SOUDOBA MAKROEKONOMIE A TEORIE OPTIMÁLNÍHO ŘÍZENÍ

Michal SLAVÍK, Česká národní banka, Praha

1. Úvod

Hlavní proud makroekonomické teorie se pokusil vyrovnat s kritikou ostatních ekonomických škol, která mu vyčítala slabé mikroekonomické základy a nedostatečné zachycení dynamiky ekonomického systému. Tradiční keynesovská makroekonomie pracovala s národohospodářskými agregáty typu národního důchodu a do jisté míry zcela ignorovala mikroekonomickou teorii. Dynamická analýza byla prováděna pomocí komparativní statiky, tedy postupu, jenž porovnával dva stavy světa, ke kterým dojde změnou pouze jediné veličiny (ze základních učebnic ekonomie notoricky známého principu, *ceteris paribus*, tedy vše ostatní nezměněno). Neoklasická makroekonomie se pokusila pod vlivem kritiků zapracovat do svých základů i mikroekonomické prvky. Místo agregovaných veličin ve svých modelech zkoumá chování dezagregovaných subjektů – zpravidla jednotlivců nebo domácností a firem. Pro jednoduchost se předpokládá, že ekonomika je složena z mnoha identických domácností a firem a agregátní údaje jsou obdrženy agregací zmíněných identických mikrosubjektů. Jednání agregátních ukazatelů tak odpovídá chování, které bychom předpokládali na základě znalosti mikroekonomie.

Odklon od agregátních veličin a zapojení individuálních subjektů umožňuje využít prvky známé z mikroekonomické analýzy, např. statické optimalizace s omezením, tj. hledání extrému (maxima či minima), které je omezeno určitou rovností či nerovností podmínkou či podmínkami. Tento postup vede k nalezení statického optima v určitém časovém okamžiku a opět neříká nic o dynamice ekonomického systému. Jako nástroj pro vypořádání se s tímto problémem lze v určitých případech použít *teorii optimálního řízení* (optimal control theory). Místo jediného optima je hledána sekvence optim v čase – *optimální trajektorie* systému (resp. řídicí proměnné) v čase. Jelikož jde o matematickou optimalizaci typickou pro neoklasickou ekonomii, je dynamika systému chápána mechanicky a nepracuje se s historickým časem. Z pohledu ekonomické teorie tak jde o metodu, kterou lze mikroekonomické přístupy aplikovat např. na dynamické problémy makroekonomie, jak se o to snaží některé modely *soudobé teorie růstu* (viz např. Aghion, Howitt, 1998 či Barro-Sala-i-Martin, 1999) nebo *monetární ekonomie* (viz např. Walsh, 1999).

Cílem příspěvku je přiblížit čtenáři základy *teorie optimálního řízení* a poukázat na některé její aplikace v soudobé makroekonomii. Struktura příspěvku je následující: v první části jsou definovány některé používané pojmy, v druhé části jsou stručně přiblíženy základy teorie optimálního řízení, poté jsou vyložena dvě zobecnění: první se týká převodu na současnou hodnotu a druhé nekonečného časového horizontu. V části 5 je metoda přiblížena dvěma častými ekonomickými aplikacemi a nakonec je uveden stručný závěr. I když se snažím o to, aby výklad byl pokud možno co nejsrozumitelnější a nechci zatěžovat čtenáře příliš technickými

details, znalost základního matematického aparátu používaného v magisterských kurzech ekonomie je však pro pochopení metody nutná.¹⁾

2. Vymezení základních pojmů

Klasickou úlohu statické optimalizace si lze představit jako hledání maxima ziskové funkce firmy. Firma zná poptávku po svých produktech, zná i své náklady a stojí před problémem, jaké množství určitého produktu vyrobit, aby maximalizovala svůj zisk. Toto množství určí tak, že položí první derivaci ziskové funkce rovnou nule a rovnici vyřeší. Poté zjistí znaménko druhé derivace ziskové funkce a ujistí se o tom, že nalezený extrém funkce je skutečně maximem (druhá derivace je negativní). Ve skutečnosti firma nebude moci hledat extrém funkce na celém definičním oboru ziskové funkce, ale může být limitována určitými omezeními technologického rázu, které vymezí oblast, v níž se bude hledaný extrém nacházet (např. že vyrobené množství se bude nacházet v určitém intervalu hodnot).

V dynamické optimalizaci půjde prakticky o identický problém, který ale bude neoklasická firma řešit v každém časovém okamžiku časového intervalu $[0, T]$. Snahou firmy bude maximalizovat zisk za celé období (ne zisk v jednom jediném časovém bodě – to by firma nic neinvestovala a snažila se maximálně využít stávající zásobu kapitálu). Do rozhodování firmy může vstupovat řada veličin, které působí na zisk firmy – pro zjednodušení lze uvažovat pouze dvě veličiny. Jednu z nich může firma přímo ovlivňovat a používat ji jako instrument – tzv. *řídící proměnná*. Druhou, tzv. *stavovou proměnnou*, charakterizující daný systém, není možné přímo ovlivnit okamžitými rozhodnutími firmy. Firma může tuto stavovou proměnnou ovlivňovat (řídít) pomocí řídící proměnné. V kontextu tohoto příkladu lze uvést např. dvojici veličin: celkový kapitál firmy a investice. Kapitál, který determinuje to, kolik je firma schopná vyrobit, je stavovou veličinou (firma nemůže přímo ovlivnit v určitém časovém okamžiku velikost své zásoby kapitálu, neboť ta je dána minulým vývojem). Investice, které ovlivňují spolu se znehodnocením kapitálu celkovou výši kapitálu, jsou řídící proměnnou, pomocí níž může firma působit na velikost svého celkového kapitálu. Ovlivňování stavové proměnné může být omezeno jednou či více podmínkami. Jednou z nejčastějších podmínek (u optimalizací spotřeby či investic) může být např. rozpočtové omezení. Průběh stavové veličiny v čase je určen pomocí diferenciální rovnice – *zákona pohybu*. Aby byl model řešitelný, musí být stavová veličina zakotvena v čase, tzn. musí být známá její počáteční a koncová hodnota – hovoříme o tzv. *hraničních podmínkách*. Výše celkového kapitálu se mezi časem 0 a T bude vyvíjet podle zákona pohybu.

Přejdeme-li k matematickému zápisu, lze definovat následující proměnné:

- spojitý čas t ; $t \in [0, T]$,
- stavová proměnná $s(t)$; $s(t) \in S$, $s: [0, T] \rightarrow S$,
- řídící (kontrolní) proměnná $c(t)$; $c(t) \in C$, $c: [0, T] \rightarrow C$, kde $n \leq m$,
- zákon pohybu²⁾ charakterizující změnu stavové proměnné $s(t)$

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \dot{s}(t) = g(s(t), c(t), t), \text{ kde funkce } g: S \times C \times [0, T] \rightarrow S,$$

- cílovou funkci V , tj. funkci, která popisuje hodnotu systému pro jakýkoliv prů-

1) Pro podrobnější seznámení se s metodou nalezne čtenář v práci Barro a Sala-i-Martin (1999), kde jsou shrnuty jak základy statické optimalizace, tak základy řešení diferenciálních rovnic a dynamické optimalizace, či v Chiangově monografii (1992), která poskytuje podrobnější úvod do problematiky dynamické optimalizace. Zajímavá je i práce Violanteho (2002), ze které vycházím.

2) Tečka nad proměnnou je označením derivace dané proměnné podle času.

běh řídicí a stavové veličiny, jde o integrál výnosové (resp. užitkové, ziskové) funkce známé ze statické optimalizace $u(\cdot)$:³⁾

$$V = \int_0^T u(s(t), c(t), t) dt,$$

– množinu omezení $f(s(t), c(t), t) = 0$, která definuje hodnoty, jichž může řídicí proměnná $c(t)$ nabývat.

Pro řešitelnost úlohy jsou nutné 2 základní předpoklady:

– všechny uvedené funkce jsou spojité a diferencovatelné,

– množina $w(s(t), t) = \{c(t) \mid C s.t. f(s(t), c(t), t) = 0\}$ je kompaktní a konvexní.

Po této definici proměnných můžeme přistoupit k definici celkového problému (CP):

$$\max_{\{c(t)\}} V = \int_0^T u(s(t), c(t), t) dt$$

vzhledem k: $\dot{s}(t) = g(s(t), c(t), t)$

$s(0) = S, c(t) \in C$

$f(s(t), c(t), t) = 0$

$s(0) = s_0, s(T) = s_T$

Řešením CP je optimální dráha řídicí proměnné (a tím i díky zákonu pohybu a znalosti počátečních a koncových podmínek trajektorie stavové proměnné) pro každý časový okamžik časového intervalu. Základní rozdíl oproti statické optimalizaci, kde je řešením optimální hodnota v jediném časovém okamžiku, je v tomto typu úloh řešením nalezení optimální časové trajektorie řídicí proměnné $\{c^*(t)\}$.

V další části textu bude popsána jedna z metod řešení CP – *princip maxima* (maximum principle) – navržená ruským matematikem Pontryaginem v 50. letech dvacátého století. Anglický překlad jeho práce byl publikován v roce 1962. Konkurenčním přístupem řešení je metoda dynamického programování navržená R. Bellmanem (1957). Jeho metoda je vhodnější pro řešení problémů v diskrétním čase, Pontryaginova ve spojitém. Dříve než popíšu Pontryaginovu metodu, bude vhodné přiblížit možná příliš abstraktně vypadající problém jednou z možných aplikací, kterou je optimální alokace spotřeby v rámci životního cyklu ekonomického subjektu (viz např. Arlt, Čutková, Radkovský, 2002).

Předpokládejme, že člověk či domácnost může užitek realizovat pouze pomocí spotřeby $c(t)$. Užitek vyjadřujeme obvykle užitkovou funkcí $u(\cdot)$ a v tomto případě bude záviset pouze na jediné veličině – na spotřebě, tedy $u(c(t))$. Předpokládejme, že každý ekonomický subjekt zná délku svého života – ví, že se dožije T let. Během svého života je schopen kumulovat bohatství $w(\cdot)$ a pro názornost předpokládejme, že v každém časovém okamžiku dostává konstantní důchod y , který může buď zkonsumovat nebo jeho část uspořit ($s(t)$) a spotřebovat až v některém z příštích období. Za vzdání se okamžité spotřeby je odměněn úrokem, tj. úrokovou sazbou, kterou je úročeno jeho bohatství. Bohatství se zvětšuje jak velikostí úspor v daném časovém okamžiku, tak úročením předchozí úrovně. Pro jednoduchost rovněž předpokládejme, že ekonomický subjekt se rodí i umírá s nulovým bohatstvím. Klasickým úkolem spotřebitele je maximalizovat užitek, v případě dynamické analýzy celkový užitek během života.

Shrme-li zadání, pak spotřeba $c(t)$ je řídicí proměnná a bohatství (úspory, odložená spotřeba) $w(t)$ je stavová veličina. Množinu omezení tvoří rovnice popi-

3) Pro jednoduchost si lze cílovou funkci představit jako součet všech užiteků (při aplikacích teorie spotřebitele) v jednotlivých časových bodech t od 0 do T .

sující rozdělení důchodu na spotřebu a úspory a zákon pohybu je určen dynamikou bohatství. Celý problém lze zapsat následovně:

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^T u(c(t)) dt \quad \text{maximalizovaná funkce}$$

vzhledem k: $\dot{w}(t) = s(t) + r w(t)$

zákon pohybu

$$y = c(t) + s(t)$$

množina omezení

$$w(0) = 0, w(T) = 0$$

počáteční/koncová podmínka

3. Základy principu maxima

K odvození principu maxima lze použít podobně jako ve statické optimalizaci Lagrangean CP. Pro jednoduchost je vhodné zanedbat množinu omezení f , resp. lze předpokládat, že všechna omezení jsme schopni substituovat do zákona pohybu určeném rovnicí g . Rovněž je vhodné omezit dimenzionalitu problému a předpokládat $m = n = 1$. Pro jednoduchost zápisu lze dynamickou dráhu proměnné např. y , tj. $\{y(t)\}_{t \in [0, T]}$, psát jenom jako $\{y(t)\}$.

Lagrangeán odpovídající celkovému problému lze zapsat jako:

$$L = \int_0^T \left\{ u(s(t), c(t), t) + \lambda(t) \left[g(s(t), c(t), t) - \dot{s}(t) \right] \right\} dt$$

Podobně jako ve statické optimalizaci, hledáme i zde *sedlové body*. Nyní to však jsou body v prostoru funkcí, tj. minimum vzhledem k $\{ \lambda(t) \}$ a minimum vzhledem k $\{ c(t) \}$. První minimum získáme zkoumáním odchýlení $\{ \lambda(t) \}$ do $\{ \lambda(t) + \Delta \lambda(t) \}$ a využitím podmínky sedlového bodu: $L=0$. Druhé minimum obdržíme integrací per partes posledního členu Lagrangeánu.

Zkoumáním odchylky $\Delta \lambda(t)$ odvodíme implikovaný efekt na Lagrangeán:

$$\Delta L = \int_0^T \Delta \lambda(t) \left[g(s(t), c(t), t) - \dot{s}(t) \right] dt$$

Použitím nutné podmínky pro extrém $L=0$ odvodíme z předchozího výrazu, že: $\dot{s}(t) = g(s(t), c(t), t)$.

Nyní definujme Hamiltonián jako $H(s, c, \lambda, t) = u(s, c, t) + \lambda(t)g(s, c, t)$. Lagrangeán lze pomocí Hamiltoniánu psát jako:

$$L = \int_0^T \left[H(s(t), c(t), \lambda(t), t) + \dot{\lambda}(t)s(t) \right] dt - [\lambda(T)s(T) - \lambda(0)s(0)]$$

Pokud budeme uvažovat libovolnou odchylku dráhy řídicí proměnné $\{c(t)\}$, jež zákonem pohybu vyvolá odchýlení trajektorie stavové proměnné $\{s(t)\}$, implikovaná změna Lagrangeánu bude následující:

$$\Delta L = \int_0^T \frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} \Delta c(t) + \left[\frac{\partial H(t)}{\partial s(t)} + \dot{\lambda}(t) \right] \Delta s(t)$$

Pro sedlový bod musí platit $L=0$, tedy:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial H(t)}{\partial s(t)} = -\dot{\lambda}(t)$$

Princip maxima je optimální řešení celkového problému, tj. triplet

$\{s^*(t)\}, \{c^*(t)\}, \{\lambda^*(t)\}$ optimálních trajektorií pro stavovou veličinu $\{s^*(t)\}$, řídicí veličinu $\{c^*(t)\}$ a dynamické Lagrangeovy multiplikátory $\{\lambda^*(t)\}$, který při Hamiltoniánu definovaném jako $H(s, c, \lambda, t) = u(s, c, t) + \lambda^*(t)g(s, c, t)$ musí splňovat v každém časovém okamžiku t následující sadu 4 podmínek:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial c} &= 0 \\ \frac{\partial H(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial s} &= -\dot{\lambda}^*(t) \\ \frac{\partial H(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial \lambda} &= \dot{s}^*(t)\end{aligned}$$

$$\text{hraniční podmínky } s(0) = s_0, s(T) = s_T$$

Výhoda principu maxima spočívá v rozdělení dynamického problému do sekvence jednodušších problémů statické optimalizace, které navíc vypadají velmi podobně. Maximalizací jednoho Hamiltoniánu pro obecný čas t tak získáme řešení dynamického problému. Čtyři výše uvedené podmínky jsou nezbytné, ale lze dokázat, že i postačující.

Rigorózní popsání metody by vyžadovalo matematický důkaz toho, že uvedený postup je dostatečný a že vede k nalezení maxima. To však není záměrem tohoto příspěvku a zájemci si mohou příslušný důkaz vyhledat v literatuře (viz např. Leonard-Long, 1992).

4. Zobecnění principu maxima

Řada ekonomických problémů je založena na mírně odlišných předpokladech než na kterých byly odvozeny předchozí závěry. Mezi nejčastěji zmiňované patří *koncepce časové hodnoty* určitého statku (např. užitku či peněz), která zohledňuje čas, v němž máme užitek z daného statku (např. užitek z 100 Kč dnes je vyšší než užitek ze stejné sumy zítra). Peníze dnes můžeme za úrok někomu na den (předpokládejme bezrizikově) půjčit a zítra budeme mít kromě jistiny i úrok. Pro srovnatelnost v jednotlivých časových obdobích proto užítky (budoucí příjmy atd.) diskontujeme. Další odchylkou od výše uvedených předpokladů jsou aplikace, které předpokládají nekonečný horizont, tedy $T \rightarrow \infty$. Obě modifikace – diskontování na současnou hodnotu a nekonečný horizont – a jejich důsledky pro optimalizační úlohu řešenou principem maxima nyní blíže popíší.

4.1 Diskontování

V mnohých ekonomických aplikacích, resp. prakticky ve všech pracujících s časem je spojitá zisková (cílová, výplatní, užitková) funkce diskontována diskontním faktorem $e^{-\rho t}$, kde diskontní míra $\rho > 0$. Modifikujeme-li úlohu do podoby diskontovaného kontrolního problému (DCP) získáme:

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^T e^{-\rho t} u(s(t), c(t)) dt$$

$$\begin{aligned}\text{vzhledem k: } \dot{s}(t) &= g(s(t), c(t), t) \\ f(s(t), c(t), t) &= 0 \\ s(0) &= s_0, s(T) = s_T,\end{aligned}$$

kde jediná odchylka oproti CP spočívá v odlišné cílové funkci $V(\cdot)$. Místo původní verze Hamiltoniánu H je možné definovat *Hamiltonián současné hodnoty* $H^c(s, c, \lambda, t)$ jako:

$$H^c(s, c, \lambda, t) = u(s(t), c(t)) + \lambda(t)g(s(t), c(t)), \quad \text{kde} \quad \lambda(t) = e^{-\rho t} \lambda(0), \text{ resp. } \lambda(t) = e^{-\rho t} \lambda(T).$$

Pro *princip maxima při diskontování* pak platí: optimálním řešením diskontovaného kontrolního problému je triplet $\{s^*(t), c^*(t), \lambda^*(t)\}$, který při daném $H^c(s, c, \lambda, t) = u(s(t), c(t)) + \lambda(t)g(s(t), c(t))$ splňuje v každém časovém okamžiku t následující 4 podmínky:

$$\frac{\partial H^c(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial H^c(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial s} = \rho \lambda(t) - \dot{\lambda}^*(t)$$

$$\frac{\partial H^c(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial \lambda} = \dot{s}^*(t)$$

$$\text{hraniční podmínky } s(0) = s_0, s(T) = s_T$$

4.2 Nekonečný horizont

V tomto případě se změna odehraje pouze v hraniční podmínce, která bude $s(T) = 0$. Existuje samozřejmě i jiná varianta, která spočívá ve změně horní limity maximalizovaného integrálu. Integrál by pak neměl horní hranici v T , ale v nekonečnu. Je možné dokázat, že podmínku $s(T) = 0$ lze transformovat do tvaru $e^{-\rho T} \lambda(T) s(T) = 0$, což není nic jiného než známá *podmínka transverzalit*. Pokud $T \rightarrow \infty$, podmínku transverzalit lze psát jako limitu:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(T) s(T) = 0$$

Při aplikaci tak místo původní hraniční podmínky $s(T) = s_T$ píšeme $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(T) s(T) = 0$.

Podmínka transverzalit má i ekonomickou interpretaci. Pokud se blížíme konci plánovacího horizontu, optimální řešení vyžaduje, aby buď $s(T)$ bylo rovno nule (tj. nic není promrháno, vyjadřuje-li $s(T)$ užitek) nebo je-li $s(T)$ kladné, aby byla stínová cena statku $\lambda(T)$ nulová (a opět nebylo nic promrháno).

5. Příklad ekonomické aplikace řešení problému dynamické optimalizace

a) Teorie investic

Jako ilustrativní příklad použití metody principu maxima je možné uvést aplikaci optimálního řízení na investiční teorii provedenou R. Dorfmanem (1969). Zjednodušeně lze problém charakterizovat následovně: neoklasická firma je nucena se rozhodnout, kolik investuje v časovém intervalu $[0, T]$ tak, aby maximalizovala svůj zisk, který je dán klasickou ziskovou funkcí $(k(t), x(t))$, kde proměnná

k je zásoba kapitálu a x jsou investiční výdaje.⁴⁾ Na ziskovou funkci jsou kladeny standardní ekonomické předpoklady: první derivace podle kapitálu je kladná a první derivace podle investic je záporná. Změna zásoby kapitálu (zákon pohybu) je určena funkcí $g(k(t), x(t))$, např. $\dot{k}(t) = g(k(t), x(t))$, kde $\dot{k}(t)$ je míra znehodnocení kapitálu. Hraniční podmínky mají tvar: $k(0) = k_0$ a $k(T) \geq 0$. Problém firmy pak lze zapsat následovně:

$$\max_{\{x(t)\}} \int_0^T \Pi(k(t), x(t)) dt$$

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= g(k(t), x(t)) \\ k(0) &= k_0, \quad k(T) \geq 0 \end{aligned}$$

Použijeme-li postup uvedený v předcházející části, získáme:

$$\text{Hamiltonián: } H(k(t), x(t), t) = \lambda(t) g(k(t), x(t))$$

a následně z něj i podmínky principu maxima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\cdot)}{\partial x(\cdot)} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \Pi(\cdot)}{\partial x(\cdot)} + \lambda(t) \frac{\partial g(\cdot)}{\partial x(\cdot)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi(\cdot)}{\partial x(\cdot)} = -\lambda(t) \frac{\partial g(\cdot)}{\partial x(\cdot)} \\ \frac{\partial H(\cdot)}{\partial k(\cdot)} &= -\dot{\lambda}(t) \Rightarrow \frac{\partial \Pi(\cdot)}{\partial k(\cdot)} + \lambda(t) \frac{\partial g(\cdot)}{\partial k(\cdot)} = -\dot{\lambda}(t) \end{aligned}$$

Zákon pohybu: $\dot{k}(t) = g(k(t), x(t))$. Počáteční a koncová podmínka: $k(0) = k_0$, $k(T) \geq 0$.

Pokud známe funkční tvar ziskové funkce $\Pi(k(t), x(t))$ a zákona pohybu $g(k(t), x(t))$, můžeme systém těchto rovnic vyřešit a získat optimální trajektorii investičních výdajů v čase tak, aby byl maximalizován zisk v daném období. V prvním kroku se pokusíme ze systému eliminovat multiplikátor $\lambda(t)$, čehož můžeme dosáhnout zderivováním prvního omezení podle času t . Obecně platí, že pokud se nám podaří zjednodušit systém rovnic do dvou diferenciálních rovnic, je velká šance, že problém bude analyticky řešitelný. To však není pravidlem a komplikovanější systémy budou řešitelné pouze numericky za použití počítače.

b) Spotřeba během životního cyklu

Častým případem aplikací teorie optimální kontroly jsou růstové modely popisující trajektorii spotřeby ekonomického agenta v čase. Jeho cílem je maximalizovat užitkovou funkci při daném rozpočtovém omezení a při respektování výchozích podmínek. Tento model byl obecně popsán výše, nyní si přiblížíme jeho variantu pro konkrétně specifikovanou užitkovou funkci a počáteční a koncové podmínky.

Předpokládejme, že ekonomický agent maximalizuje užitkovou funkci $u(c(t))$, která se rovná přirozenému logaritmu spotřeby v daném čase t , tedy: $u(c(t)) = \ln(c(t))$, a je vybaven počáteční zásobou bohatství $w(0) = w_0$, tj. nemá na začátku žádné bohatství. Své bohatství však může ovlivnit prací, neboť je v každém okamžiku příjemcem konstantního důchodu y , který budutratí (přemění na spotřebu $c(t)$) nebo převede do dalšího období pomocí úspor $s(t)$. Na stav bohatství $w(t)$ působí jak úspory $s(t)$ v jednotlivých časových okamžicích, tak exogenně daná

4) Kapitálová zásoba $k(t)$ je stavová proměnná, investiční výdaje $x(t)$ jsou řídicí proměnná.

úroková sazba r , o které předpokládáme, že je během celého životního cyklu konstantní. Pro jednoduchost rovněž předpokládejme, že subjekt nezanechá dědictví a veškeré naakumulované bohatství sám během života spotřebuje ($w(T) = 0$). Problém, který ekonomický agent řeší v časovém intervalu mezi časem 0 do T , lze formálně zapsat jako:

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^T e^{-\rho t} \ln c(t) dt$$

vzhledem k:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= s(t) + rw(t) \\ y &= c(t) + s(t) \\ w(0) &= 0, w(T) = 0 \end{aligned}$$

Ekonomický agent diskontuje svoji užitkovou funkci $\ln c(t)$ diskontním faktorem $e^{-\rho t}$ a maximalizuje jí v rámci celého svého životního cyklu vzhledem k zákonu pohybu, který určuje dynamiku růstu/poklesu bohatství, k rozpočtovému omezení $y = c(t) + s(t)$ a vzhledem k počáteční a koncové podmínce omezující bohatství.

Ve většině případů se jako vhodné jeví redukovat počet rovnic omezení pomocí vzájemné substituce. V této úloze je možné rozpočtové omezení vyjádřit jako $s(t) = y - c(t)$ a substituovat jej do zákona pohybu. Získáme tak intertemporální rozpočtové omezení ve tvaru: $w(t) + c(t) = y + rw(t)$.

Pro srozumitelnost jen doplníme, že stavová proměnná v takto specifikovaném modelu je bohatství $w(t)$ a řídicí proměnná spotřeba $c(t)$. Hamiltonián současně hodnoty je pak roven:

$$H^c = \ln c(t) + \mu(t)[rw(t) + y - c(t)].$$

Použitím principu maxima získáme:

$$\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c(t)} = \mu(t)$$

$$\frac{\partial H^c}{\partial w} = \rho \mu(t) - \dot{\mu}(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t)(r - \rho) = -\dot{\mu}(t)$$

$$\frac{\partial H^c}{\partial \mu} = \dot{w}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{w}(t) = rw(t) + y - c(t)$$

Kombinací prvních dvou rovnic získáme diferenciální rovnici prvního řádu:

$$-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r - \rho$$

Jejím řešením je optimální trajektorie spotřeby: $c(t) = \bar{c}e^{(r-\rho)t}$, kde $\bar{c}$ je konstanta. Víme však, že v počátečním období $t = 0$ je $c(0) = \bar{c}$ a konstanta není tedy ničím jiným než počáteční hodnotou spotřeby v čase 0.

Pokud by nás zajímala hodnota $\bar{c}$ (následující výklad už nesouvisí s principem maxima, neboť optimální trajektorie je již zjištěná, ale týká se řešení diferenciálních rovnic), pak je nutné zapojit do řešení i zákon pohybu, přesněji substituovat do něj optimální trajektorii spotřeby:

$$\dot{w}(t) = y + rw(t) - c(0)e^{(r-\rho)t}$$

Vynásobíme-li obě strany předchozí rovnice e^{-rt} získáme:

$\dot{w}(t)e^{-rt} - rw(t)e^{-rt} = ye^{-rt} - c(0)e^{-t}$, kde levá strana je rovna $\frac{\partial w(t)e^{-rt}}{\partial t}$. Integrováním dostaneme: $w(t)e^{-rt} = \bar{w} - \frac{ye^{-rt}}{r} + c(0)\frac{e^{-\rho t}}{\rho}$.

Dvojici integračních konstant $\bar{w}, c(0)$ odvodíme použitím počáteční a koncové podmínky: $w(0) = w(T) = 0$. Pro $t = 0$ platí $\bar{w} = \frac{y}{r} - \frac{c(0)}{\rho}$ a dosadíme-li tento vztah zpět, získáme: $w(t)e^{-rt} = \frac{y}{r}(1 - e^{-rt}) - \frac{c(0)}{\rho}(1 - e^{-\rho t})$. Pro $t = T$ výraz vede k řešení $c^*(0) = \frac{y\rho(1 - e^{-rT})}{r(1 - e^{-\rho T})}$.

Optimální trajektorii spotřeby tak při znalosti počáteční optimální spotřeby lze zapsat jako:

$$c^*(t) = \frac{y\rho(1 - e^{-rT})}{r(1 - e^{-\rho T})} e^{(r-\rho)t}$$

K naprosto identickému výsledku dospějeme, použijeme-li Hamiltonián místo Hamiltoniánu současné hodnoty. Pro ilustraci uvedme i tuto cestu řešení. Hamiltonián má tvar: $H = e^{-\rho t}(\ln c(t) + (y - c(t) + rw(t)))$. Použitím principu maxima získáme trojici podmínek:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow e^{-\rho t} \frac{1}{c(t)} = \lambda(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -\dot{\lambda}(t) \Rightarrow r\lambda(t) = -\dot{\lambda}(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{w}(t) \Rightarrow \dot{w}(t) = rw(t) + y - c(t)$$

Řešením druhé z těchto rovnic určíme $\lambda(t)$ jako $\lambda(t) = \bar{\lambda}e^{-rt}$

Dosazením $\lambda(t)$ do první rovnice odvodíme optimální spotřebu v čase t :

$$c^*(t) = \frac{e^{-\rho t}}{\bar{\lambda}e^{-rt}} = \frac{1}{\bar{\lambda}} e^{(r-\rho)t} = \bar{c}e^{(r-\rho)t}, \text{ kde } \bar{c} = \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

Porovnáním této rovnice s předchozím výsledkem, ke kterému jsme dospěli použitím Hamiltoniánu současné hodnoty, ověříme, že trajektorie optimální spotřeby je v obou případech identická, a to $c(t) = \bar{c}e^{(r-\rho)t}$.

6. Závěr

Příspěvek popisuje jednu z možných cest řešení dynamických optimalizačních úloh – metodu principu maxima. Dynamické optimalizační úlohy jsou jednou z nedílných součástí soudobé makroekonomie, která se snaží o respektování mikroekonomických základů (teorie spotřebitele a teorie firmy) a zároveň o zohlednění faktoru času. Pochopení metody principu maxima otevře čtenáři dveře do nemalé části nejmodernější ekonomické literatury, týkající se např. teorie růstu a optimalizačních modelů monetární ekonomie. Celá řada výzkumných prací z oblasti ekonomie pracuje s dynamickou optimalizací, autoři většinou specifikují model a poté prezentují jeho výsledky. Samotné odvození výsledků bývá velmi často vynecháno a předpokládá se, že čtenář použitou metodu dostatečně ovládá.

Metoda principu maxima odvodí z Hamiltoniánu sadu nutných podmínek, které spolu s počáteční a koncovou podmínkou stavové veličiny umožní odvodit optimální trajektorii řídicí proměnné. Následování této optimální trajektorie řídicí proměnné povede k maximalizaci cílové funkce v daném časovém úseku. Optimální trajektorii řídicí proměnné nicméně následovat nemusíme – systém se vyvíjí podle vnitřní dynamiky dané zákonem pohybu, který je jednou z omezujících podmínek řešení. Nenásledování optimální trajektorie řídicí proměnné samozřejmě povede k nižší hodnotě cílové funkce, což je vlastnost, která vyplývá ze samé povahy optimalizace – jiné než optimální řešení musí vést k horšímu výsledku.

Výhodou metody principu maxima je možnost jejího téměř mechanického aplikování na širokou řadu dynamických (ekonomických) problémů ve spojitém čase. Princip maxima lze však s úspěchem aplikovat i v jiných oborech – (např. fyzice). Kromě maximalizačních úloh lze metodu použít po triviální úpravě cílové funkce i na úlohy minimalizační. Omezení metody spočívá ve faktu, že jde o přístup založený na práci se spojitými veličinami – ne všechny ekonomické úlohy je snadné či vhodné ve spojitém čase vyjádřit. Pro úlohy, které mají diskrétní charakter, tedy např. většinu empirických studií, je nutné použít Bellmanovu rovnici a dynamické programování.

Literatura

- Aghion, P., Howitt, P.:** *Endogenous Growth Theory*. Cambridge, MA, MIT Press 1998.
- Arlt, J., Čutková, J., Radkovský, Š.:** Některé aspekty spotřební funkce v podmínkách České republiky 90. let. *Politická ekonomie*, 2002, č. 1, s. 3-23.
- Barro, R., Sala-i-Martin, X.:** *Economic Growth*. Cambridge, MA, MIT Press 1999.
- Bellman, R.:** *Dynamic Programming*, Princeton. Princeton University Press 1957.
- Caballe, J., Santos, M.:** On Endogenous Growth with Physical and Human Capital. *Journal of Political Economy*, 1993, č. 6, s. 1042-1067.
- Dorfman, R.:** An Economic Interpretation of Optimal Control Theory. *American Economic Review*, 1969, č. 5, s. 817-831.
- Halkin, H.:** Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons. *Econometrica*, 1974, č. 2, s. 267-272.
- Chiang, A.:** *Elements of Dynamic Optimization*. New York, McGraw-Hill 1992.
- Chiang, A.:** *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. New York, McGraw-Hill 1984.
- Kamien, M. I., Schwarz, N. L.:** *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. New York, North Holland 1981.
- Marimon, R., Scott, A.:** *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Oxford, Oxford University Press 1999.
- Leonard, D., Long, N. V.:** *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. Cambridge, MA, Cambridge University Press 1992.
- Pemberton, M., Rau, N.:** *Mathematics for Economists: An Introductory Textbook*. Manchester, Manchester University Press 2001.
- Pontryagin, L. et al.:** *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. London, Interscience 1962.
- Romer, D.:** *Advanced Macroeconomics* (2. vydání). New York, McGraw-Hill 2001.
- Seierstad, A., Sydsaeter, K.:** Sufficient Conditions in Optimal Control Theory. *International Economic Review*, 1977, č. 2, s. 367-391.
- Sethi, S., Thompson, G.:** Applications of Mathematical Control Theory to Finance: Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1970, č. 5, s. 381-394.
- Violante, G.:** Notes on Optimal Control Theory. London, University College London 2001, mimeo.

Walsh, C.: *Monetary Theory and Policy*. Cambridge, MA, MIT Press 1998.

Abstract:

The paper presents the optimal control theory and the maximum principle technique

SCONTEMPORARY MACROECONOMICS AND OPTIMAL CONTROL THEORY

Michal SLAVÍK, Czech National Bank, Na Příkopě 28, CZ – 115 03 Prague 1
(e-mail: michal.slavik@cnb.cz).

that is suitable for solving dynamic optimalization problems in continuous time. Modern mainstream macroeconomics stresses microeconomics principles of solved problems. However, the application of the standard microeconomic approach – the static optimalization – needs to be replaced in macroeconomics by more sophisticated methods. The maximum principle is one of the possible tools. This text briefly introduces the basics of this method to Czech readers. More detailed treatment can be found in the original literature. The maximum principle method can be applied not only in solving macroeconomic problems, but also in many different areas that deal with the optimalization in continuous time, e.g. finance or engineering.

Keywords: optimal control theory, maximum principle, dynamic macroeconomics, optimization techniques

JEL Classification: C61 , E13