PETROHRADSKÝ PARADOX A KARDINÁLNÍ FUNKCE UŽITKU

Jiří HLAVÁČEK, Michal HLAVÁČEK, Fakulta sociálních věd Univerzity Karlovy, Praha

1. Úvod

Danieli Bernoullimu¹⁾ (1700 – 1782) se přičítá autorství modelu maximalizace očekávané hodnoty výhry při modelování ekonomického rozhodování s rizikem (viz Bernoulli, 1738). On sám tvrdil, že tento model byl znám dávno před ním (viz Lea, Tarpy, Webley, 1994). Jak ukázaly četné experimenty, tento přístup plně neodpovídá ekonomickému chování subjektů (viz např. Mosteller, Nogee, 1951; Tversky, Kahneman, 1974 nebo Kahneman, Tversky, 1986).

Předpoklad, že kritériem racionálního subjektu v situaci nejistoty je maximalizace očekávaného zisku, lze snadno napadnout i jinak než na základě empirické zkušenosti. Jedním z neefektivnějších způsobů zpochybnění modelu maximalizace očekávané hodnoty výhry je tzv. petrohradský paradox, kdy pro každého hráče je výhodná strategie, která mu přináší prospěch jen v naprosto zanedbatelném procentu případů a prakticky v každém případě vede ke značné ztrátě.

Jde o následující hypotetickou hru, analyzovanou např. v knize Schroedera (2000). Hráč si kupuje např. za milion korun vstupenku do herny (petrohradského kasina), kde se hraje jediná hra: hází se mincí tak dlouho, dokud nepadne „hlava“. Označme tento počet hodů symbolem n . Hráč pak dostává částku 2^n korun, tedy dvě koruny, má-li hráč smůlu hned v prvním hodu, čtyři koruny, padne-li „hlava“ napodruhé atd. Očekávaná hodnota výhry v petrohradském kasinu roste nade všechny meze:

$$v = (1/2) \cdot 2 + (1/4) \cdot 2^2 + \dots + (1/2^n) \cdot 2^n + \dots = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

Výhra převyší milionovou cenu vstupenky až když „orel“ padne 20krát za sebou. Koupě jakkoli drahé vstupenky (třeba i za milion či miliardu korun) by měla být (z pohledu očekávané výhry) výhodná, nicméně nikdo rozumný si nekoupí vstupenku do této hypotetické herny za víc než dvoucifernou (a většina ani za víc než jednocifernou) částku v korunách. Intuitivně pocítovaná maximální akceptovatelná cena vstupného se pohybuje (v závislosti na bohatství subjektu a na jeho individuálnímu vztahu k riziku) v rozmezí dvojnásobku až čtyřicetinásobku základní (zaručené) výhry (viz Mañas, 1969).

Modelová „výhodnost“ jakkoli vysoké ceny vstupenky pro hráče maximalizujícího očekávanou výhru je důsledkem astronomické výše výhry v prakticky pomínutelných případech. Žádný reálný rozhodovatel se v tomto případě očekávanou hodnotou zisku neřídí: ochota akceptovat i astronomickou výši vstupného by evi-

*) Stať vznikla za podpory grantu GA ČR č. 402/01/0034, poskytnutého FSV UK a UTIA AV ČR.

1) Jde o synovce slavnějšího Jakuba Bernoulliho (1654 – 1705), mj. autora Bernoulliho zákona velkých čísel.

dentně znamenala ztrátu pudu sebezáchovy a tím i (ekonomické) životaschopnosti subjektu.

Pohled „z opačné strany“ je stejně přesvědčivý: při rozhodování na základě očekávané hodnoty zisku není výhodné provozování petrohradského kasina dokonce ani za jakoukoli zápornou cenu (tedy provozování kasina s tím, že provozovatel vlastníkovi nic neplatí, ale naopak od něj dostává navíc ke vstupnému denní dotaci milion (deset milionů, miliardu atd.) korun. Přitom reálně neexistuje (ani v oblasti organizovaného zločinu) žádná podnikatelská příležitost, která by se jen vzdáleně této nabídce blížila (a každý ekonomicky racionální subjekt „by to bral“ i při podstatně nižším garantovaném příjmu).

V příspěvku si klademe tyto otázky: existuje konečná *ekonomicky racionální* úroveň ceny této hry pro ekonomický subjekt? Kde se toto optimum nalézá? Jaký model, resp. jakou kardinální užitkovou funkci máme zvolit pro užitek z peněz, máme-li se popsanému rozporu vyhnout a modelově ho vyřešit?

Petrohradský paradox nelze uspokojivě vysvětlit pomocí modelů typu „mean-variance utility“ (viz např. Meyer, 1987), kde se jako kardinální užitková funkce maximalizuje vážený průměr střední hodnoty a rozptylu. Pro libovolnou nenulovou váhu střední hodnoty i zde (z reálného pohledu nesmyslně) vychází, že akceptovatelná je libovolně vysoká cena vstupného do petrohradského kasina.

Jedním z možných přístupů k vysvětlení petrohradského paradoxu je von Neumannova-Morgensternova teorie maximalizace očekávaného užítu z výhry (viz von Neumann, Morgenstern, 1953). Tento model pracuje s kardinálním užitekem z peněz, přičemž použitá užitková funkce je u subjektu, který je averzní k riziku, ryze konkávní. Může jít např. o mocninnou funkci $u(x) = x^a$ pro $0 < a < 1$. Jiný přístup nabízí psychologie, konkrétně Weberův-Fechnerův zákon (viz např. Frank, 1995) o tom, že reálný subjekt se rozhoduje nikoliv podle intenzity podnětu, ale podle změny v intenzitě podnětu. Tomu odpovídá logaritmická kardinální užitková funkce $u(x) = \log x$, pro kterou má očekávaný užitek hodnotu úměrnou parametru :

$$2^i \log(2^i) - \log 2 \quad (1)$$

V obou těchto případech (užitek ve tvaru mocninné, resp. logaritmické funkce) platí, že sice existuje vhodná (tj. poskytující „rozumnou“ cenu vstupenky do petrohradského kasina) velikost parametru,²⁾ nicméně nemáme žádné přímé ekonomické vodítko (ekonomicky zdůvodnitelný přímý argument) pro stanovení tohoto parametru a jeho „vhodné“ ad hoc nastavení pro petrohradský paradox by neodpovídalo jiným rozhodovacím situacím.

Společným problémem zmíněných přístupů je skutečnost, že rozhodování nezávisí na počátečním důchodu subjektu. Přitom právě výše bohatství (počátečního důchodu) evidentně ovlivňuje rozhodování subjektů v rizikových situacích: může jít jak o „lehčí ruku“ bohatšího hráče, tak o vynucené riskování tonoucího chudáka, který se chytá stěbla (možné, byť nepravděpodobné výhry).

Alternativní přístup k modelu očekávaného užítu z výhry je použití subjektivních pravděpodobností, odlišujících se od objektivních hodnot. Ukazuje se, že lidé obvykle *přeceňují* pravděpodobnost výjimečných událostí (viz Preston, Baratta, 1948), což zvyšuje cenu losu nad očekávanou hodnotu a přivádí každý týden mi-

2) U mocninné užitkové funkce $u(x) = x^a$ maximální akceptovatelná cena vstupenky ležela v „rozumném“ rozmezí od 4 do 80 Kč pro parametr $a = 0,68; 0,98$, a to nezávisle na výši počátečního důchodu. Podobně lze „nastavit“ parametr u logaritmické užitkové funkce.

liony potenciálních milionářů do sběren Sportky, kde si za 15 korun kupují očekávanou výhru 6 korun. K vysvětlení petrohradského paradoxu bychom ovšem potřebovali přesně opačnou tendenci, tedy podcenění (resp. ignorování) extrémně nepravděpodobných (byť astronomických) výher. Tak uvažuje „reálný“ návštěvník petrohradského kasina, který porovnává extrémně vysoké vstupné s očekávanou výhrou v (subjektivně pocítovaných) reálně očekávatelných případech. Tím vlastně „odřezává“ část očekávané výhry. Toto rozdělení očekávané výhry na dvě části ilustrujeme v kapitole 4 formulací leningradského kasina, ve kterém jsou zrušeny reálně pravděpodobné výhry a zůstávají pouze výhry extrémně nepravděpodobné. Subjekt maximalizující očekávanou hodnotu zisku je i v leningradském kasinu ochoten zakoupit vstupenku za jakkoli vysoké vstupné.

V tomto příspěvku chceme navázat na von Neumannův-Morgensternův přístup s tím, že se pokusíme najít ekonomicky zdůvodnitelnou kardinální ryze konkávní užitkovou funkci, založenou na myšlence maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití. Později (v kapitole 4) ukážeme, že pro subjekt s touto funkcí užitku je vstup do leningradského kasina neatraktivní při jakkoli nízké kladné ceně vstupného.

2. Kritérium maximalizace pravděpodobnosti přežití pro důchod jako deterministickou veličinu

Standardní mikroekonomie předpokládá, že subjekt (*homo oeconomicus*) maximalizuje svůj důchod. Nechceme jít cestou alternativy k této standardní kriteriální funkci rozhodovatele, nýbrž pracujeme s jejím zobecněním (viz Hlaváček, 1999).

Jako kardinální kritérium subjektů – rozhodovatelů používáme maximalizaci pravděpodobnosti jejich přežití. Předpokládejme, že přežití (existenční ohrožení) subjektu závisí výhradně na jeho důchodu d . Předpokládejme dále, že pravděpodobnost přežití subjektu je úměrná podílu jeho rezervy (oproti hranici zóny zániku b) na jeho důchodu d :

$$\begin{aligned} p(x) &= (d - b)/d && \text{pro } d < b \\ p(x) &= 0 && \text{pro } d \geq b \end{aligned}$$

Tomu odpovídá nesymetrická distribuční funkce:

$$\begin{aligned} F(d) &= (d - b)/d && \text{pro } d < b \\ F(d) &= 0 && \text{pro } d \geq b \end{aligned}$$

a funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} f(d) &= b/d^2 && \text{pro } d < b \\ f(d) &= 0 && \text{pro } d \geq b \end{aligned}$$

Jde o Paretoovo rozdělení prvního stupně.³⁾ Paretoovo rozdělení vykazuje nulovou pravděpodobnost pro důchod na hranici nebo pod hranicí b a pravděpodob-

3) Paretoovo rozdělení se používá např. při zkoumání příjmů obyvatelstva. Obecné Paretoovo rozdělení stupně a s hranicí b má distribuční funkci

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - (b/x)^a && \text{pro } x < b, \\ F(x) &= 0 && \text{pro } x \geq b, \end{aligned}$$

a funkci hustoty pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= (a/b) \cdot (b/x)^{a+1} && \text{pro } x < b \\ f(x) &= 0 && \text{pro } x \geq b. \end{aligned}$$

Obrázek 1

Rozdělení pravděpodobnosti ekonomického přežití podle relativní rezervy: Paretoovo rozdělení prvního stupně s hranicí zóny jistého zániku $b=1$

nost konvergující k jedné při zvyšování důchodu nad všechny meze. Paretoovo rozdělení prvního stupně nemá konečný průměr ani rozptyl,⁴⁾ medián je $m = 2b$.

V deterministické rovině, tedy je-li důchod d deterministickou veličinou, platí, že je-li jediným ohrožením subjektu nízký důchod, splývá toto kritérium s maximalizací zisku. Jde tedy o zobecnění, pokrývající oblasti ekonomického rozhodování, které standardní ekonomie nepostihuje (altruismus, sdílený užitek, ohrožení nízkým objemem výstupu atd. – viz např. Hlaváček, 1999).

3. Pravděpodobnost přežití pro důchod jako náhodnou veličinu

Je-li důchod náhodnou veličinou, máme co do činění s dvěma pravděpodobnostními rozděleními. Jde jednak o rozdělení pravděpodobnosti důchodu, jednak o rozdělení pravděpodobnosti přežití subjektu. Maximalizací pravděpodobnosti přežití se zde dostáváme ke kritériu, které bere v úvahu averzi subjektu k riziku: důchod (chápaný jako náhodná veličina se střední hodnotou $\bar{d}$ a s rozptylem σ^2) s vyšší střední hodnotou a vyšším rozptylem může být z hlediska pravděpodobnosti přežití méně výhodný než důchod s nižší střední hodnotou a s vyšším rozptylem.

Předpokládejme např. existenční minimum $b = 100$ peněžních jednotek a porovnejme důchod $d = 500$ s „losem“, který s pravděpodobností 0,5 vyhrává 2000 (a s pravděpodobností 0,5 nevyhrává nic). I když je střední hodnota losu $\bar{d}$ dvojnásobná, subjekt maximalizující pravděpodobnost přežití zvolí jistotu, protože střední hodnota pravděpodobnosti přežití pro případ, že celý důchod vymění za účast v uvedené loterii se sníží :

$$a) d = 500 \quad p(d) = (d-b)/d = (500-100)/500 = 0,8$$

$$b) d = 0; 2000 \quad \text{s padesátiprocentní pravděpodobností pro obě alternativy} \\ p(d) = 0,5 \cdot (2000-100)/2000 = 0,475 < 0,8$$

Subjekt maximalizující pravděpodobnost přežití je tedy averzní k riziku. Bude me zkoumat, za jakou cenu je ochoten vstoupit do petrohradského kasina. Nejprve však budeme analyzovat jeho ochotu vstoupit do méně atraktivního kasina, které má rovněž nekonečnou střední hodnotu výhry.

4) Paretoovo rozdělení vyšších stupňů konečný průměr i rozptyl má.

4. Formulace problému leningradského kasina

Nejprve mírně upravíme pravidla. Budeme hovořit o leningradském kasinu. Tam hráč nedostává nic, pokud nepadne alespoň 31 krát za sebou „hlava“. Jinak jsou pravidla stejná jako v petrohradském kasinu. I takto znevýhodněná hra má nekonečnou očekávanou výhru $2^{-31} \cdot (1 + 1 + \dots + 1 + \dots)$, tedy pro subjekt maximalizující očekávanou hodnotu důchodu by měla být atraktivní za jakkoli vysoké vstupné.

Označme v výši výhry, y cenu vstupenky do leningradského kasina. Předpokládejme nejprve, že $y < d - b$, tedy že hráč může vsadit jen tolik, kolik má nad své existenční minimum.

Pokud hráč nevyhraje, sníží se nákupem vstupenky do leningradského kasina jeho pravděpodobnost přežití o $(d - b)/d - (d - b - y)/(d - y)$. Tento pokles pravděpodobnosti přežití subjektu v alternativě bez výhry poměruje racionální rozhodovatel s pravděpodobností výhry 2^{-31} , která by znamenala (v důsledku její astronomické výše) zaručené přežití. Ptáme se, jaká je maximální cena vstupného do kasina Y , kterou je subjekt ochoten zaplatit. Pro subjekt maximalizující pravděpodobnost přežití musí platit:

$$2^{-30} (d - b) / d - (d - b - Y) / (d - Y) \quad (2)$$

Označme $k = d/b$ podíl důchodu a existenčního minima, tedy k je mírou bohatství subjektu. Jednoduchou úpravou dostaneme :

$$Y = b \cdot k^2 / (k + 2^{31}) \quad (3)$$

Nejprve určíme tuto cenu pro subjekty s důchodem mezi existenčním minimem a jeho dvojnásobkem $1 < k < 2$. Pro tyto chudé (řekněme, že $k = 2$ je hranice chudoby) je maximální akceptovatelná cena menší než $4b \cdot 2^{-31}$, tedy v řádu zlomků promile z existenčního minima (např. méně než 1 haléř při existenčním minimu 10 000 Kč). Do leningradského kasina tedy standardní chudí nechodí.

Jaká je řádově cena pro extrémního boháče (řekněme s důchodem na úrovni stonásobku životního minima, tj. $k = 100$)? Ani pro něj nejde o žádnou astronomickou cifru, maximální přijatelná cena nepřesáhne stotisícinu existenčního minima (10 haléřů při existenčním minimu 10 000 Kč). Do modelového leningradského kasina nenajdou cestu ani modeloví boháči.

Přesto teoreticky můžeme uvažovat o subjektech, pro které je vstup do leningradského kasina atraktivní. Pokud totiž opustíme předpoklad $y < d - b$, bereme v úvahu zoufalce, který se upíná pouze na možnost výhry, neboť jeho důchod nepřevyšuje úroveň existenčního minima: $d = b$, tj. $k = 1$. Pro něj je riziko jedinou šancí k přežití. Proto je ochoten zaplatit celý svůj důchod d (nevyhraje-li, tak jako tak nepřežije). Závislost maximálně akceptovatelné ceny hry na důchodu subjektu ukazuje následující obrázek:

Obrázek 2

Maximálně akceptovatelná cena vstupenky do leningradského kasina Y v závislosti na výši důchodu subjektu d (b je existenční minimum)

Do modelového leningradského kasina tedy přijdou jen ztroskotanci s důchodem d (y, b). Pokud se cena vstupenky zvýší nad úroveň existenčního minima, tj. pokud $y > b$, nepřijde nikdo.⁵⁾

Pomineme-li tedy možnost vstupu zoufalců se zcela zanedbatelnou pravděpodobností ekonomického přežití, lze říci, že leningradské kasino není atraktivní za žádnou nenulovou cenu.

5. Model petrohradského paradoxu

Nyní se vrátíme k původnímu problému. Hráči, kteří by byli ovlivněni vysokou výhrou v případech 31 a vícenásobného padnutí orla, by navštívili i leningradské kasino. V předchozí kapitole jsme racionálního návštěvníka leningradského kasina prakticky vyloučili. Zbývají tedy pouze ti, které přilákají „normální“ výhry v ostatních (méně nereálných) případech. Očekávaná výše takové výhry je

$$v = (1/2) \cdot 2 + (1/4) \cdot 4 + \dots + (1/2^{30}) \cdot 2^{30} = 30$$

Subjektivně pociťovaná pravděpodobnost přežití subjektu s důchodem rovným k -násobku existenčního minima b po vstupu do petrohradského kasina se vstupným Y není ovlivněna přímou pravděpodobnými astronomickými výhrami pro 31 a vícenásobné padnutí orla, neboť 30 násobný úspěch s výhrou 2^{30} zajišťuje přežití s pravděpodobností nejméně 99,999 %.

V případě, že „hlava“ padla v prvních i pokusech, má subjekt důchod rovný

$$d - Y + 2^i = k \cdot b - Y + 2^i \quad (4)$$

Jeho pravděpodobnost přežití pro tento případ je

$$\frac{d - b - Y + 2^i}{d - Y + 2^i} \cdot 1 = \frac{b}{k \cdot b - Y + 2^i} \quad (5)$$

Očekávaná pravděpodobnost přežití hráče pro případ, že „hlava“ padne nejvýš třicetkrát za sebou je tedy:

5) Mohli bychom uvažovat i o subjektu s důchodem $d = b + \epsilon$, kde ϵ je tak malé, že pravděpodobnost přežití ϵ/b je menší než pravděpodobnost výhry 2^{-31} . Tento případ však můžeme vyloučit vzhledem k tomu, že pro minimální dále nedělitelnou peněžní jednotku (řekněme pro $m = 1$ haléř) vždy platí $m/b > 2^{-31}$.

$$\sum_{i=1}^{30} 2^i \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{b}{(k \cdot b \cdot Y \cdot 2^i)} \quad (6)$$

Maximální akceptovatelná cena je taková cena, pro kterou se tento výraz rovná $(d-b)/d = (k-1)/k = 1-1/k$, tedy pravděpodobnosti přežití pro případ, že subjekt do kasina nepůjde:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1} \cdot \sum_{i=1}^{30} 2^i \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{b}{(k \cdot b \cdot Y \cdot 2^i)} = 0 \quad (7)$$

Označme levou stranu této rovnice jako:

$$f^{k,b}(Y) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1} \cdot \sum_{i=1}^{30} 2^i \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{b}{(k \cdot b \cdot Y \cdot 2^i)} \quad (8)$$

Jak je vidět z obrázků 3 a 4, má rovnice (7) v „rozumné“ (tj. ekonomicky interpretovatelné) části definičního oboru právě jedno řešení.

Obrázek 3

Průběh funkce $f^{(k;100)}(Y)$ pro $k = 1, 1; 2; 5$

Poznámka: Pro $k = 10$ graf v použitém měřítku prakticky splývá s osou x.

Obrázek 4

Průběh funkcí $f^{2;b}(Y)$ pro $b = 100; 200; 500$

Řešení rovnice (7) pro různé hodnoty parametrů k , b ukazuje tabulka 1 a obrázek 5.

Tabulka 1

Maximální akceptovatelná cena vstupného do petrohradského kasina pro subjekty s různým ekonomickým postavením k v závislosti na ekonomickém postavení subjektu (parametru k) a na hranici zóny zániku b

k	$b=100$	$b=200$	$b=500$
1,1	6,6	7,45	8,7
2	7,35	8,25	9,5
3	7,9	8,8	10,1
4	8,25	9,2	10,5
5	8,55	9,5	10,8
10	9,5	10,5	11,8
20	10,5	11,45	12,8
30	11,05	12,05	13,35
40	11,45	12,45	13,75
50	11,8	12,8	14,1
60	12,05	13,05	14,35
75	12,35	13,35	14,65
100	12,8	13,75	14,95

Obrázek 5 představuje velikost maximální akceptovatelné ceny Y v závislosti na ekonomickém postavení subjektu (na parametru k , představujícím podíl důchodu a existenčního minima) pro tři různé velikosti hranice zóny zániku b

Ve všech případech jde o rostoucí konkávní funkci. Subjekt reaguje pozitivně (vyšší poptávkou) na zlepšení svého ekonomického postavení, nicméně tempo nárůstu maximální akceptovatelné ceny s nárůstem parametru k se zpomaluje.

Obrázek 5

Maximálně akceptovatelná nominální cena vstupenky do petrohradského kasina Y v závislosti na ekonomickém postavení subjektu (parametru k), přičemž b je hranice zóny zániku

I souvislost maximálně akceptovatelné ceny a velikosti parametru b je vyjádřena rostoucí konkávní funkcí. Tato souvislost může být na první pohled překvapivá: nárůst parametru b znamená, ceteris paribus, zhoršení ekonomické situace subjektu, neboť tím stoupá pravděpodobnost jeho ekonomického zániku. Je však třeba si uvědomit, že míra ohrožení je dána velikostí relativní rezervy $k = d/b$ a že přechod na vyšší úroveň parametru b při nezměněném k znamená nejen zvýšení existenčního minima, ale také nárůst důchodu o stejné % a inflační znehodnocení reálné ceny výhry i vstupného. V případě $b = 100, d = 2 \times b = 200$ základní (tj. minimální) výhra ve výši 2 představuje 1 % důchodu a cena vstupného 10 je 5 % důchodu subjektu, kdežto v případě $b = 500, d = 2 \times b = 1000$ představuje základní výhra 0,2 % důchodu a cena vstupného ve stejné nominální výši 10 je 1 % důchodu subjektu. Větší podíl na důchodu znamená větší ohrožení, takže inflace vede logicky k tomu, že subjekt při zesílení ohrožení (nárůst parametru b) akceptuje vyšší nominální, ale nižší reálnou cenu vstupného (viz obrázek 6).

Obrázek 6

Závislost poptávky po vstupu petrohradského kasina na hranici zóny zániku pro subjekt s $k=2$ (důchod roven dvojnásobku existenčního minima): maximálně akceptovatelná nominální cena vstupenky Y a reálná cena vstupenky Y/d maximálně akceptovatelná v závislosti na existenčním minimu b

Tabulka 2 ukazuje, jak náš subjekt minimalizující míru ohrožení zánikem reaguje na „zkrácení“ hry stanovením maximálního počtu prováděných hodů (tento počet značíme N). Z výsledků propočtů je vidět, že nejchudší ($k = 1,1$) vůbec neberou v úvahu extrémně ziskové možnosti s pravděpodobností 2^{-12} , tedy 0,02 %, kdežto nejbohatší subjekty ($k = 50$) reagují citlivěji již na jevy s pravděpodobností 2^{-20} , tedy 0,0001 %. To koresponduje s realitou: chudí se spíše zapojují do levných her s relativně nízkou výhrou, naproti tomu pro bohaté je atraktivní hra s vysokou cenou i výhrou, přičemž horní limit hry je od hry odradí (viz políčka v pravé dolní části tabulky 2, kdy řešená rovnice nemá ekonomicky interpretovatelné řešení).

Subjekt maximalizující pravděpodobnost ekonomického přežití tudíž realisticky akceptuje vstupné do petrohradského kasina (bez limitu počtu hodů) v závislosti na svém ekonomickém postavení v rozmezí od 6,60 Kč do 12,80 Kč. Tabulka ukazuje na skutečnost, že je lhostejné, zda subjekt bere v potaz možnost výhry pouze pro případy, kdy při házení mincí padne „hlava“ 25 krát a méně nebo i případy, kdy počet bezprostředně následujících padnutí „orla“ je větší než 25, protože astronomické výhry nejen že mají extrémně nízkou pravděpodobnost, ale pro šťastný subjekt s výhrou 2²⁵ Kč již další případná výhra pravděpodobnost přežití

(velmi blízkou jedné) neovlivňuje. Pro chudé subjekty totéž platí už pro výhry spojené s úvodní sérií 15 a více úspěšných pokusů (hodů mincí).

Tabulka 2

Maximální akceptovatelná cena pro subjekty s různým ekonomickým postavením k pro maximálně N uvažovaných příznivých výsledků (padne „hlava“) bezprostředně po sobě (případ $b = 100$)

k	$N=30$	$N=25$	$N=20$	$N=15$	$N=12$	$N=10$
1,1	6,60	6,60	6,60	6,60	6,55	6,45
2	7,35	7,35	7,35	7,35	7,25	6,95
5	8,55	8,55	8,55	8,50	7,95	6,20
10	9,50	9,50	9,50	9,20	7,10	-
50	11,80	11,80	11,55	-	-	-
100	12,80	12,80	11,80	-	-	-

Běžný subjekt na úrovni dvojnásobku existenčního minima je ochoten zaplatit za naději na výhru zhruba 3,7 % důchodu, naproti tomu subjekt s výborným ekonomickým postavením na úrovni desetinásobku existenčního minima je ochoten zaplatit pouze 1,0 % důchodu.

Jinak je tomu s totálně ohroženými subjekty, jejichž pravděpodobnost přežití v případě, že do kasina nevstoupí, je nulová. Jde o subjekty s podílem důchodu na existenčním minimu $k = 1$. Stejně jako v leningradském kasinu je optimální strategie těchto subjektů výjimečná. Vstup do kasina totiž dává i subjektu s $d - Y = 0$ (který má jen na vstupné a jinak nic) nenulovou pravděpodobnost ekonomického přežití (pro $b = 100$ jde o pravděpodobnost $1:2^7$, tedy necelé jedno procento). U nich jde o situační sklon (zápornou averzi) k riziku, kdy subjekt (byť třeba i averzní k riziku) je svou situací k riskování donucen.⁶⁾

A jak se mění zájem o vstup do kasina, ceteris paribus, s výší nominální výhry? Předpokládejme, že výhra je ve výši $v \cdot 2^i$, kde i je počet úspěšných hodů (i krát za sebou padla „hlava“), tedy $2 \cdot v$ je nejnižší výhra (pro případ, že padne napoprvé „hlava“ a napodruhé „panna“). Řešíme rovnici:

$$1/k = 1 + \sum_{i=1}^{30} 2^{-i} \cdot 1 - b/(k \cdot b \cdot Y \cdot 2^i) = 0 \quad (9)$$

Řešení této rovnice pro různé hodnoty parametru v (výše základní výhry) shrnuje tabulka 3. Obrázek 7 pak dokládá, že v obou případech jde o závislost rostoucí a konkávní.

Provozovatel petrohradského kasina tedy může stimulovat zájemce maximalizující pravděpodobnost přežití navýšením výher, nicméně mezní vliv tohoto navýšení klesá: navýšení výher na třicetinásobek navýší akceptovatelnou cenu vstupného jen zhruba na patnáctinásobek.

6) Jde o subjekty podobné tomu pánovi ze známé anekdoty, který jsa bez peněz se ptá v luxusní restauraci po své lukulské hostině, zda může platit perlami. Po souhlasné odpovědi vrchního číšníka žádá: „Tak mi přineste ještě dvě ústřice a držte nám palec“. V jiných herních situacích může samozřejmě dojít k situačnímu sklonu k riziku i v méně absurdních případech (viz Hlaváček a kol., 1999).

Tabulka 3

Vliv znásobení výher na maximální akceptovatelnou cenu (pro $b=100$, $k=2$ a 5)

v	$k=2$	$k=5$
1	7,35	8,55
1,1	7,97	9,31
1,2	8,56	10,01
1,5	10,27	12,07
2	12,97	15,33
3	17,98	21,40
5	26,98	32,44
7	35,16	42,54
10	46,43	56,54
15	63,54	77,89
20	79,25	97,55
30	108,15	133,70

Obrázek 7

Závislost maximální akceptovatelné ceny na výši výher

6. Závěr

S ordinální užitkovou funkcí vystačíme v deterministických modelech. V situaci nejistoty (což je případ petrohradského kasina) je ovšem nutné nějakou kardinální užitkovou funkci zvolit.

Naše kardinální užitková funkce je opřená o rozumně ekonomicky interpretovatelný ekonomický předpoklad (snaha omezit riziko ekonomického zániku). Na rozdíl od ostatních užívaných funkcí nevyžaduje stanovení svých parametrů ad hoc. Přednost vidíme v tom, že modelové rozhodování na základě této užitkové funkce není stejné pro bohaté a chudé subjekty. Navíc se opírá o osvědčené Paretovo rozdělení pravděpodobnosti, byť jde o rozdělení s nekonečnou očekávanou hodnotou i rozptylem, což je ekonomicky obtížně „stravitelné“. Tuto okolnost chceme v budoucnu vyřešit aplikací Paretova rozdělení druhého stupně, jež má konečnou očekávanou hodnotu i rozptyl a dobrou ekonomickou interpretaci (ná-

růst relativní rezervy oproti existenčnímu minimu), která odpovídá poznatkům ekonomické psychologie.

Pokud jde o klasický problém petrohradského paradoxu, náš modelový ná-
vštěvník, který maximalizuje pravděpodobnost svého ekonomického přežití, se
chová zhruba v souladu s reálnými ekonomickými preferencemi: maximálně ak-
ceptovatelné vstupné do petrohradského kasina je v rozmezí šesti až patnáctiná-
sobku základní (minimální) výhry. Závisí to na ekonomickém postavení, resp. na
míře ekonomického ohrožení subjektu. Bohatší akceptují vyšší vstupné, ale vyna-
loží na něj nižší podíl důchodu než chudší. Výjimku představují totálně ohrožení,
pro které je případná výhra poslední možností ekonomicky přežít, a proto jsou
ochotni za vstupné do petrohradského kasina utratit své poslední (k přežití stejně
nepostačující) peníze.

Literatura

Bernoulli, D.: Specimen theoriae novae de mensura sortis (1738). In: *Economica*, 1954, s. 23-36.

Frank, R. H.: *Mikroekonomie a chování*. Praha, Svoboda 1995.

Hlaváček, J. a kol: *Mikroekonomie sounáležitostí se společenstvím*. Praha, Karolinum 1999.

Hlaváček, J.: Zobecněné mikroekonomické kritérium v tržní ekonomice. *Politická ekonomie*, 2000, č. 4, s. 515-529.

Lea, S. E. G., Tarpy, R. M., Webley, P.: *Psychologie ekonomického chování*. Praha, Grada 1994.

Kahneman, D., Tversky, A.: Rational Choice and the Framing of Decisions. *Journal of Business*, 1986, s. 251-278.

Mañas, M.: *Teorie her a optimální rozhodování*. Praha, Státní pedagogické nakladatelství 1969.

Meyer, J.: Two-moment Decision Models and Expected Utility Maximization. *American Economic Review*, 1987, č. 3, s. 420-430.

Mosteller, F., Nogee, P.: An Experimental Measurement of Utility. *Journal of Political Economy*, 1951, s. 371-404.

Neumann, J. von, Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, Princeton University Press 1953.

Preston, M. G., Baratta, P.: An Experimental Study of the Auction-value of an Uncertain Outcome. *American Journal of Psychology*, 1948, s. 183-193.

Schroeder, M.: *Fractals, Chaos and Power Laws*. London, W. H. Freeman and Comp. 2000.

Tversky, A., Kahneman, D.: Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, 1974, s. 1124-1131.

ST PETERSBURG PARADOX AND CARDINAL UTILITY FUNCTION

Jiří HLAVÁČEK, Michal HLAVÁČEK, Faculty of Social Sciences, Charles University, Opletalova 26, CZ – 110 00 Prague 1 (e-mail: jihlava@mbox.fsv.cuni.cz; michal.hlavacek@cnb.cz).

Abstract:

The St Petersburg paradox could be used as an extreme demonstration of the utility function cardinalisation in case of stochastic utility. In this article we reassume the von Neumann and Mongernstern explanation to this paradox based on the risk aversion expressed by the strict concavity of the expected utility function. We suggest the utility function derived from the Pareto distribution of the probability of downfall of the subject in danger. Our cardinal utility function is based on the economically reasonable economic assumption. In contrast to the other often used cardinal utility functions it does not need the specification of its parameters *ad hoc*. Other advantage of our utility function is its explanation of the difference in decision making of different „players“ in the St Petersburg casino, based on their wealth (including the explanation of the situational risk seeking behaviour of players under the boundary of survival).

Keywords: St Petersburg paradox, risk aversion, utility function cardinalisation, decisions under uncertainty

JEL Classification: D80, D81