# ALTERNATIVNÍ SPECIFIKACE, ODHAD A IDENTIFIKACE VEKTOROVÝCH AUTOREGRESÍ

**Roman Hušek, Tomáš Formánek***

## Úvod

Cílem příspěvku je ukázat a ilustrovat, jaké důsledky pro interpretaci, vlastnosti a využití vektorových autoregresí (VAR), resp. modelů VAR, mají alternativní způsoby jejich specifikace, odhadu parametrů a identifikace. Zvlášť jsou zkoumány dopady postupů používaných pro neomezený redukovaný tvar modelu VAR, označovaný jako standardní tvar, a odděleně pro tzv. strukturní model vektorových autoregresí neboli SVAR model, který je východiskem pro odhad tzv. funkcí odezvy. Zároveň jsou odvozeny i vztahy mezi oběma způsoby prezentace VAR modelů a vysvětleny odlišnosti v jejich interpretaci a uplatnění při makroekonomických analýzách a prognóze. Součástí příspěvku je i zhodnocení kladů a záporů aplikace vektorových autoregresí a jejich srovnání s ekonometrickými strukturními modely simultánních rovnic a modely všeobecné rovnováhy.

## 1. Modely vektorových autoregresí

Nedostatečná reprezentace dynamických vztahů mezi proměnnými simultánních rovnic (SR) vedla k rozpracování (Sims, 1980) modelů VAR jako alternativy SR, která umožňuje lépe vystihnout dynamické interakce proměnných, resp. dynamickou strukturu modelovaných procesů. Sims ve svém článku poukázal i na skutečnost, že předpokládaná exogenita některých proměnných modelů SR není vždy plně v souladu s ekonomickou teorií, nýbrž odráží často subjektivní preference autorů modelů. Proto modely VAR nevyžadují klasifikaci proměnných na endogenní a exogenní, takže uvažované proměnné jsou zpravidla a priori endogenního typu. Každá proměnná VAR je vyjádřena nejčastěji jako lineární funkce svých zpožděných hodnot a zpoždění všech ostatních proměnných modelu. Struktura zpoždění proměnných v jednotlivých rovnicích je obvykle stejná, takže predeterminované proměnné jsou v dalších rovnicích VAR modelu identické (symetrický model).

Obsahuje-li model VAR exogenní proměnné, jde zpravidla o trendové nebo sezonní nula-jednotkové umělé proměnné. Protože specifikace VAR, na rozdíl od SR, nevyžaduje teoretické poznatky o modelované struktuře, jsou VAR modely označované jako ateoretické. Jejich východiskem je pouze skutečnost, že makroekonomické proměnné mají často shodný trend a jsou sériově korelované. VAR jsou tak zobecněním

* Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky (husek@vse.cz, formanek@vse.cz)
Příspěvek byl zpracován v rámci grantového projektu IGA F4/24/2014, FIS, VŠE v Praze.

jednorovnicových autoregresních (AR) modelů pro časové řady více proměnných a lze je chápat i jako hybrid mezi AR jednorovnicovými modely a soustavami SR.

Aplikují-li se VAR modely k souhrnné analýze dynamických interakcí mezi proměnnými, např. pomocí funkcí odezvy (FO) nebo dekompozice rozptylu chyb předpovědi, jsou nutné apriorní identifikační předpoklady týkající se vztahů mezi proměnnými, které ovšem nelze ověřovat statistickými postupy. Aplikace těchto identifikačních omezení parametrů umožňuje specifikovat strukturní vektorové autoregresní, neboli SVAR modely.

Před specifikací VAR je nutno nejprve zkoumat, zda pozorované hodnoty časových řad ekonomických proměnných jsou alespoň slabě stacionární, takže nevykazují žádné trendy či sezonnost. Slabá (kovarianční) stacionarita časové řady znamená, že její první a druhé momenty jsou v čase konstantní a konečné. Neobsahuje-li proměnná stochastický trend, resp. jednotkový kořen, nazývá se integrovaná řádu nula, neboli $I(0)$. Není-li časová řada příslušné proměnné $I(0)$, dosáhne se její stacionarity např. pomocí logaritmů, resp. nejčastěji prostřednictvím prvních či druhých diferencí řad typu $I(1)$, resp. $I(2)$. Obsahuje-li časová řada proměnné pouze deterministický trend, zajistíme její stacionaritu zavedením trendové proměnné jako funkce času $t$. K ověřování stacionarity se používají testy jednotkových kořenů, např. DF testy (Dickey a Fuller, 1979) a v případě autokorelace rozšířený test (ADF) či neparametrické testy Phillipse a Perrona i další. Stacionární proměnné umožňují mj. vyhnout se problému zdánlivé regrese. Jsou-li totiž např. dvě časové řady originálních úrovňových dat v důsledku téměř shodného stochastického trendu nestacionární náhodné procesy, mohou vykazovat významnou odhadnutou regresní závislost, i když jediné, co mají společné, je právě jen stejný trend.

## 2. Standardní tvar VAR

Obecně lze vyjádřit standardní tvar $m$-rozměrného modelu vektorových autoregresí řádu $p$ – VAR($p$) – jako

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\eta}_t + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{v}_t\,, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{y}_t$ je vektor ($m \times 1$) každé z $m$ endogenních proměnných modelu,

$\boldsymbol{A}_i$ – deterministická matice ($m \times m$) parametrů endogenních proměnných zpožděných o $i$ období ($i = 1, 2, \ldots, p$),

$\boldsymbol{v}_t$ – vektor ($m \times 1$) normálně rozdělených náhodných šoků charakteru bílého šumu s kovarianční maticí $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_t\,\boldsymbol{v}'_t)$, takže, $\boldsymbol{v}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$,

$\boldsymbol{\eta}_t$ – vektor ($m \times 1$) deterministických výrazů.

Model (1) je neomezeným redukovaným tvarem VAR, neboť neobsahuje žádné nezpožděné hodnoty $m$ endogenních proměnných jako regresory. Deterministický člen $\boldsymbol{\eta}_t$ obsahuje obvykle pouze úrovňové konstanty $\boldsymbol{\delta}$ (takže $\boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{\delta}$) nebo lineární funkce.

Při použití tzv. operátoru zpoždění L lze VAR($p$) model psát ve tvaru

$$\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{A}_1\mathrm{L} + \boldsymbol{A}_2\,L^2 + \cdots + \boldsymbol{A}_p\,L^p)\,\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{\eta}_t + \boldsymbol{v}_t\,, \tag{2}$$

kde $\mathrm{L}\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{y}_{t-1}$, resp $\mathrm{L}^p\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{y}_{t-p}$.

Je-li efekt exogenního šoku na libovolnou vysvětlovanou proměnnou modelu VAR relativně krátkodobý, tj. postupně odezní, jde o stabilní VAR model. Má-li takový model všech $m$ vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ uvnitř jednotkového kruhu, tj. v absolutní hodnotě menších než jedna, splňuje postačující podmínku slabé stacionarity. Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ jsou charakteristické kořeny polynomické rovnice $\det(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A}) = 0$, resp. inverzní kořeny polynomické rovnice $\det[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(z)] = 0$, přičemž polynomická matice $\boldsymbol{A}(z) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 z - \boldsymbol{A}_2 z^2 - \cdots - \boldsymbol{A}_p z^p$, kde $z$ je komplexní číslo. Postačující podmínku slabé stacionarity a linearity lze tudíž formalizovat i tak, že všechny kořeny polynomické matice $\boldsymbol{A}(z)$ leží vně jednotkového kruhu.

Různé testy jednotkových kořenů, ať parametrické či neparametrické, mohou dávat odlišné výsledky a mají zpravidla nízkou testovací sílu při malých výběrech. Zejména se to projevuje u makroekonomických časových řad, jejichž kořeny jsou často blízké jedné, avšak menší než jedna. Při testování stacionarity finančních časových řad závisí síla testů jednotkových kořenů především na délce intervalů pozorování, méně na počtu pozorování v intervalu. Síla testů je tím větší, čím je interval pozorování delší. Zvětšíme-li tudíž rozsah pozorování v daném období, síla testu vzroste zpravidla nepatrně (např. Perron, 1989).

Splňuje-li VAR proces podmínky stability a je stacionární, nazývá se invertibilním, neboli lze ho vyjádřit jako proces klouzavých průměrů nekonečného řádu MA($\infty$). Tato vlastnost se využívá při definování a interpretaci funkcí odezvy na základě SVAR modelu.

### 2.1 Specifikace VAR modelu

Protože předpokládáme, že všechny proměnné v modelu VAR jsou alespoň slabě stacionární, musíme se před vlastní specifikací přesvědčit, že tento předpoklad je splněn. Nejsou-li pozorování časové řady proměnných $I(0)$, tj. integrovaná nultého řádu, dosáhneme nejčastěji stacionarity použitím prvních diferencí. Nejde-li o řady $I(1)$, stanovíme ještě druhé diference, které jsou již obvykle slabě stacionární, neboli proměnné jsou integrované druhého řádu. Stacionárnosti časových řad, vykazujících pouze deterministický trend, dosáhneme eliminací trendu. Kointegrované diferenčně stacionární proměnné však obvykle do VAR modelu nezahrneme, aby nevznikla specifikační chyba. Adekvátním postupem je v tomto případě použití modelu korekce chyby.

Při výběru proměnných a určení shodné délky jejich maximálního zpoždění v dalším kroku se využívají apriorní ekonomické informace a vhodná testovací kritéria. Jednoduchá metoda volby délky zpoždění VAR vychází z LR (likelihood ratio) testu, který platí pro stacionární řady a nevyžaduje explicitní předpoklady ohledně jejich rozdělení. Test LR však při malých výběrech dává podhodnocené výsledky a jeho rozdělení je pouze asymptoticky platné. Není vhodný ani při využití VAR k předpovědím.

Zpravidla se optimální délka zpoždění VAR stanoví pomocí minima hodnot zobecněných vícerozměrných informačních kritérií, založených na předpokladu normality. Kritéria pro $m$-rozměrný VAR($p$) model aplikujeme tak, že odhadneme modely VAR($p$) pro několik zpoždění $p = 1, 2, \ldots, P$ a jako optimální zvolíme odhad $\hat{p}$, který minimalizuje zvolené informační kritérium. Jako míra shody VAR($p$) modelu s daty slouží obvykle logaritmus determinantu odhadnuté kovarianční matice reziduí ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_p = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\boldsymbol{v}}_t \hat{\boldsymbol{v}}_t' \ , \tag{3}$$

jehož hodnota s rostoucí délkou zpoždění klesá nebo se nemění, neboť odhadová funkce kovarianční matice $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_p$ není korigována počtem stupňů volnosti.

K nejčastěji používaným vícerozměrným informačním kritériím patří Akaikeho informační kritérium (*AIC*), které pro VAR($p$) model má tvar (Akaike, 1974)

$$AIC(p) = \ln \det(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_p) + 2T^{-1}K^*,$$

dále bayesovské, resp. Schwarzovo informační kritérium (Schwarz, 1978)

$$SIC(p) = \ln \det(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_p) + \ln(T)T^{-1}K^*,$$

a informační kritérium HQIC, definovaného jako (Hannan-Quinn, 1979)

$$HQIC(p) = \ln \det(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_p) + 2\ln[\ln(T)T^{-1}]K^*,$$

kde $K^*$ je celkový počet odhadnutých parametrů u zpožděných proměnných ve všech $m$ rovnicích VAR($p$) modelu, tj. $m^2p$ a $T$ je počet efektivně využitých pozorování. Výraz $K^*$ je funkcí $m$, která penalizuje vysoké hodnoty zpoždění VAR. Akaikeho kritérium asymptoticky nadhodnocuje maximální délku zpoždění, zatímco *SIC* a *HQIC* jsou konzistentní, tj. $p \lim_{T\to\infty} \hat{p} = p$. Pro malé výběry velikosti $T \geq 16$ obecně platí (Lütkepohl, 2005), že hodnoty

$$SIC(\hat{p}) \leq HQIC(\hat{p}) \leq AIC(\hat{p}) \ ,$$

takže podle *SIC* volíme nejkratší délku optimálních zpoždění v modelu a při aplikaci *AIC* naopak nejdelší. Optimální délky zpoždění mohou však být shodné pro všechna tři kritéria.

Ivanov a Kilian (2005) na základě simulačních studií ukázali, že volba informačního kritéria ovlivňuje podstatně odhady např. funkcí odezvy v modelech VAR. Srovnáním středních kvadratických chyb odhadnutých a spočtených FO na základě známých skutečných délek zpoždění dospěli k závěru, že pro měsíční VAR modely vede k nejpřesnějším odhadům FO aplikace *AIC*. Při použití čtvrtletních VAR modelů se pro výběry větší než 120 pozorování jako nejpřesnější jevilo *HQIC*, zatímco *SIC* dávalo nejlepší výsledky pro výběry do 120 pozorování. Lze tedy konstatovat, že žádné ze tří informačních kritérií nedává optimální výsledky pro všechny typy modelů VAR. Výsledky se také liší, je-li využit odhadnutý VAR model např. k prognózování nebo k dekompozici rozptylu chyb předpovědí.

Pro určení maximální délky zpoždění modelu VAR je často žádoucí provést redukci počtu jeho parametrů, neboť jejich počet v neomezeném VAR modelu rychle roste se čtvercem počtu proměnných $m$. V modelu VAR($p$) ve standardním tvaru (1) je celkový počet parametrů roven $m^2p + m$, takže např. pro $m = 4$ a $p = 2$ musíme odhadnout v každé rovnici 8 regresních koeficientů, neboli v celém modelu jde o 36 neznámých parametrů, včetně čtyř úrovňových konstant. Odhad velkého počtu parametrů z omezené množiny pozorování vede často k jejich nepřesným odhadům, což způsobuje problémy v interpretaci modelu i v jeho vhodnosti k předpovědím. Proto v praktických úlohách v modelech VAR a priori omezujeme počet proměnných pomocí nulových omezení parametrů. Výsledkem restrikce modelu je zvýšení počtu stupňů volnosti a tím i přesnosti odhadů, nezatížených např. významnou autokorelací.

Nemáme-li žádnou informaci o podobě nulových omezení parametrů, vyjdeme ze všech možných kombinací odhadnutých koeficientů VAR modelu a pomocí statistických testů zjistíme, které z parametrů lze položit rovné nule. Abychom tento postup zjednodušili, používáme výpočetně efektivní způsoby testování statistické významnosti nebo aplikujeme informační kritéria jak pro jednotlivé rovnice modelu, tak pro celý systém rovnic najednou. V praxi postupujeme např. tak, že postupně eliminujeme regresní koeficienty, které co nejvíce snižují hodnotu příslušného informačního kritéria, takže v každém kroku vypustíme jednu proměnnou, pokud hodnota kritéria ještě klesá. Podobně při použití *t*-testu vynecháváme v každém kroku koeficienty s nejmenší absolutní hodnotou *t*-poměrů, dokud jejich absolutní velikost je větší než předem stanovená prahová hodnota. Další možné postupy při redukci počtu regresorů VAR uvádí např. Lütkepohl (2005).

### 2.2 Odhad a testování modelu

Je-li VAR($p$) model (1) v neomezeném redukovaném tvaru, tj. neobsahuje žádná omezení parametrů, získáme konzistentní a asymptoticky normálně rozdělené identické odhadové funkce množiny neznámých parametrů aplikací metody nejmenších čtverců (MNČ), resp. metody zobecněných nejmenších čtverců (MZNČ) na každou z $m$ rovnic zvlášť (Zellner, 1962).

V případě, že některé nebo všechny proměnné modelu jsou $I(1)$ a potenciálně kointegrované, kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ je singulární, zatímco pro proměnné $I(0)$ je nesingulární, takže v případě (1) je asymptotické rozdělení odhadové funkce $\widehat{\boldsymbol{A}}$ singulární a některé odhady parametrů nebo jejich lineární kombinace mohou konvergovat rychleji než úměrně výrazu $\sqrt{T}$, Toda a Phillips (1991) uvádějí, že běžné *t*-testy, $\chi^2$ a *F*-testy parametrů VAR nejsou tudíž platné. Dolado a Lütkepohl (1996) však ukázali, že pro všechny proměnné VAR modelů integrované řádu jedna nebo nula mají uvedené statistické testy standardní asymptotické vlastnosti, jestliže nulová hypotéza neomezuje prvky matic $\boldsymbol{A}_i$. Je-li tudíž VAR($p$) model řádu $p \geq 2$, mají *t*-poměry obvyklá asymptotická standardní rozdělení, neboť nulová hypotéza při testování individuálních koeficientů vychází pouze z omezení jednoho parametru matic $\boldsymbol{A}_i$. Avšak pro VAR(1) model mohou mít *t*-poměry nestandardní asymptotická rozdělení.

Odhadovou funkci kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ pro aplikaci testů statistické významnosti získáme pomocí (3), kde $\hat{\boldsymbol{v}}_t$ jsou rezidua odhadnutá MNČ. Odhadová funkce (3) není nestranná, ale je konzistentní a asymptoticky normálně rozdělená nezávisle na odhadu $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Sims et al. (1990) uvádějí, že asymptotické vlastnosti parametrů VAR zůstávají shodné, jde-li o model bez deterministických členů či nikoliv.

Protože lineární VAR modely ve standardním tvaru představují soustavu zdánlivě nezávislých lineárních rovnic s identickými vysvětlujícími proměnnými, odhady metodou maximální věrohodnosti (MMV) jsou asymptoticky shodné s odhady MNČ, získanými aplikací MNČ na každou rovnici modelu zvlášť. Odhadem celého systému najednou zůstává asymptotická vydatnost stejná jako v předchozím případě (např. Hamilton, 1994).

Při aplikaci lineárních omezení (nejčastěji nulových) v maticích $\boldsymbol{A}_i$ jsou při malých výběrech odhadové funkce MMV obecně různé od odhadů MNČ, resp. MZNČ, avšak asymptotické vlastnosti jsou stejné při použití obou postupů. K odhadu

parametrů VAR modelů lze využít např. programové systémy EViews, MATLAB, RATS, STATA či GRETL.

Po odhadu VAR následuje ověření, zda odhadnutý model odpovídajícím způsobem charakterizuje předpokládaný proces generování dat. K tomuto účelu slouží řada diagnostických statistických postupů, aplikovaných zpravidla na odhadnutá rezidua modelu. Lze je použít jak na rezidua jednotlivých rovnic, tak všech rovnic najednou.

Pro ověření předpokladu charakteru bílého šumu reziduí se používají testy autokorelace. Z testů obsažených v řadě softwarových programů se často používá asymptotický test autokorelace reziduí MNČ prvního i vyšších řádů, založený na Lagrangeově multiplikátoru (LM), nazývaný testem Breusche a Godfreye (BG). Je vhodný jak pro AR($p$), tak i pro MA($q$) procesy. V případě AR($p$) platí pro nulovou hypotézu sériové nezávislosti, že testovací statistika ve tvaru $LM = (T - p)R^2$ má asymptotické $\chi^2(p)$ rozdělení, tj. s $p$ stupni volnosti, kde $R^2$ je spočteno z pomocné regrese reziduí. Je-li pro požadovanou hladinu významnosti $LM > \chi^2(p)$, nulovou hypotézu odmítneme ve prospěch alternativní hypotézy, že alespoň jeden koeficient AR($p$) procesu náhodných složek, resp. reziduí MNČ se významně liší od nuly. Některé softwary, např. STATA a EViews, nahrazují či doplňují $LM$ statistiku statistikou $F$ (např. Edgerton a Shukur, 1999).

Frekventovaným testem autokorelace reziduí je tzv. Portmanteau test, známý také jako Boxova-Pierceova statistika $Q$ (Box a Pierce, 1970). Jeho nulová hypotéza, že všechny reziduální autokovariance jsou nulové, se testuje proti alternativní hypotéze, že alespoň jedna autokovariance, resp. autokorelace, je nenulová. Odhady reziduí jsou získány MNČ z neomezeného modelu VAR($p$). Je-li VAR proces stabilní, má testovací statistika při nulové hypotéze aproximativní rozdělení $\chi^2[m^2(h - p)]$ za předpokladu, že počet pozorování $T$ a řád autokorelace $h$ se blíží k nekonečnu. Je-li ovšem $h$ příliš velké, výsledkem je ztráta síly testu. Obecně lze doporučit Portmanteau test k testování autokorelace vyšších řádů, zatímco k ověření autokorelace nízkého řádu je vhodnější BG test.

Modifikovanou testovací statistiku vycházející z autokorelací reziduí MNČ, generovaných AR procesem, navrhli pro nepříliš velké výběry Ljung a Box (1978). Jejich testovací $Q$ statistika má opět asymptotické rozdělení $\chi^2(p)$ v případě platnosti nulové hypotézy neexistence sériové korelace reziduí. Počítají ji např. produkty STATA nebo EViews. Jsou-li však v modelu zahrnuty jako vysvětlující proměnné i zpožděné vysvětlované, ztrácí test na síle.

Při aplikaci modelů VAR se kromě autokorelace ověřuje i předpoklad normality reziduí. Testy normality reziduí pro VAR vycházejí z postupu, který navrhli Jarque a Bera (1987) pro jednorozměrné modely. Předpokládají ověřování a měření odchylky od normality pomocí třetích a čtvrtých momentů, tj. pomocí šikmosti a špičatosti. Pro VAR to znamená, že je odhadnutý vektor reziduí nejprve transformován na vektor vzájemně nezávislých složek a poté se zkoumá, zda odhady třetích a čtvrtých momentů se liší od stejných momentů normálního rozdělení. Praktický postup spočívá ve stanovení kovarianční matice standardizovaných reziduí $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, resp. $(\hat{\boldsymbol{\Sigma}})^{-1/2}$ (např. Lütkepohl, 1996). Testovací statistiku pro nulovou hypotézu normality lze tudíž vyjádřit pomocí odhadů šikmosti a špičatosti. Ačkoliv normalita není nutnou podmínkou pro platnost řady postupů statistické indukce, aplikovaných na modely VAR, odchylky od předpokladu normality signalizují, že je nutné model zpřesnit.

Důležitým nástrojem ověřování platnosti modelu jsou testy stability parametrů modelu v čase. Používají se ke zjištění potenciálních strukturních změn během celého intervalu pozorování (např. Lütkepohl, 2004). Jde např. o Chowovy testy predikční vhodnosti modelu nebo o postupy typu CUSUM testů (Brown, Durbin a Evans, 1975). Zpřesnění modelu lze dosáhnout přidáním proměnných, větší délkou zpoždění proměnných, změnou funkčního tvaru nebo zahrnutím nelineárních výrazů či modifikací použitých dat.

## 3. Strukturní VAR

I přes svůj obecný charakter vyžadují dynamické modely VAR aplikaci implicitních identifikujících omezení, která jsou kladena na vztahy mezi proměnnými, neboť obvykle velký počet odhadovaných parametrů standardních tvarů VAR způsobuje jejich obtížnou interpretaci. Navíc značná část odhadů je statisticky nevýznamná. Proto při prezentaci výsledků se používají různé funkce koeficientů VAR, které poskytují lepší informaci, mají ekonomickou interpretaci a jsou statisticky významnější. Nejčastěji jsou využívány funkce odezvy, dekompozice rozptylu chyby prognózy a historická dekompozice. Funkce odezvy vyjadřují, jakou reakci vyvolá neočekávaný šok (impuls) vůči běžné hodnotě i budoucím hodnotám libovolných vysvětlovaných proměnných modelu. Dekompozice rozptylu měří příspěvek exogenního šoku na variabilitu chyby dlouhodobé předpovědi jednotlivých proměnných a historická dekompozice popisuje, jak přispívají náhodné šoky k odchylkám vysvětlovaných proměnných od jejich předpovědí.

Dosáhnout snazší interpretace funkcí odezvy lze transformací modelu VAR, která zaručí, že náhodné šoky různých vysvětlovaných proměnných VAR jsou ortogonální. To umožňuje zkoumat dopad jednotlivého šoku, resp. rezidua, za předpokladu, že všechny ostatní šoky jsou nulové. Strukturní tvar VAR lze vyjádřit obecně např. jako

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{y}_{t-i} + \boldsymbol{u}_t , \qquad \boldsymbol{u}_t \sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{D}) , \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{y}_t$ je vektor ($m \times 1$) endogenních proměnných,

$\boldsymbol{B}_i$ – matice ($m \times m$) parametrů proměnných zpožděných o $i$ období,

$\boldsymbol{A}$ – matice ($m \times m$) parametrů nezpožděných proměnných,

$\boldsymbol{u}_t$ – vektor ($m \times 1$) náhodných složek, představujících strukturní šoky,

$\boldsymbol{D}$ – kovarianční matice ($m \times m$), obsahující na diagonále rozptyly.

Jelikož kovariance $\boldsymbol{u}_t$ jsou nulové, lze $\boldsymbol{u}_t$ interpretovat jako nezkorelované strukturní šoky, neboť každý z nich je nezávislý. V praktických aplikacích SVAR modelů představují strukturní náhodné složky např. exogenní šoky monetární nebo fiskální politiky.

SVAR model (4) lze řešením podle vektoru $\boldsymbol{y}_t$ převést na standardní tvar VAR, který již neobsahuje žádné zpětné vazby mezi nezpožděnými endogenními proměnnými. Tento tvar lze pro regulární matici $\boldsymbol{A}$ vyjádřit jako

$$\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_i \boldsymbol{y}_{t-i} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t , \tag{5}$$

přičemž $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{v}_t$ je vektor nezávisle normálně rozdělených složek standardního tvaru VAR s kovarianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$, jejíž složky představují tzv. čisté šoky (inovace).

Alternativní způsob prezentace SVAR (4) vychází z definice standardizované náhodné proměnné (Martin et al., 2013)

$$z_t = \boldsymbol{u}_t / \sqrt{\boldsymbol{D}}\ , \tag{6}$$

přičemž $\sqrt{\boldsymbol{D}}$ obsahuje na diagonále standardní odchylky a $E(z_t) = 0$, resp. $E(z_t z'_t) = \boldsymbol{I}_m$. Rovnici (4) lze tudíž přepsat pomocí standardních odchylek šoků $z_t$ jako

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{y}_{t-i} + \sqrt{\boldsymbol{D}} z_t\ , \qquad z_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_m)\ . \tag{7}$$

Náhodné složky v rovnici (7) představují jednotkové šoky (impulsy), vyjádřené ve směrodatných odchylkách strukturních náhodných složek.

Dynamiku strukturního modelu (7) lze popsat odpovídajícím redukovaným tvarem

$$\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{y}_{t-i} + \boldsymbol{v}_t\ , \tag{8}$$

jehož parametry jsou při srovnání s modelem SVAR (7) vyjádřeny jako $\boldsymbol{\Phi}_i = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_i$, což je matice autoregresních parametrů pro $i$-té zpoždění. Obdobně vektor náhodných složek redukovaného tvaru $\boldsymbol{v}_t$, který není na rozdíl od strukturních šoků $z_t$ ortogonální, neboť obecná kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ není zpravidla diagonální, je dán vztahem

$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{A}^{-1} \sqrt{\boldsymbol{D}} z_t = \boldsymbol{S} z_t\ , \text{ kde } \boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}^{-1} \sqrt{\boldsymbol{D}}\ . \tag{9}$$

Z vlastností vektoru $z_t$ plyne, že $E(\boldsymbol{v}_t) = \boldsymbol{S}E(z_t) = \boldsymbol{0}$ a $E(\boldsymbol{v}_t \boldsymbol{v}'_t) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{\Sigma}$.

Vztah mezi standardní VAR soustavou (8) a strukturním modelem (7) je v praxi důležitý, neboť v prvním kroku konstrukce SVAR se odhaduje standardní VAR. Problém spočívá v tom, že VAR model generuje neortogonální šoky $\boldsymbol{v}_t$, nikoliv strukturní šoky $z_t$. Jeho řešení je předmětem druhé fáze modelování SVAR, kdy použitím různých typů restrikcí parametrů v modelu je dosaženo identifikace strukturních šoků na základě šoků $\boldsymbol{v}_t$. Při identifikaci SVAR se však již neobejdeme bez ekonomické teorie, kterou využíváme k ekonomické interpretaci odhadnutých vztahů.

### 3.1 Způsoby identifikace SVAR a odhad funkcí odezvy

Postupy identifikace SVAR modelů mohou být různé. K dosažení identifikace strukturních šoků a následně k jednoznačnému určení funkcí odezvy se používají obvykle čtyři druhy restrikcí parametrů. Historicky nejstarší je metoda identifikace pomocí krátkodobých restrikcí, uplatněných nulovými omezeními parametrů v matici $\boldsymbol{A}$, které použil Sims (1980) pro rekurzivní strukturu $\boldsymbol{A}$ nebo Kim a Roubini (2000) pro nerekurzivní tvar matice $\boldsymbol{A}$. Jsou-li specifikovány matice $\boldsymbol{D}$, resp. $\boldsymbol{S}$, lze aplikovat krátkodobá omezení přímo na prvky těchto matic.

Alternativní způsob identifikace, založený na dlouhodobých omezeních konzistentních s ekonomickou teorií, použili např. Blanchard a Quah (1989). Postup jimi navržený při identifikaci SVAR modelu, známý také jako BQ dekompozice, vychází

z uplatnění dlouhodobých nulových omezení kumulativních FO, reprezentujících reakci endogenních proměnných modelu v čase na ortogonální jednotkové exogenní šoky. Přínosem BQ dekompozice je mj. skutečnost, že umožňuje rozklad časových řad proměnných na přechodné a trvale působící složky. Ravenna (2007) a další však upozorňují, že aplikace dlouhodobých omezení v případě zkreslených odhadů VAR modelů může vést k nesprávným závěrům.

Kombinaci krátkodobých a dlouhodobých restrikcí k identifikaci SVAR modelu navrhl např. Galí (1992). Krátkodobá omezení aplikoval na míru růstu peněžní nabídky a poptávky a na tempo růstu produktu. Zároveň použil i dlouhodobá omezení na vývoj produktu.

Identifikaci SVAR modelu dosáhneme často pomocí znaménkových restrikcí, např. při specifikaci rekurzivní struktury matice $\boldsymbol{A}$ k určení pořadí vysvětlovaných proměnných. K identifikaci $\boldsymbol{A}$ použili apriorní předpoklady o znaménkách strukturních parametrů Blanchard a Diamond (1989).

Pomocí SVAR identifikovaných na základě znaménkových restrikcí lze také ověřovat úplnost specifikace dynamických stochastických modelů všeobecné rovnováhy (DSGE modelů), které po logaritmické linearizaci mají podobu VAR. Zatímco ve VAR jsou uplatněny restrikce krátkodobých či dlouhodobých reakcí strukturních proměnných na šoky, resp. na délku zpoždění reakcí, v modelech DSGE se omezení délky zpožděných reakcí opomíjí. Chceme-li pomocí DSGE modelů srovnávat teorii s daty, je třeba si uvědomit, že ve VAR je zahrnuta pouze část endogenních proměnných modelu DSGE a také počet šoků je v obou případech různý. Protože aplikace různých způsobů identifikujících omezení může vést k různým závěrům ekonomické analýzy, řada autorů upozorňuje na úskalí obvyklých identifikačních postupů. Např. Cooley a Le Roy (1985) kritizují rekurzivní strukturu Choleskyho dekompozice (CHD), která je zpravidla v DSGE modelech obtížně použitelná. Obdobně Cooley a Dwyer (1998) ukazují, že dlouhodobé restrikce nemusí vždy rozlišit mezi trvalými a přechodnými náhodnými šoky. Uhlig (2005) navrhuje vycházet při identifikaci VAR z minimalizace ztrátové funkce, která váží různé restrikce ortogonálních šoků, např. znaménkové.

Princip identifikace VAR ukážeme na základě vztahu mezi standardním a strukturním tvarem VAR. Je-li vektor $\boldsymbol{v}_t$ stabilní a stacionární $I(0)$, lze (1) bez deterministických výrazů prezentovat na základě Woldova teorému jako model klouzavých průměrů (MA) ve tvaru (DeJong a Dave, 2007):

$$\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_i \, \boldsymbol{v}_{t-i} = \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{\Phi}_1 \, \boldsymbol{v}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \, \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots , \tag{10}$$

kde $\boldsymbol{\Phi}_0 = \boldsymbol{I}_m$. Matice $\boldsymbol{\Phi}_i$ rozměru $(m \times m)$ lze rekurzivně spočítat z chyb předpovědí vektoru $\boldsymbol{y}_t$, získaných z odhadnutého VAR modelu (1). Jednotlivé $nk$-té prvky matic $\boldsymbol{\Phi}_i$, které jsou funkcemi $i$, vyjadřují velikost očekávaných reakcí $y_{n,t+i}$ na jednotkovou změnu v $y_{k,t}$, při všech minulých hodnotách $\boldsymbol{y}_t$ konstantních. Protože změna v $y_{j,t}$, tj. posloupnost $(y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots)$ je měřena pomocí jednotkových inovací (šoků) $v_{j,t}$, prvky $\boldsymbol{\Phi}_i$ představují funkce odezvy jednotlivých složek $\boldsymbol{y}_t$ na šoky $\boldsymbol{v}_t$. V případě $I(0)$ platí, že $\boldsymbol{\Phi}_i \to \boldsymbol{0}$ když $i \to \infty$, takže vliv jednotkového šoku je časem nulový. Pro měnící se hodnoty $i$ lze spočíst a graficky znázornit kumulativní FO, které popisují reakci libovolné $n$-té proměnné VAR na exogenní jednotkový šok (impuls) v $k$-té proměnné během intervalu $t+i$.

Často používaný způsob stanovení matice $\boldsymbol{P}$ je spočítat ji pomocí dolní trojúhelníkové Choleskyho dekompozice (CHD). Tento postup, který navrhl Sims (1980), vychází ze specifikace $\boldsymbol{A}$ jako dolní trojúhelníkové matice, takže vztahy mezi nezpožděnými proměnnými vektoru $\boldsymbol{y}_t$ mají rekurzivní charakter, neboli mezi jednotlivými endogenními proměnnými existují pouze jednosměrné příčinné závislosti. Tudíž šok v první rovnici VAR ovlivňuje všechny endogenní proměnné modelu, zatímco šok v druhé rovnici působí pouze na proměnné v druhé rovnici a v následujících rovnicích atd., takže šok v poslední rovnici se promítne jen v poslední proměnné. Pomocí CHD ortogonalizovaných šoků, které nejdou korelovat po dvojicích a mají jednotkové rozptyly, dospějeme k FO, označovaným také jako ortogonální funkce odezvy.

Je-li ortogonalizace FO založena na CHD pozitivně definitní matici $\boldsymbol{\Sigma}$, je nutno zvolit pořadí nezpožděných endogenních proměnných s ohledem na jejich předpokládané příčinné teoretické vazby, nikoliv ad hoc. Výsledky odhadnutého VAR modelu, resp. FO, jsou totiž citlivé na pořadí vysvětlovaných proměnných, a to tím více, čím silněji jsou odhadnutá rezidua standardního VAR modelu korelována. Sims (1980) proto doporučuje provést trojúhelníkovou ortogonalizaci více způsoby a ověřit robustnost výsledků při alternativním uspořádání proměnných VAR. Protože odhadovat model VAR pro všechny možné alternativy pořadí vysvětlovaných proměnných je časově náročné (např. pro $m$-rovnicový model existuje $m!$ možných pořadí), využívají se při rozhodování o pořadí jednotlivých rovnic i testovací postupy. Nejčastěji lze doporučit test Grangerovy kauzality (Granger, 1969) nebo GMD test kauzality (Geweke, Meese a Dent, 1983), resp. modifikaci GMD testu, označovanou BC test (Breitung a Candelon, 2006), které jsou vhodné pro stacionární proměnné.

Funkce odezvy mohou kromě změny pořadí vysvětlovaných proměnných VAR reagovat i na změny v dynamickém chování modelu VAR, vyvolané např. vynecháním některých proměnných, sezonním vyrovnáváním časových řad proměnných nebo agregací dat. Např. použití různých typů filtrů může vést k odlišným FO než při použití sezónně neočištěných dat.

K odhadu funkcí odezvy pomocí CHD využijeme nejčastěji klasickou MNČ, aplikovanou na jednotlivé rovnice standardního tvaru VAR. Na základě odhadnutých reziduí $\hat{\boldsymbol{v}}_t$ spočteme nejprve odhad kovarianční matice $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ pomocí vztahu

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}$$

a v dalším kroku stanovíme diagonální matici $\hat{\boldsymbol{D}}$, jejíž prvky jsou čtverce diagonálních prvků matice $\hat{\boldsymbol{S}}$. Z rovnice (5) plyne, že

$$\boldsymbol{\Sigma} = E(\boldsymbol{v}_t \boldsymbol{v}_t') = E(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_t' \boldsymbol{A}^{-1\prime}) = \boldsymbol{A}^{-1}E(\boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_t')\boldsymbol{A}^{-1\prime} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1\prime} ,$$

neboli

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}^{-1}\sqrt{\boldsymbol{D}} \quad \text{resp.} \quad \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{S}/\sqrt{\boldsymbol{D}})^{-1} . \tag{11}$$

Známe-li odhady $\hat{\boldsymbol{S}}$ a $\hat{\boldsymbol{D}}$, určíme i odhadnutou trojúhelníkovou matici $\hat{\boldsymbol{A}}$. Při použití metody maximální věrohodnosti (MMV), resp. kvazi MMV, za předpokladu normality

jsou odhady $\hat{\boldsymbol{A}}$ i $\hat{\boldsymbol{D}}$ stejné jako při aplikaci MNČ, ale navíc kromě bodových odhadů získáme i odhadnuté standardní chyby, potřebné pro testování hypotéz, konkrétně k stanovení intervalů spolehlivosti kumulativních FO. Obě zmíněné metody odhadu poskytují konzistentní a asymptoticky normálně rozdělené odhady.

Nahradíme-li v MA modelu (10) výraz $\boldsymbol{v}_t$ strukturními šoky $\boldsymbol{u}_t$ pomocí vztahu (5), dostaneme

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_{t-2} + \cdots , \tag{12}$$

a dosazením (6) za $\boldsymbol{u}_t$ v (12)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{A}^{-1}\sqrt{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{A}^{-1}\sqrt{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{A}^{-1}\sqrt{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots \\ &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots\end{aligned}$$

Parametry u proměnných jsou standardní odchylky ortogonálních FO, takže

$$\mathrm{FO}_h = \frac{\partial \boldsymbol{y}_{t+h-1}}{\partial \boldsymbol{z}_t} = \boldsymbol{\Phi}_{h-1}\boldsymbol{S}\,, \quad \mathrm{h} = 1,2, \ldots \tag{13}$$

Intervaly spolehlivosti FO na základě směrodatných chyb lze za předpokladu normality odvodit z vícerozměrného normálního rozdělení parametrů SVAR. Protože FO jsou nelineárními funkcemi odhadnutých parametrů strukturního tvaru VAR, používají se často k určení směrodatných chyb bodových odhadů FO simulační metody Monte Carlo, jmenovitě bootstrapping, který nepředpokládá a priori znalost pravděpodobnostního rozdělení odhadnutých koeficientů FO. Metody bootstrappingu jsou jednodušší oproti analytickému určení asymptotických rozptylů FO a zejména při malých výběrech dávají reálnější výsledky nežli standardní analytické postupy (Kilian, 1998). Simulační metody tohoto druhu však vyžadují velký počet opakovaných simulací, často až několik tisíc (Enders, 1995). Bootstrapping poskytuje nepřesné standardní chyby při chybné specifikaci délky zpoždění VAR a při výskytu heteroskedasticity. Konstrukci konfidenčních intervalů odhadnutých FO pomocí bayesovských metod navrhl např. Koop (1992).

Závislost ortogonalizovaných šoků na pořadí vysvětlovaných proměnných SVAR odstraňují zobecněné FO (Pesaran a Shin, 1998). Berou v úvahu i korelace, zjištěné v minulých obdobích mezi různými šoky, a shodují se s ortogonalizovanými šoky pouze v případě diagonální kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$. V lineárních modelech nezávisejí běžné FO na znaménku nebo velikosti šoků, ani na jejich minulém vývoji. V nelineárních modelech tomu tak není, a proto je adekvátní stanovit zobecněné FO. V praxi se počítají zobecněné FO numericky na základě Monte Carlo simulace. Konstrukci zobecněných FO v nelineárních modelech a pro VAR s koeficienty měnícími se v čase uvádějí Koop et al. (1996).

## 4. Ilustrace vlivu alternativní formulace VAR na empirickém modelu

Zvolený ilustrační VAR model popisuje vzájemné vztahy mezi HDP, PPI a CPI (hrubý domácí produkt, index cen výrobců, index spotřebitelských cen) v zemích eurozóny – data jsou souhrnnými údaji zemí eurozóny (EMU). Kromě uvedených endogenních proměnných obsahuje model exogenní proměnné: index cen energií (světové ceny),

resp. jeho běžnou hodnotu a dvě zpoždění a umělou proměnnou postihující nástup ekonomické krize v roce 2008. Zařazení exogenních proměnných do VAR modelu (viz např. Lütkepohl, 2005) je motivováno lepší shodou modelu s daty a v tomto konkrétním případě také očištěním dynamiky FO od vlivu jednorázových exogenních šoků.

Použita byla čtvrtletní data z období 2001 Q1 až 2013 Q1, která pocházejí z databáze IFS Mezinárodního měnového fondu (http://elibrary-data,imf.org/). Pomocí ADF testů jednotkových kořenů bylo zjištěno, že všechny výše uvedené řady jsou integrované 1. řádu, tj. $I(1)$. S ohledem na analýzu FO byla stacionarizace dat provedena pomocí log-diferencí, tj. transformací typu $a_t = \ln(A_t/A_{t-1})$. Před sestavením VAR(2) modelu byly stacionarizované proměnné podrobeny testům na Grangerovu kauzalitu, v rámci ověření správnosti zvolené specifikace modelu. Jednotlivé časové řady pozorovaných proměnných lze systematicky popsat následovně:

$hdp_r_t$ – reálný HDP zemí eurozóny, index: 2005 = 100, sezónně očištěno,

$ppi_t$ – index cen výrobců zemí eurozóny (všechny komodity), index: 2005 = 100,

$hcpi_t$ – harmonizovaný index spotřebitelských cen zemí eurozóny, index: 2005 = 100,

$enrgy_t$ – souhrnný komoditní index světových cen energií, index: 2005 = 100, použité období (období zahrnuté do modelu): $t$, $t$–1, $t$–2,

$dummy_t$ – umělá proměnná postihující nástup světové krize v roce 2008 ($dummy_t = 1$ pro 2008:Q4 a 2009:Q1; $dummy_t = 0$ v ostatních případech).

### 4.1 Popis modelu a jeho odhad

Výchozí třírovnicový model pro ilustraci chování funkcí odezvy lze vyjádřit maticovým zápisem VAR(2) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}_{t-2} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{u}_t \ , \tag{14}$$

kde $\boldsymbol{y}_t$ je vektor (3 × 1) endogenních proměnných,

$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ – matice (3 × 3) regresních koeficientů pro jednotlivá zpoždění,

$\boldsymbol{x}_t$ – vektor (5 × 1) obsahující vysvětlující exogenní proměnné ($dummy_t$, $enrgy_t$, $enrgy_{t-1}$, $enrgy_{t-2}$) a úrovňovou konstantu,

$\boldsymbol{B}$ – matice (3 × 5) regresních koeficientů u proměnných vektoru $\boldsymbol{x}_t$,

$\boldsymbol{u}_t$ – vektor (3 × 1) potenciálně korelovaných náhodných složek.

Zvolený VAR(2) model (14) byl odhadnut v programu EViews s uspokojivými výsledky, jak je patrné z Tabulky 1, která zobrazuje odhady a jejich vlastnosti pro všechny tři rovnice VAR(2) soustavy. Stabilita odhadnutého modelu (14) byla ověřena výpočtem charakteristických kořenů – viz Graf 1.

**Tabulka 1**
**Odhad modelu (14)**

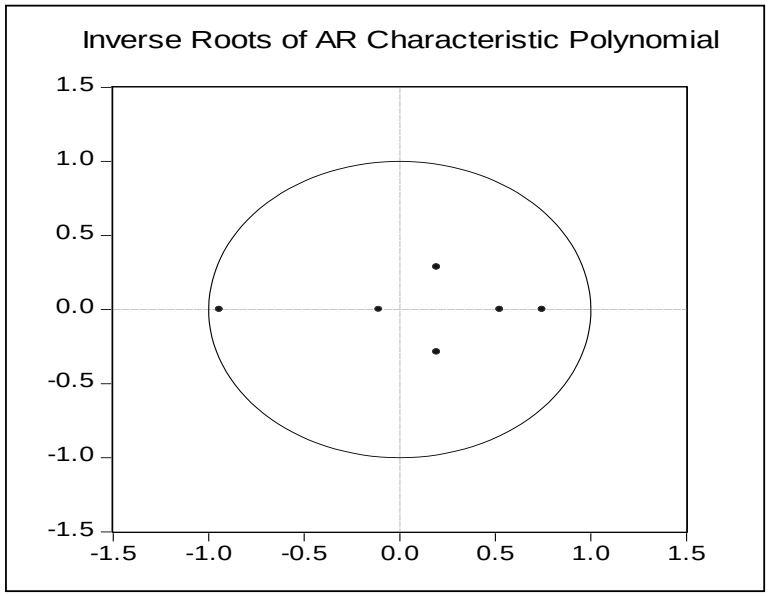
**Odhad VAR modelu**
Výběr: Q4 2001 až Q4 2012
Pozorování: 45 (upraveno)
Standardní chyby v ( ) a t-statistiky v [ ]

| | HDP_R | PPI | HCPI |
|---|---|---|---|
| HDP_R(-1) | 0,558 | -0,129 | -0,079 |
| | (0,142) | (0,187) | (0,118) |
| | [3,928] | [-0,688] | [-0,676] |
| HDP_R(-2) | 0,120 | 0,094 | -0,003 |
| | (0,148) | (0,194) | (0,122) |
| | [0,813] | [ 0,484] | [-0,023] |
| PPI(-1) | -0,164 | 0,535 | 0,495 |
| | (0,113) | (0,148) | (0,093) |
| | [-1,455] | [3,611] | [ 5,319] |
| PPI(-2) | 0,139 | 0,107 | -0,198 |
| | (0,116) | (0,153) | (0,096) |
| | [1,196] | [ 0,695] | [-2,056] |
| HCPI(-1) | -0,428 | -0,319 | -0,484 |
| | (0,176) | (0,231) | (0,145) |
| | [-2,437] | [-1,378] | [-3,328] |
| HCPI(-2) | -0,482 | -0,579 | 0,283 |
| | (0,171) | (0,225) | (0,141) |
| | [-2,825] | [-2,577] | [ 2,002] |
| C | 0,006 | 0,006 | 0,005 |
| | (0,002) | (0,002) | (0,001) |
| | [3,895] | [ 2,763] | [ 3,582] |
| ENRGY | -0,008 | 0,047 | 0,021 |
| | (0,006) | (0,007) | (0,005) |
| | [-1,475] | [ 6,313] | [ 4,441] |
| ENRGY(-1) | 0,0175 | 0,001 | -0,016 |
| | (0,009) | (0,012) | (0,008) |
| | [1,902] | [ 0,065] | [-2,115] |
| ENRGY(-2) | -0,007 | 0,020 | -0,006 |
| | (0,006) | (0,008) | (0,005) |
| | [-1,125] | [ 2,485] | [-1,183] |
| DUMMY | -0,015 | -0,015 | -0,003 |
| | (0,004) | (0,006) | (0,004) |
| | [-3,483] | [-2,527] | [-0,803] |
| R-squared | 0,801 | 0,896 | 0,814 |
| Adj. R-squared | 0,743 | 0,866 | 0,760 |
| Sum sq. resids | 3•e-4 | 0,001 | 2•e-4 |
| S.E. equation | 0,003 | 0,004 | 0,003 |
| F-statistic | 13,713 | 29,383 | 14,897 |
| Log likelihood | 199,525 | 187,157 | 208,043 |
| Akaike AIC | -8,379 | -7,829 | -8,757 |
| Mean dependent | 0,002 | 0,006 | 0,005 |
| S.D. dependent | 0,007 | 0,012 | 0,006 |

Zdroj: výstup programu EViews.

S ohledem na následující postup je klíčovou informací korelace mezi běžnými hodnotami reziduálních složek jednotlivých rovnic odhadnutého modelu. Korelace byly odhadnuty takto: $corr(\hat{z}_{HDP}, \hat{z}_{PPI}) = 0{,}057$, $corr(\hat{u}_{HDP}, \hat{u}_{HCPI}) = -0{,}276$ a $corr(\hat{u}_{PPI}, \hat{u}_{HCPI}) = 0{,}435$.

**Graf 1**
**Charakteristické kořeny**




Zdroj: výstup programu EViews.

### 4.2 Alternativní specifikace pořadí proměnných VAR modelu a její důsledky

Funkce odezvy generované při použití CHD jsou obvykle závislé na pořadí endogenních proměnných modelu. Za účelem srovnání FO při různém pořadí proměnných byly tyto funkce generovány na základě alternativně specifikovaných pořadí proměnných: specifikace 1 a 2. Zvlášť byly spočteny zobecněné funkce odezvy (ZFO), nezávislé na pořadí endogenních proměnných: specifikace 3. Jednotlivé použité specifikace jsou popsány v Tabulce 2. Zároveň platí, že specifikace 1 a 3 přesně odpovídají výsledkům odhadu z Tabulky 1. Odhadnutý VAR model při specifikaci 2 lze také popsat Tabulkou 1, pořadí proměnných nemá vliv na odhad modelu, projeví se pouze při použití CHD (viz grafy č. 2 a č. 3), zejména ve velikosti intervalů spolehlivosti FO.

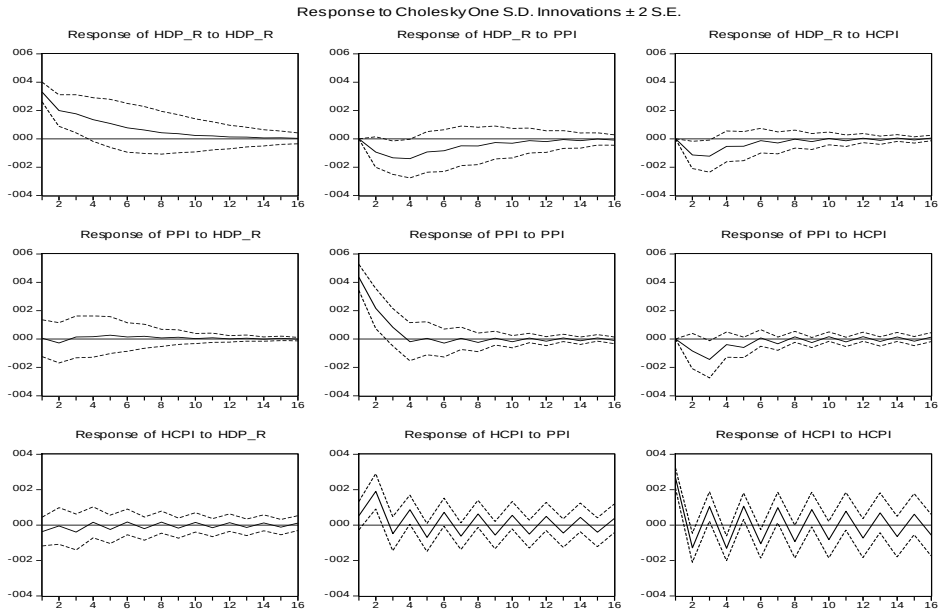
**Tabulka 2**
**Změny v pořadí proměnných**

| Specifikace 1 | Specifikace 2 | Specifikace 3 |
|---|---|---|
| Endogenní proměnné – změny v pořadí zvýrazněny | | Stejná jako specifikace 1. Generujeme FO nezávislé na pořadí endogenních proměnných VAR modelu (14). |
| $hdp_r_t$ | $hdp_r_t$ | |
| $\boldsymbol{ppi_t}$ | $\boldsymbol{hcpi_t}$ | |
| $\boldsymbol{hcpi_t}$ | $\boldsymbol{ppi_t}$ | |
| Exogenní proměnné | | |
| *constant* | *constant* | |
| $enrgy_t$ | $enrgy_t$ | |
| $enrgy_{t-1}$ | $enrgy_{t-1}$ | |
| $enrgy_{t-2}$ | $enrgy_{t-2}$ | |
| $dummy_t$ | $dummy_t$ | |

Zdroj: připraveno autory.

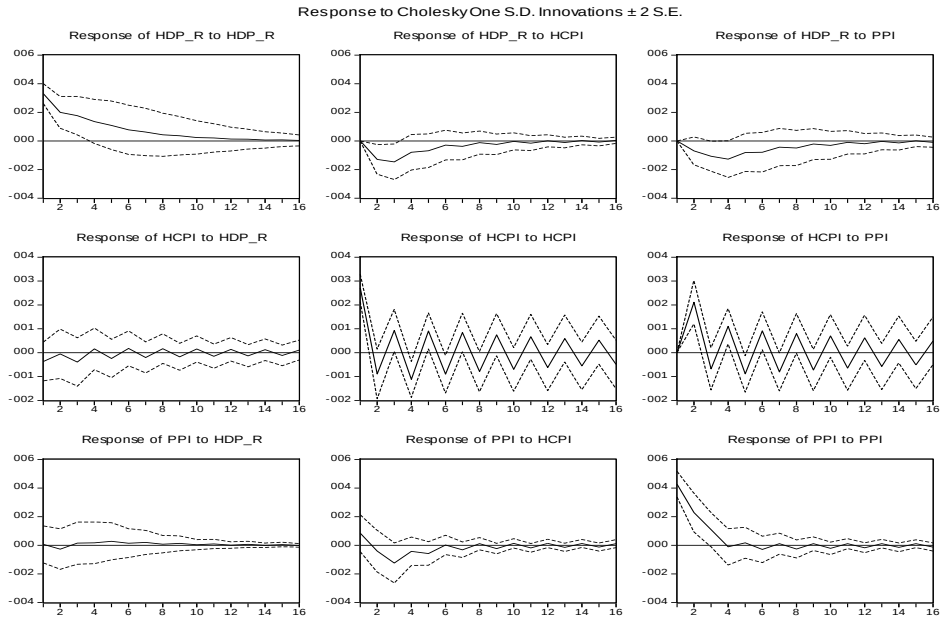
Kompletní sady FO endogenních proměnných na šoky z jednotlivých rovnic pro každou ze tří uvažovaných specifikací jsou patrné z grafů 2 až 4, včetně intervalů spolehlivosti. Každý z těchto grafů obsahuje celkem 9 FO, zachycujících reakce všech endogenních proměnných na ortogonalizované šoky z jednotlivých rovnic. Rozdíly mezi grafy 2 až 4 jsou způsobeny změnou pořadí proměnných při ortogonalizaci (viz Tabulka 2). Grafy 5 až 7 poskytují detailní pohled na vybrané údaje (grafy 2–4), za účelem jejich detailního srovnání pro jednotlivé specifikace ilustračního VAR modelu (14).

**Graf 2**
**Funkce odezvy při použití CHD – specifikace 1**



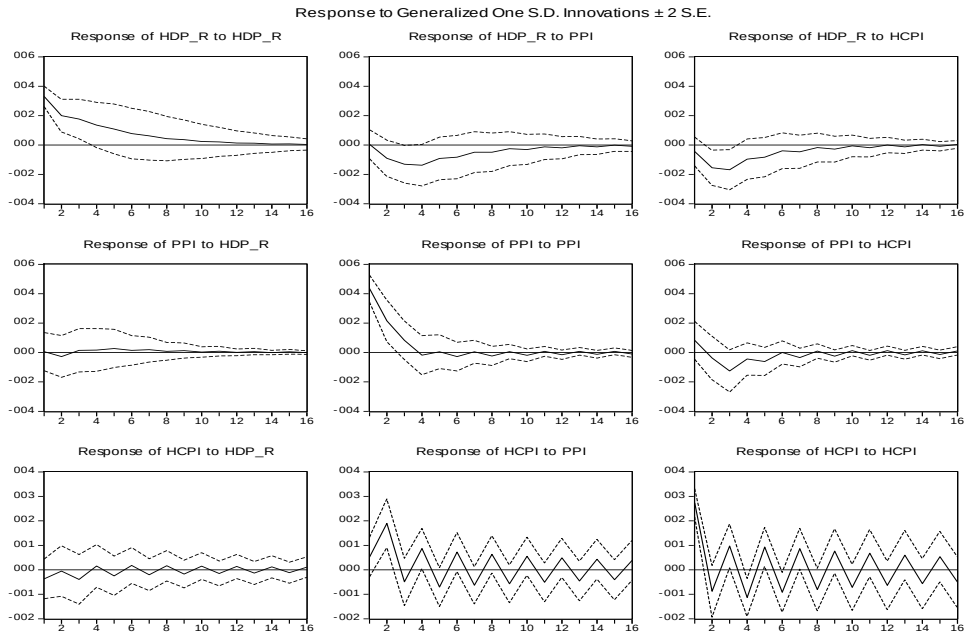

Zdroj: výstup programu EViews.

**Graf 3**
**Funkce odezvy při použití CHD – specifikace 2**




Zdroj: výstup programu EViews.

**Graf 4**
**Zobecněné funkce odezvy – specifikace 3**



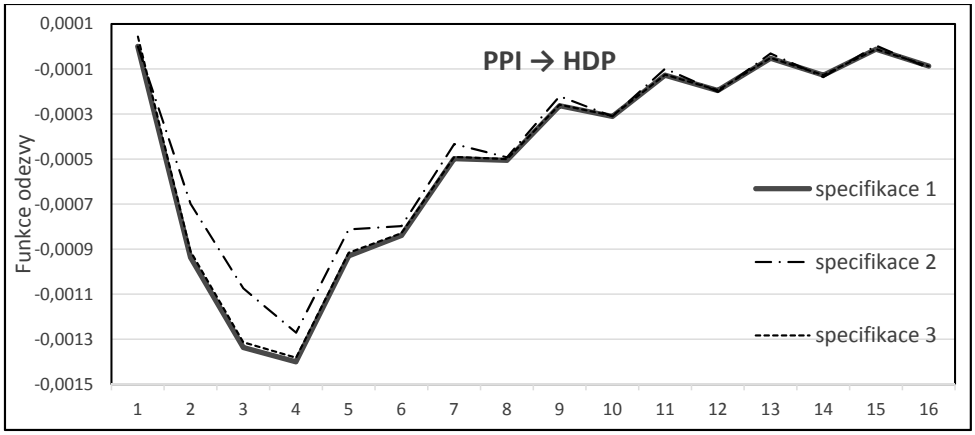

Zdroj: výstup programu EViews.

### 4.3 Srovnání FO pro alternativní pořadí proměnných v modelu

Z grafů 2 až 7 jsou patrné odlišnosti mezi jednotlivými FO, generovanými na základě alternativních specifikací pořadí endogenních proměnných ve VAR modelu, resp. při použití zobecněných FO (specifikace 3). V použitém ilustračním příkladu (14), i vzhledem tomu, že do VAR modelu byly zahrnuty exogenní vysvětlující proměnné, se FO pro jednotlivé specifikace navzájem příliš neodlišují, neboli vzájemná korelace náhodných složek v jednotlivých rovnicích VAR modelu (14) nemá dostatečnou sílu na významnější ovlivnění výpočtu FO při odlišných postupech ortogonalizace.

**Graf 5**

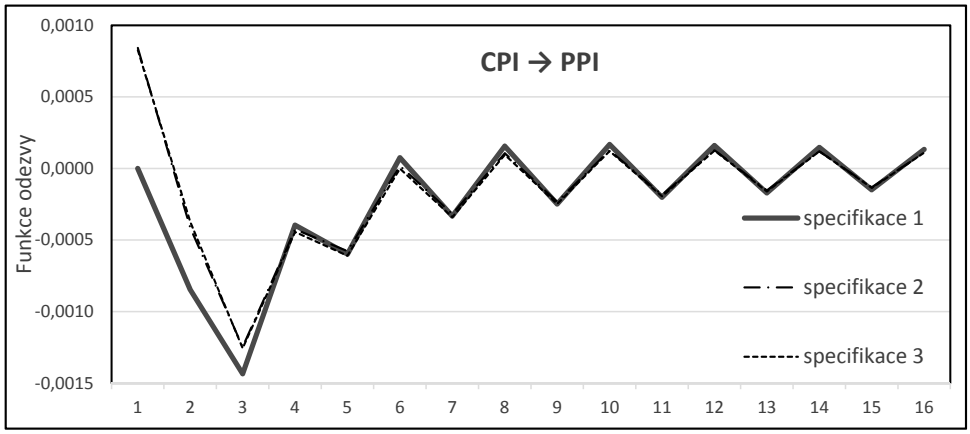
**Reakce HDP na šok z rovnice PPI – porovnání FO**




Zdroj: výstup programu MS Excel.

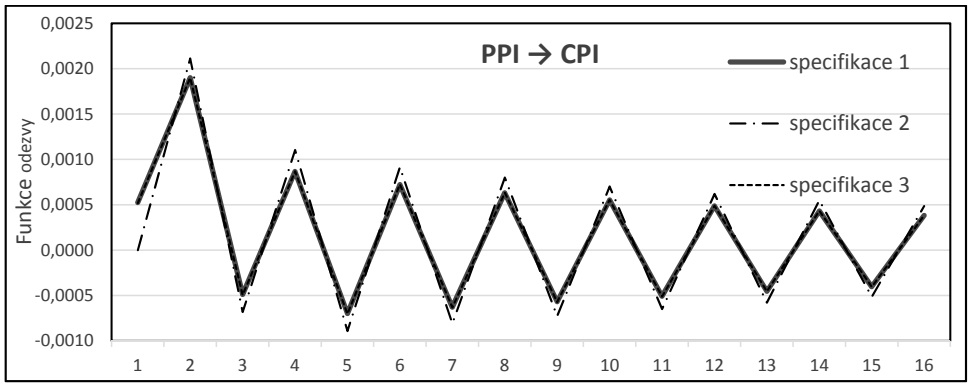
**Graf 6**

**Reakce PPI na šok z rovnice CPI – porovnání FO**




Zdroj: výstup programu MS Excel.

**Graf 7**
**Reakce CPI na šok z rovnice PPI – porovnání FO**




Zdroj: výstup programu MS Excel.

**Tabulka 3**
**Korelace funkcí odezvy pro jednotlivé specifikace VAR modelu**

| Párové korelace (specifikace) | FO: HDP na šoky z rovnice | | | FO: PPI na šoky z rovnice | | | FO: CPI na šoky z rovnice | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | HDP | PPI | CPI | HDP | PPI | CPI | HDP | PPI | CPI |
| Corr. (1,2) | 1,000 | 0,993 | 0,993 | 1,000 | 0,998 | 0,857 | 1,000 | 0,982 | 0,995 |
| Corr. (1,3) | 1,000 | 0,999 | 0,975 | 1,000 | 1,000 | 0,851 | 1,000 | 1,000 | 0,995 |
| Corr. (2,3) | 1,000 | 0,994 | 0,980 | 1,000 | 0,998 | 0,999 | 1,000 | 0,983 | 0,999 |

Zdroj: vlastní výpočet.

U grafů 5 až 7 musíme mít na paměti jejich ilustrativní charakter, kdy vypovídací schopnost vizuálního srovnání FO je částečně omezena způsobem jejich výpočtu, resp, ortogonalizace VAR modelu před výpočtem FO. Platí, že ortogonalizace je fakticky spojena se ztrátou ekonomicky interpretovatelného rozměru na ose *y*, takže o funkcích odezvy obvykle uvažujeme jako o bezrozměrných řadách. Lze však dovodit, že výrazy popisující rozměr FO na ose *y* jsou dány výpočetním postupem ortogonalizace – a tento postup se liší pro specifikace 1 až 3. Vhodnějším způsobem srovnání FO je proto například použití koeficientů párových korelací. Tyto koeficienty jsou uvedeny v Tabulce 3: pro každou kombinaci impulsu a odezvy (z grafů 2–4) jsou uvedeny korelace mezi příslušnými FO generovanými na základě specifikací 1–3.

## Závěr

Odhadnuté parametry ilustrativního VAR modelu (14), resp. srovnání FO, ukázaly, že získané výsledky jsou relativně robustní vůči pořadí vysvětlovaných proměnných vzhledem k poměrně slabé lineární závislosti mezi reziduálními složkami odhadnutého modelu. Jedním z důvodů může být i zahrnutí relativně velkého počtu exogenních

proměnných, které vede k nízkým korelacím mezi nezpožděnými hodnotami reziduí. Největší rozdíly se projevují při srovnání specifikace 1 s ostatními dvěma specifikacemi u FO popisující odezvu PPI na šok z rovnice CPI, kdy koeficienty korelace dosahují „pouze“ hodnotu okolo 0,85. Ve všech ostatních případech jsou jednotlivé FO napříč specifikacemi z hlediska párových korelací, které jsou velmi blízké hodnotě 1, prakticky nerozlišitelné.

Také zobecněné FO, spočtené pro lineární VAR model (14), se téměř shodují s FO pro specifikaci 1. Pouze při srovnání s FO u specifikace 2 jsou patrné rozdíly, zejména v počátečních obdobích reakce endogenních proměnných na exogenní šoky.

## Literatura


AKAIKE, H. 1974. A new look at the statistical model identification. *I.E.E.E. Transactions on automatic control.* December 1974, vol. 19, no. 6, pp. 716–723.

BLANCHARD, O.; DIAMOND, P. 1989. The Beveridge curve. *Brookings Papers on Economic Activity*. 1989, vol. 1, pp. 1–60.

BLANCHARD, O.; QUAH, D. 1989. The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances. *The Americal Economic Review*. September 1989, vol. 79, no. 4, pp. 655–673.

BOX, G.; PIERCE, D. 1970. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*. December 1970, vol. 65, no. 332, pp. 1509–1526.

BREITUNG, J.; CANDELON, B. 2006. Testing for short- and long-run causality: A frequency-domain approach. *Journal of Econometrics*. June 2006, vol. 132(2), pp. 363–378.

BROWN, R. L.; DURBIN, J.; EVANS J. M. 1975. Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships Over Time. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological),* 1975, vol. 37, no. 2, pp. 149–192.

COOLEY, T.; DWYER, M. 1998. Business cycle analysis without much theory: A look at structural VARs. *Journal of Econometrics.* January/February 1998, vol. 83, pp. 57–88.

COOLEY, T.; LE ROY, S. 1985. Atheoretical macroeconometrics: A critique. *Journal of Monetary Economics*. November 1985, vol. 16, no. 3, pp. 283–308.

DEJONG, D.; DAVE, C. 2007. *Structural Macroeconometrics*. Princeton : N.Y. Princeton University Press, 2007. ISBN 978-0-691-12648-7.

DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. 1979. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*. 1979, vol. 74, pp. 427–431.

DOLADO, J.; LÜTKEPOHL, H. 1996. Making Wald tests work for cointegrated VAR systems. *Econometric Reviews*. 1996, vol. 15, no. 4, pp. 369–386.

EDGERTON, D.; SHUKUR, G. 1999. Testing autocorrelation in a system perspective. *Econometric Reviews*. 1999, vol. 18, no. 4, pp. 343–386.

ENDERS, W. 1995. *Applied econometric time series*. New York : J. Wiley and Sons, 1995. ISBN 978-0471039419.

GALÍ, J. 1992. How well does the IS-LM model fit postwar US data? *Quarterly Journal of Economics*. May 1992, vol. 107, no. 2, pp. 709–738.

GEWEKE, J.; MEESE, R.; DENT, W. 1983. Comparing alternative tests of causality in temporal systems: Analytic results and experimental evidence. *Journal of Econometrics*. February 1983, vol. 21, no. 2, pp. 161–194.

GRANGER, C. 1969. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*. July 1969, vol. 37, no. 3, pp. 424–438.

HAMILTON, J. 1994. *Time series analysis*. Princeton : N.Y. Princeton University Press, 1994. ISBN 978-0691042893.

HANNAN, E.; QUINN, B. 1979. The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*. 1979, vol. 41, no. 2, pp. 190–195.

IVANOV, V.; KILIAN, L. 2005. A practitioner's guide to lag order selection for VAR impulse response analysis. *Studies in nonlinear dynamics and econometrics*. March 2005, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.

JARQUE, C.; BERA, A. 1987. A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*. August 1987, vol. 55, no. 2, pp. 163–172.

KILLIAN, L. 1998. Small-sample confidence intervals for impulse response functions. *Review of Economics and Statistics*. May 1998, vol. 80, no. 2, pp. 218–230.

KIM, S.; ROUBINI, N. 2000. Exchange rate anomalies in the industrial countries: A solution with a structural VAR approach. *Journal of Monetary Economics*. June 2000, vol. 45, no. 3, pp. 561–586.

KOOP, G. 1992. Aggregate shocks and macroeconomic fluctuations: A Bayesian approach. *Journal of Applied Econometrics*. October/December 1992, vol. 7, no. 4, pp. 395–411.

KOOP, G.; PESARAN, M.; POTTER, S. 1996. Impulse Response analysis in nonlinear multivariate models. *Journal of Econometrics*. September 1996, vol. 74, no. 1, pp. 119–147.

LJUNG, G.; BOX, G. 1978. On a measure of a lack of fit in time series models. *Biometrica*. August 1978, vol. 65, no. 2, pp. 297–303.

LÜTKEPOHL, H. 1996. *Handbook of matrices*. New York : J. Wiley and Sons, 1996. ISBN 0-471-96688-6.

LÜTKEPOHL, H. 2004. Vector autoregressive and vector correction models. In LÜTKEPOHL, H.; KRÄTZIG, M. (eds.) *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2004, pp. 86–158. ISBN 978-0-52154787-1.

LÜTKEPOHL, H. 2005. *New introduction to multiple time series analysis*. Berlin : Springer Verlag, 2005. ISBN 3-540-40172-5.

MARTIN, V.; HURN, S.; HARRIS, D. 2013. *Econometric modelling with time series*. Cambridge : Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-0-52113981-6.

PERRON, P. 1989. The great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis. *Econometrica*. November 1989, vol. 57, no. 6, pp. 1361–1401.

PESARAN, M.; SHIN, Y. 1998. Generalized impulse response analysis in linear multivariate models. *Economic Letters*. 1998, vol. 58, no. 1, pp. 17–29.

RAVENNA, F. 2007. Vector autoregressions and reduced form representations of DSGE models. *Journal of Monetary Economics*. October 2007, vol. 54, no. 7, pp. 2048–2064.

SIMS, C. 1980. Macroeconomics and reality. *Econometrica*. January 1980, vol. 48, no. 1, pp. 1–48.

SIMS, C.; STOCK, J.; WATSON, M. 1990. Inference in linear time series models with some unit roots. *Econometrica*. January 1990, vol. 58, no. 1, pp. 113–144.

SCHWARZ, G. 1978. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*. March 1978, vol. 6, no. 2, pp. 461–464.

TODA, H.; PHILLIPS, P. 1991. Vector autoregression and causality. *Econometrica*. May 1991, vol. 61, no. 6, pp. 1367–1393.

UHLIG, H. 2005. What are the effects of monetary policy on output? Results from an asymptotic identification procedure. *Journal of Monetary Economics*. March 2005, vol. 52, no. 2, pp. 381–419.

ZELLNER, A. 1962. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests of aggregation bias. *Journal of the American Statistical Association*. June 1962, vol. 57, no. 298, pp. 348–368.

## ALTERNATIVE SPECIFICATION, ESTIMATION AND IDENTIFICATION OF VECTOR AUTOREGRESSIONS

**Abstract:** The article focuses on various aspects of specification, estimation and identification of vector autoregression (VAR) models. Key VAR-specific topics of verification of an estimated model are also covered, as well as the differences between a standard (unrestricted) and structural VAR model. Subsequently, we address theoretical properties and practical aspects of impulse response functions (IRFs) as calculated upon estimated VAR models. Topics such as Cholesky decomposition (CHD), orthogonalised and generalised IRFs are discussed. Properties of VAR models are compared against alternative econometric modelling tools, such as simultaneous equation models and dynamic stochastic general equilibrium (DSGE) models. The article is supplemented with an illustrative example: on an aggregated EMU-wide level, we estimate a VAR (2) model for real GDP, CPI and PPI inflation. IRFs are calculated using two different CHD orderings and compared to generalised IRFs. We find the IRFs from our illustrative model to be very robust against the chosen IRF calculation method and against equation ordering changes.

**Keywords:** Vector autoregression, impulse response functions, estimation, identification, specification

**JEL Classification**: C32, E30, F41