}}{dk} = \frac{d \left[\frac{f(k)}{f'(k)} - k \right]}{dk} = \\ &= \frac{f'(k)f'(k) - f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2} - 1 = \frac{-f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Využitím (14) a věty o derivaci inverzní funkce je možné (13) zapsat jako:

$$\begin{aligned} \sigma_{K,L} &= \frac{[f'(k)]^2}{-f(k)f''(k)} \frac{f(k) - f'(k)k}{f'(k)} \frac{1}{k} = \frac{[f'(k)]^2}{-f(k)f''(k)} \left(\frac{f(k)}{f'(k)k} - 1 \right) = \frac{f'(k)k}{f(k)} \frac{f'(k)}{kf''(k)} \left(1 - \frac{f(k)}{f'(k)k} \right) = \\ &= \alpha_K \frac{f'(k)}{kf''(k)} \left(1 - \frac{1}{\alpha_K} \right) = \alpha_K \frac{f'(k)}{kf''(k)} \frac{\alpha_K - 1}{\alpha_K} = (\alpha_K - 1) \frac{f'(k)}{kf''(k)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Z (9)–(15) tedy plyne, že hrubý důchod pro kapitál na hlavu je maximalizován v bodě, kde je elasticita substituce mezi kapitálem a prací $\sigma_{K,L}$ rovna podílu mzdových důchodů na HDP $(1 - \alpha_K)$.

3 Naopak pro velmi nízkou elasticitu substituce mezi prací a kapitálem se může stát optimálním negativní míra hrubých úspor, tj. přímo spotřebovávat kapitál (je-li to možné).

Obrázek 2 | Grafická reprezentace velikosti úroku v Solowově modelu pro různé míry úspor

Zdroj: vlastní zpracování

Jelikož z hrubých důchodů musí kapitalisté hradit opotřebení kapitálu, aby byla daná zásoba udržena, je vhodnější jako kritérium jejich blahobytu zvolit čisté kapitálové důchody na hlavu, tj. rk . Graficky ukazuje vývoj tohoto součinu obrázek 2. Čistý výnos pro kapitál rk (tj. úrok) je vždy rozdílem mezi hrubým výnosem $f'(k)k$ a opotřebením δk (např. v k_1^* je $f'(k_1^*)k_1^* = b$, tj. $r_1^*k_1^* = b - \delta k_1^* > 0$). Až po zlaté pravidlo je úrok pozitivní, ve zlatém pravidle nulový a za zlatým pravidlem negativní. Z pohledu kapitalistů tak zlaté pravidlo není optimem, nýbrž kapitálová zásoba by měla být z jejich pohledu ve stálém stavu nižší, např. k_1^* .

Národohospodářská míra úspor, která maximalizuje ve stálém stavu čistý kapitálový výnos pro kapitalisty, je následující:

$$\frac{\partial [f'(k^*) - \delta]k^*}{\partial s} = \frac{\partial [f'(k^*)k^* - \delta k^*]}{\partial s} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial [f'(k^*)k^* - \delta k^*]}{\partial s} = k^* f''(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} + f'(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} - \delta \frac{\partial k^*}{\partial s} = 0 \quad (17)$$

$$k^* f''(k^*) + f'(k^*) = \delta. \quad (18)$$

Využitím vzorce pro stálý stav (5) při $n = g = 0$, $sf(k^*) = \delta k^*$, lze (18) zapsat jako:

$$\frac{k^* f''(k^*)}{f'(k^*)} + 1 = \frac{s^{opt} f(k^*)}{k^*} \frac{1}{f'(k^*)}. \quad (19)$$

Vzorec elasticity substituce (15) a vztah pro podíl kapitálových důchodů na HDP $\alpha_K = f''(k)f(k)$ poté implikují:

$$\frac{\alpha_K - 1}{\sigma_{K,L}} + 1 = \frac{s^{opt}}{\alpha_K}. \quad (20)$$

Národohospodářská míra úspor, která maximalizuje čistý důchod z kapitálu na hlavu ve stálém stavu r^*k^* , tedy je:

$$s^{opt} = \alpha_K \left(\frac{\alpha_K - 1}{\sigma_{K,L}} + 1 \right). \quad (21)$$

Z podmínky (21) plyne,⁴ že s^{opt} je nižší než zlatá míra úspor $s_{GR} = \alpha_K$. S tou by splynula pouze za předpokladu nekonečně vysoké elasticity substituce mezi prací a kapitálem, která je charakterizována lineárními izokvantami produkce. Avšak tato by porušila mnohé předpoklady o produkční funkci uvedené výše, např. klesající MPK, Inadovy podmínky, esencialitu vstupů apod. Naopak pro ekonomy tolik využívanou CDPF je elasticita substituce rovna jedné a podmínka (21) přechází na:

$$s_{CDPF}^{opt} = (\alpha_K)^2. \quad (22)$$

Optimem pro kapitalisty je tedy čtverec podílu kapitálových důchodů na HDP. Pro standardně uváděnou $\alpha_K = 1/3$ z národních účtů by národohospodářská míra úspor z pohledu kapitalistů měla dosáhnout nikoliv jedné třetiny, jak implikuje zlaté pravidlo, nýbrž pouhých 11 %.⁵

Dále je možné se zamyslet nad mírou úspor kapitalistů s_K , která by maximalizovala jejich spotřebu ve stálém stavu. Hrubý důchod reprezentativního příjemce kapitálových důchodů, který může využít buď na hrubé úspory, nebo na spotřebu, je $f'(k)k$. Proto spotřeba kapitalisty c_K je:

$$c_K = f'(k)k(1 - s_K) \quad (23a)$$

$$c_K = f'(k)k - s_K f'(k)k. \quad (23b)$$

Uvažujme, že celé břemeno úspor leží na bedrech kapitalistů, respektive že je striktně oddělena role příjemců kapitálových důchodů a příjemců mezd. Ti druzí pouze spotřebovávají, ti první spotřebovávají, spoří a tyto úspory i celé investují. Pouze díky první

4 Studium odborné literatury provedené autorem tohoto článku zatím naznačuje, že podmínka (21) (a ostatní klíčové podmínky na tuto navazující v sekci 3, zejména pak (31)) zatím nebyla v jiné teoretické práci nalezena a odvozena. Obdobný závěr platí o předchozích podmínkách (11), (12) a postupu (15).

5 Stejně jako u vzorce (11) je možná situace, kdy při velice nízké elasticitě substituce je optimální negativní míra úspor. Dále je zřejmé, že míra úspor (21), respektive (22), je nevýhodná z pohledu pracovníků, jelikož je akumulováno méně kapitálu než ve zlatém pravidle, a reálné mzdy jsou tak nižší než ve zlatém pravidle.

skupině je v ekonomice vytvářen kapitál. Tento (Kaleckého, 1942, s. 258) předpoklad je v tomto typu literatury častý. Lze ho nalézt např. u Kaitala a Pohjola (1990, s. 425), Hamady (1967, s. 296), Hoela (1978, s. 336), předpoklad o plně spotřebovaném pracovním důchodu pak v Uzawovi (1961, s. 40).

Je zřejmé, že se jedná o velice silný předpoklad. Lze totiž namítat, že v drtivé většině případů také pracovníci tvoří úspory a schéma dělníků, kteří svoji mzdu plně spotřebují, se hodí spíše do Marxova temného vidění světa 19. století. Optimální míra úspor v ekonomice jedinců, kteří jsou pracovníky a zároveň spoří, je představena na konci tohoto článku ve vzorci (40). Daný předpoklad má tak zřejmý dopad do vyvozeného vzorce. Na druhou stranu je možné si představit oddělení ekonomických rolí i v rámci jedné osoby a ptát se, jaká míra úspor je optimální z pohledu jedince jako střadatele-kapitalisty. Toto zdůrazňuje Rothbard (2004), který funkci kapitalisty definuje tím, že daný člověk část svého důchodu spoří, tj. nabízí současné statky a poptává statky budoucí. I relativně nové články z proudu literatury diferenciálních her kapitalismu se stále drží tohoto přístupu (Leong a Huang, 2010, s. 554; Yang a Gao, 2013, s. 8).⁶

Pokud tedy akceptujeme předpoklad nespořících pracovníků, vzorec pro stálý stav má tvar:

$$s_K f'(k^*)k^* = \delta \cdot k^*. \quad (24)$$

Rovnice (24) popisuje, že úspory kapitalistů ve stálém stavu přesně pokryjí opotřebení kapitálu. Využitím (24) a (23b) získáme spotřebu kapitalistů ve stálém stavu:

$$c_K^* = f'(k^*)k^* - \delta \cdot k^*. \quad (25)$$

Je zřejmé, že spotřeba kapitalistů pak plyne z jejich čistých důchodů $r^*k^* = (f'(k^*) - \delta)k^*$. Míra úspor kapitalistů, která povede k jejich maximální udržitelné spotřebě, musí splňovat podmínku:⁷

$$\frac{\partial c_K^*}{\partial s_K} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial c_K^*}{\partial s_K} = k^* f''(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} + f'(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} - \delta \frac{\partial k^*}{\partial s} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial c_K^*}{\partial s_K} = k^* f''(k^*) + f'(k^*) - \delta = 0. \quad (28)$$

Dosazením vzorce pro stálý stav (24) získáváme:

6 Russo (2015) představil agent-based model, kde přechod jedince mezi rolí kapitalisty a pracovníka je endogenní, přičemž role první je spojena s vyšším akumulovaným bohatstvím, které dále zvyšuje pravděpodobnost, že daný agent kapitalistou zůstane i v dalším období. Možnost nerovného bohatství mezi dvěma třídami, kde agenti začínají ze stejné startovací čáry s homogenními schopnostmi, je představena v Russovi (2014). V tomto modelu však pouze kapitalisté mohou získávat zisky z kapitálu. Pokud je model simulován tak, že pracovníci celý svůj důchod spotřebují a kapitalisté uspoří, vede to k vyššímu tempu růstu celkového bohatství, vyšší nerovnosti bohatství a ke strnulé struktuře společnosti s nízkou mobilitou mezi třídami.

7 Díky předpokladům o produkční funkci není třeba vyšetřovat podmínky druhého řádu. Body podezřelé z extrému jsou vždy maxima.

$$k^* f''(k^*) + f'(k^*) = s_K^{opt} f'(k^*), \quad (29)$$

což vede na:

$$s_K^{opt} = \frac{k^* f''(k^*)}{f'(k^*)} + 1. \quad (30)$$

Využitím vzorce pro elasticitu substituce přechází (30) na:

$$s_K^{opt} = \frac{\alpha_K - 1}{\sigma_{K,L}} + 1. \quad (31)$$

Pro CDPF s elasticitou substituce rovnou jedné je optimální mírou úspor kapitalistů $s_K = \alpha$. Na první pohled se může zdát, že tento závěr odpovídá zlatému pravidlu. Avšak podmínka zlatého pravidla (7) se vztahuje k národohospodářské míře úspor, zatímco rovnice (31) k míře úspor kapitalistů. Existuje mezi nimi následující vztah:

$$\dot{k}(t) = 0 \Leftrightarrow s_K f'(k^*) k^* = \delta \cdot k^* \Leftrightarrow s f(k^*) = \delta \cdot k^*. \quad (32)$$

Z (32) plyne, že:

$$s = s_K \cdot \alpha_K. \quad (33)$$

S využitím (33) a (31) je možné nalézt optimální národohospodářskou míru úspor v této úloze. Rovnice (34) ukazuje, že daná míra přesně odpovídá podmínce (21) z minulého odvození, a tak jsou oba přístupy zaměnitelné:

$$s^{opt} = s_K^{opt} \cdot \alpha_K = \alpha_K \left(\frac{\alpha_K - 1}{\sigma_{K,L}} + 1 \right). \quad (34)$$

Je tedy možné buď hledat maximální udržitelný úrokový příjem pro kapitalisty, či jejich maximální udržitelnou spotřebu. Tento závěr není překvapivý, jak dokumentuje následující odvození.

Agregátní produkt se v uzavřené ekonomice bez vlády rovná $Y = C^{agr} + I$. Jelikož se produkt rovná důchodu, který je buď spotřebován, nebo uspořen, platí $Y = C^{agr} + S$. Celkový hrubý důchod je rozdělen mezi příjemce mezd a hrubých kapitálových důchodů, tudíž $Y = WL + (r + \delta)K$. Ve stálém stavu se hrubé investice rovnají opotřebením, $I = \delta K$, přičemž úspory jsou proinvestovány: $S = I$. Z toho plyne, že platí následující identita:

$$W^*L + r^*K^* + \delta K^* = C^{*agr} + \delta K^*. \quad (35)$$

Průměrná spotřeba na hlavu $c = C^{agr}/L$ je tedy ve stálém stavu hrazena buď ze mzdy W , nebo úrokového příjmu $r \cdot K/L$, jak také dokumentuje obrázek 3, na němž je novým způsobem zachyceno grafické zobrazení úroku na hlavu a úrokové míry a rozložení spotřeby mezi kapitalisty a pracovníky. Rovnici (35) lze vydělením počtem pracovníků L převést na:

$$W^* + r^*k^* = c^* = c_L^* + c_K^* \quad (36)$$

Průměrná spotřeba c^* se dělí mezi spotřebu pracovníků a spotřebu kapitalistů. Pokud pracovníci celý svůj důchod spotřebují, pak jediným zdrojem spotřeby kapitalistů ve stálém stavu je právě čistý úrokový příjem r^*k^* . Proto je otázka maximalizace úrokového příjmu a spotřeby kapitalistů zaměnitelná.

Pokud by byl explicitně modelován reprezentativní kapitalista a jeho celoživotní užitková funkce, pak:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(C_K(t)) dt . \quad (37)$$

A pokud by jeho spotřeba mohla být hrazena pouze z úrokového důchodu, pak (37) přechází na:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u([f'(k(t)) - \delta]k(t)) dt . \quad (38)$$

Řešení pomocí Eulerovy rovnice, kde kontrolní proměnnou je objem kapitálu na hlavu, je:

$$e^{-\rho t} u'(C_K(t)^{opt}) [k(t)^{opt} f''(k(t)^{opt}) + f'(k(t)^{opt}) - \delta] = 0 , \quad (39)$$

což po vydělení výrazem $\exp(-\rho t) u'(C_K^{opt})$ přechází na (28), a tudíž ve stálém stavu na (21) či (34).

Obrázek 3 | Grafická reprezentace rozdělení spotřebních statků mezi příjemce mezd a úroků

Zdroj: vlastní zpracování

Všechny směry analýzy tedy vedou k závěru, že z pohledu kapitalistů není optimální spořit na národohospodářské úrovni zlatou míru úspor, jež by mohla ve velmi dlouhém období přinést maximum spotřeby ze společenského hlediska, nýbrž pro kapitalisty je

ideální odřící si méně dnešní spotřeby. Příčina nesouladu spočívá v tom, že příjemci úroků při akumulaci neberou v úvahu dopad na mezní produktivitu práce, reálné mzdy a spotřebu pracovníků, které jsou všechny pozitivně ovlivněny vyšším objemem kapitálu. Závěr našeho modelu je tak obdobný jako v lancasterovských modelech, i když model představený v tomto článku byl postaven na jiných předpokladech.

Závěr o nižší optimální míře úspor, než je zlaté pravidlo, lze odvodit i v Ramsey-Cass-Koopmansově modelu s netrpělivými jedinci vykazujícími diskont budoucích užiteků $\rho > 0$, v němž role kapitalisty a příjemce mezd není odlišena. Jinými slovy, pracovníci mohou také spořit, a tak se optimum agentů liší oproti modelu představeném výše. Lze ukázat, že optimální míra úspor ve stálém stavu RCK modelu v ekonomice s konstantní populací, neměnnými technologiemi a CDPF je:⁸

$$s_{RCK}^* = \frac{\delta\alpha}{\rho + \delta}. \quad (40)$$

Ze (40) plyne, že existence pozitivní časové preference ρ ve smyslu druhého Böhm-Bawerkova důvodu (Potužák, 2016) je zdrojem pozitivní úrokové míry ve stálém stavu v RCK modelu, jelikož $s_{RCK} < s_{GR} = \alpha_K$. Konkrétně lze ukázat, že $r_{RCK}^* = \rho$. Dále je zřejmé, že i v tomto modelu může být optimální míra úspor nulová, pokud by populace a technologie nerostly ($n = g = 0$) a pokud by byl kapitál nekonečně trvanlivý ($\delta = 0$).⁹

Optimální míry úspor v modelu představeném v tomto článku a v RCK modelu však nejsou totožné. Optimální míra úspor (21), respektive (22), z naší analýzy a z RCK modelu (40) splynou pro CDPF pouze za těchto podmínek:

$$\alpha \left(\frac{\alpha - 1}{\sigma_{K,L}} + 1 \right) = \frac{\delta\alpha}{\rho + \delta} \quad (41)$$

$$\alpha^2 = \frac{\delta\alpha}{\rho + \delta} \quad (42a)$$

$$\rho = \delta \frac{1 - \alpha}{\alpha}. \quad (42b)$$

Pro míru opotřebení $\delta = 4\%$ a podíl kapitálových důchodů na HDP $\alpha = 1/3$ je implicitovaná subjektivní diskontní míra $\rho = 8\%$. Tato by srovnala optimum v RCK modelu a pohled kapitalistů na optimální míru úspor. Pro oba pohledy by platilo, že $s = 11\%$. Pro $\delta = 5\%$ a $\alpha = 55\%$, což přibližně odpovídá údajům z české ekonomiky,¹⁰ by implicitovaná subjektivní diskontní míra dosahovala $\rho = 4\%$ a míra úspor $s = 30\%$.

8 Obdobný vzorec lze nalézt u Phelps a Pollaka (1968, s. 189), kteří jako první zkoumali v herně-teoretickém modelu podmínky, za kterých nemusí být akumulováno optimální množství kapitálu.

9 Netrpělivost agentů způsobuje, že z pohledu celoživotního užtku budoucí (a dokonce permanentní) růst spotřeby nevykompenzuje její současné dočasné snížení spojené s pozitivní mírou úspor. Na druhou stranu v rámci diferenciálních her kapitalismu Kaitala a Pohjola (1990, s. 431) ukázali, že bez ekonomického růstu není možné dosáhnout dohody na optimální akumulaci, respektive přirozený růst ekonomiky ($n + g > 0$) je nutný pro dosažení optimální akumulace a redistribuce mezi třídami.

10 <http://apl.czso.cz/pll/rocenka/rocenka.indexnu>, smíšený důchod byl pro jednoduchost celý přidán k objemu kapitálových důchodů v této kalkulaci, což nadhodnocuje výslednou míru úspor s a podhodnocuje odhadnutou subjektivní diskontní míru ρ .

Závěr

Při hledání optimální míry úspor je možné navrhnout mnoho variant řešení. Z pohledu maximální udržitelné spotřeby je to zlaté pravidlo akumulace kapitálu Edmunda Phelps, které však ve stacionární ekonomice vede k nulové reálné přirozené úrokové míře. Explicitním zahrnutím optimalizujících netrpělivých jedinců, u kterých není rozlišena role příjemce mezd a úroků, není při nulové úrokové míře optimální udržovat konstantní profil spotřeby. Pozitivní časová preference vede jedince k volbě klesající cesty optimální spotřeby s velmi vysokou počáteční úrovní, která neumožní udržet objem kapitálové zásoby zlatého pravidla. Ekonomika je pak přitahována do bodu, kde je přirozená úroková míra rovna velikosti pozitivní subjektivní diskontní míry. Síla časové preference může dokonce vést k výběru nulové míry úspor a stacionární ekonomiky ve světě, kde je díky nekonečné trvanlivosti kapitálových statků možný trvalý ekonomický růst i bez přítomnosti technologického pokroku či populačního růstu.

Článek ukázal, že explicitní rozdělení rolí mezi příjemce úroků a mezd přináší nový vhled do této teorie. Z pohledu kapitalistů představuje zlaté pravidlo také příliš mnoho akumulovaného kapitálu a nízkou úrokovou míru. Byl odvozen vzorec optimální míry úspor, která je nižší než ve zlatém pravidle. Tato míra splyne s optimem RCK modelu pouze při jedné specifické kombinaci parametrů. Na druhou stranu je představitelné, že daný vzorec může naznačit a vyvodit velikost nepozorovatelné subjektivní diskontní míry ve společnosti.

Model abstrahoval od existence rizika, předpokládal konzistentní exponenciální diskontování a uvažoval homogenní formu kapitálu. Tyto tři oblasti představují další směry, ve kterých může být model rozšířen – explicitně modelovat riziko, hyperbolické diskontování či heterogenní kapitál. Odvozený vzorec z tohoto článku bude nutně modifikován, avšak nejspíš není příliš pravděpodobné, že by se změnilo základní poselství představené analýzy.

Literatura

- Acemoglu, D. (2011). *Introduction to Modern Economic Growth: Parts 1-4*. Cambridge (MA): MIT Press. ISBN 0-262-02283-4.
- Akimoto, K. (2014). A Fundamental Cause of Economic Crisis – A Macro-economic Game between the Real Economic Sector and Monetary Sector. *International Journal of Economic Sciences*, 3(4), 1–37.
- Barro, R. J., Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic Growth*. 2. vyd. Cambridge (MA): MIT Press. ISBN 0-262-02553-1.
- Böhm-Bawerk, E. (1891) [1888]. *Positive Theory of Capital*. New York: G. E. Stechert & Co.
- Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *Review of Economic Studies*, 37(3), 233–240, <https://doi.org/10.2307/2295827>
- Frech, H. E. III. (1975). Property Rights and the Dynamic Inefficiency of Capitalism: Comment. *Journal of Political Economy*, 83(1), 209–214, <https://doi.org/10.1086/260314>
- Hamada K. (1967). On the Optimal Transfer and Income Distribution in a Growing Economy. *The Review of Economic Studies*, 34(3), 295–299, <https://doi.org/10.2307/2296677>

- Haurie, A., Pohjola, M. (1987). Efficient Equilibria in a Differential Game of Capitalism. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 11(1), 65–78, [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(87\)90024-8](https://doi.org/10.1016/0165-1889(87)90024-8)
- Hayek, F. A. (1931a). The „Paradox“ of Saving. *Economica*, 32, 125–169, <https://doi.org/10.2307/2547921>
- Hayek, F. A. (1931b). Reflections on the Pure Theory of Money of Mr. J. M. Keynes. *Economica*, 33, 270–295, <https://doi.org/10.2307/2548035>
- Hayek, F. A. (1932). Reflections on the Pure Theory of Money of Mr. J. M. Keynes (continued). *Economica*, 35, 22–44, <https://doi.org/10.2307/2548974>
- Hayek, F.A. (1935a) [1931]. *Prices and Production*. 2. vyd. New York: Augustus M. Kelly Publishers.
- Hayek, F.A. (1935b). The Maintenance of Capital. *Economica*, 2(7), 241–276, <https://doi.org/10.2307/2548607>
- Hayek, F.A. (1941). *The Pure Theory of Capital*. Chicago: Chicago University Press. ISBN 0-226-32081-2.
- Hoel, M. (1978). Distribution and Growth as a Differential Game between Workers and Capitalists. *International Economic Review*, 19(2), 335–350, <https://doi.org/10.2307/2526304>
- Holman, R. (1993). Někteřé kontroverze v moderní teorii kapitálu. *Politická ekonomie*, 41(3), 407–420.
- Kaitala, V., Pohjola, M. (1990). Economic Development and Agreeable Redistribution in Capitalism: Efficient Game Equilibria in a Two-Class Neoclassical Growth Model. *International Economic Review*, 31(2), 421–438, <https://doi.org/10.2307/2526848>
- Kalecki, M. (1942). A Theory of Profits. *The Economic Journal*, 52(206/207), 258–267, <https://doi.org/10.2307/2225784>
- Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. London: Harcourt, Brace and Company.
- Koopmans, T. C. (1963). On the Concept of Optimal Economic Growth. *Cowles Foundation Discussion Papers* 163. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
- Lancaster, K. (1973). The Dynamic Inefficiency of Capitalism. *Journal of Political Economy*, 81(5), 1092–1109, <https://doi.org/10.1086/260108>
- Leong, C. K., Huang W. (2010). A Stochastic Differential Game of Capitalism. *Journal of Mathematical Economics*, 46(4), 552–561, <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2010.03.007>
- Phelps, E. S. (1961). The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen. *The American Economic Review*, 51(4), 638–643.
- Phelps, E. S. (1965). Second Essay on the Golden Rule of Accumulation. *The American Economic Review*, 55(4), 793–814.
- Phelps, E. S., Pollak, R. A. (1968). On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth. *The Review of Economic Studies*, 35(2), 185–199, <https://doi.org/10.2307/2296547>
- Pohjola, M. (1983a). Nash and Stackelberg Solutions in a Differential Game Model of Capitalism. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 6, 173–186, [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(83\)90048-9](https://doi.org/10.1016/0165-1889(83)90048-9)
- Pohjola, M. (1983b). Worker's Investment Funds and the Dynamic Inefficiency of Capitalism. *Journal of Public Economics*, 20(2), 271–279, [https://doi.org/10.1016/0047-2727\(83\)90015-4](https://doi.org/10.1016/0047-2727(83)90015-4)

- Pohjola, M. (1984). Threats and Bargaining in Capitalism a Differential Game View. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 8(3), 291–302, [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(84\)90009-5](https://doi.org/10.1016/0165-1889(84)90009-5)
- Potužák, P. (2016). Fisher and Mises on Zero Interest: A Reconsideration. *Prague Economic Papers*, 25(2), 203–220, <https://doi.org/10.18267/j.pep.555>
- Ramsey, F. P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, 38(152), 543–559, <https://doi.org/10.2307/2224098>
- Romer, D. (2006). *Advanced Macroeconomics*. 3. vyd. New York: McGraw-Hill. ISBN 0-07-287730-8.
- Russo, A. (2014). A Stochastic Model of Wealth Accumulation with Class Division. *Metroeconomica*, 65(1), 1–35, <https://doi.org/10.1111/meca.12021>
- Russo, A. (2015). *An Agent Based Macroeconomic Model with Social Classes and Endogenous Crises*. Working paper. Dostupné z: www.siecon.org/online/wp-content/uploads/2015/10/Russo1.pdf
- Rothbard, M. N. (2004) [1962]. *Man, Economy, and State*. Auburn (AL): Ludwig von Mises Institute. ISBN 0-945466-30-7.
- Samuelson, P. A. (2001). A Modern Post-Mortem On Böhm's Capital Theory: Its Vital Normative Flaw Shared by Pre-Sraffian Mainstream Capital Theory. *Journal of the History of Economic Thought*, 23(3), 301–317, <https://doi.org/10.1080/10427710120073591>
- Smith, A. (2001) [1776]. *Bohatství národů*. Praha: Liberální institut. ISBN 80-86389-15-4.
- Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65–94, <https://doi.org/10.2307/1884513>
- Swan, T. W. (1956). Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record*, 32(2), 334–361, <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>
- Uzawa, H. (1961). On a Two-Sector Model of Economic Growth. *The Review of Economic Studies*, 29(1), 40–47, <https://doi.org/10.2307/2296180>
- Yang, X., Gao J. (2013). Uncertain differential games with application to capitalism. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, 1(1), 1–17, <https://doi.org/10.1186/2195-5468-1-17>