PRODUKT, KAPITÁL A CENOVÝ POHYB V JEDNODUCHÉM MODELU UZAVŘENÉ EKONOMIKY¹

Jan Kodera, Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd České republiky, Vysoká škola ekonomická v Praze, Bratislavská vysoká škola práva,
Miloslav Vošvrda, Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd České republiky

Úvod

Cílem článku je formulovat dynamický spojitý model malé uzavřené ekonomiky s jednoduchou strukturou a s minimálním počtem nelinearit, který by generoval aperiodické oscilace cen. Základ modelu je převzat z tradičního dynamického Kaldorova modelu, jistá odlišnost spočívá v tom, že proměnné jsou uvažovány v logaritmech. Pro nelineární vazby užíváme logistické funkce jako nejjednodušší a nejpřijatelnější typ nelineární závislosti v ekonomické realitě. Model je vytvořen čtyřmi diferenciálními rovnicemi. Dynamika produkce je důsledkem nerovnováhy investic a úspor, dynamika kapitálu je důsledkem čistých investic, které jsou tvořeny rozdílem investic a kapitálové spotřeby. Dynamika cenové hladiny je důsledek nerovnováhy na peněžním trhu a dynamika očekávané inflace je popsána ve formě spojitého adaptivního očekávání. Analýzu provádíme na numericky kalibrovaném modelu. Analyzovaný model vykazuje chaotické řešení, což je indikováno kladným Ljapunovovým exponentem.

Aplikace lineárních dynamických systémů v ekonomické teorii má relativně dlouhou historii. V řadě odborných publikací, které se začínají v oblasti teoretické ekonomie objevovat v poválečné době, najdeme aplikaci jak diskrétních, tak spojitých lineárních systémů. Jedny z prvních jsou Phillipsův, Samuelsonův a Hicksův model. Tyto modely a základní analýzu jejich řešení najdeme v knize Allena (1971). Obecný tvar lineárního autonomního spojitého modelu je

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b, \quad (1.1)$$

kde $x(t)$ je vektorová funkce proměnné t o n souřadnicích. A je matice o n řádcích a n sloupcích a b je vektor o n souřadnicích. Pokud systém generuje oscilace, jsou to oscilace tlumené nebo explozivní. Trvalé oscilace jsou možné pro singulární hodnoty parametrů systému.

Aplikace nelineárních systémů v ekonomické teorii začala v přibližně stejném období, jako tomu bylo u lineárních systémů, avšak neměla tak rychlý rozvoj. K rozvoji nelineární dynamické ekonomické teorie došlo až později – na konci osmdesátých let dvacátého století. Obecný tvar nelineárního autonomního systému je

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1.2)$$

1) Výzkum byl podporován granty GA ČR 402/05/0115, 402/03/1292 a výzkumným záměrem MŠM 0021620841.

kde $x(t)$ je vektorová funkce proměnné t o n souřadnicích. Funkce f je vektorová funkce o n souřadnicích, které jsou funkcemi vektorové proměnné $x(t)$. Vektor $\tilde{x}$, pro který platí

$$f(\tilde{x}) = 0, \quad (1.3)$$

nazveme rovnovážným bodem nebo rovnovážným stavem systému. Pro vyšetřování stability rovnovážného bodu se používá linearizované soustavy kolem bodu rovnováhy, která je dána rovnicí

$$\dot{x}(t) = \frac{f(\tilde{x})}{\tilde{x}} x(t). \quad (1.4)$$

Zde $x(t)$ je vektorová funkce o n souřadnicích a výraz

$$\frac{f(\tilde{x})}{\tilde{x}}. \quad (1.5)$$

je Jacobiho matice soustavy (1.2) v bodě $\tilde{x}$.

1. Sektor produkce a tvorby kapitálu – formulace

Jádrem modelu bude tradiční Kaldorův dynamický model, který popisuje dynamiku produkce a kapitálu. Formulace takového modelu nalezneme například v knize Lorenze, H.-W. (1994) nebo v rozsáhlé práci autorů Flaschel, P., Franke, R., Semmler, W. (1997). V tomto článku modifikujeme tradiční model v tom smyslu, že pro investiční funkci používáme logistický tvar a proměnné modelu budou uvažovány v logaritmech.

Pro snadnější pochopení námi konstruovaného Kaldorova dynamického modelu začneme tím, že připomeneme tradiční formu modelu

$$\dot{Y} = I(Y, K) - S(Y), \quad (2.1)$$

kde Y, K závisí na čase t a označují produkci a kapitál. Parametr $\dot{Y}$ vyjadřuje rychlost přírůstu produkce k nerovnováze na komoditním trhu. Tato nerovnováha je dána rozdílem mezi investicemi I a úsporami S . Investice I jsou rostoucí funkcí Y a klesající funkcí K . Úspory S jsou rostoucí funkcí produkce (důchodu). Rovnice (2.1) popisuje pohyb produkce jako důsledek nerovnováhy na komoditním trhu, která je interpretována pravou stranou rovnice jako nerovnost investic a úspor.

Růst kapitálu $\dot{K}$ je roven rozdílu investic a kapitálového opotřebení. Opotřebení kapitálu $D(K)$ je rostoucí funkcí kapitálu K . Rovnice, která popisuje pohyb kapitálu K , má tvar

$$\dot{K} = I(Y, K) - D(K). \quad (2.2)$$

Rovnice (2.1) a (2.2) tvoří Kaldorův model tak, jak jej známe v jeho obvyklé formulaci. Modifikaci tohoto modelu vytváříme se záměrem jednodušší a přehlednější analýzy chování modelu. Například bez určitého pozměnění tohoto modelu bychom nemohli tak jednoduše zavést nelinearitu v podobě logistické funkce, která představuje neefektivnější zobrazení té skutečnosti, že investiční míra pro nízké hodnoty produkce je nulová, potom roste, až se ustálí na pevné, maximální hodnotě. Připomínáme, že investiční míra je podíl investic na produkci a produktivita kapitálu je podíl produktu a kapitálu.

O investiční míře budeme předpokládat, že závisí na produktivitě kapitálu. Z důvodů, které budou zřejmě později, zavedeme veličinu vztahem $\ln$, takže můžeme psát

$$j(\cdot) = j(e^{\cdot}). \quad (2.3)$$

Míra investic je rostoucí funkce v nebo a předpokládáme, že se blíží k nule, jakmile se blíží k $-\infty$ (tj. se blíží k nule) a blíží se k pevně dané hodnotě větší než nula a menší než jedna, jakmile a (a tedy i) se blíží k nekonečnu. Za aproximaci míry investic je možné považovat součin nějaké kladné konstanty a a logistické funkce proměnné i . Tato logistická funkce je řešením diferenciální rovnice

$$\frac{d(i)}{dt} = (a - b i) i \quad (2.4)$$

Uvažujeme-li počáteční podmínku $i(0) = i_0$, potom dostaneme následující řešení:

$$i(t) = \frac{a}{b} \frac{e^{a t} - 1}{a + (b - a) e^{a t}}. \quad (2.5)$$

Jak již bylo řečeno, aproximací míry investic je součin konstanty a a logistické funkce i , takže

$$i(t) = \frac{a}{b} \frac{e^{a t} - 1}{a + (b - a) e^{a t}}, \quad (2.6)$$

nebo

$$i(y, k) = \frac{a}{b} \frac{e^{a(y-k)} - 1}{a + (b - a) e^{a(y-k)}}. \quad (2.7)$$

Pro úsporovou funkci volíme tvar

$$S(Y, y) = (s_0 + s_1 y + s_2 y^2) Y. \quad (2.8)$$

Výše uvedená funkce popisuje úspory jako součin sklonu k úsporám a produkce. Sklon k úsporám závisí na logaritmu produkce y a očekávané míře inflace y . Sklon k úsporám roste s logaritmem produkce a klesá s očekávanou inflací. Dosadíme-li z (2.7) a (2.8) do (2.1), která je modifikována v tom smyslu, že místo funkce $S(Y)$ obsahuje funkci $S(Y, y)$, dostaneme

$$\dot{Y} = i(y, k) Y - (s_0 + s_1 y + s_2 y^2) Y. \quad (2.9)$$

Dělíme-li rovnici (2.9) proměnnou Y , dostaneme

$$\dot{y} = i(y, k) - (s_0 + s_1 y + s_2 y^2). \quad (2.10)$$

Symbolem $(0, 1)$ označíme míru amortizace kapitálu. Kapitálová tvorba je pak dána rovnicí

$$\dot{K} = I(Y, K) - K. \quad (2.11)$$

Pokud vyjádříme investice jako součin investiční míry a produkce, dostaneme

$$\dot{K} = i(y, k) Y = K. \quad (2.12)$$

Vydělíme-li rovnici (2.12) K , dostaneme

$$\frac{\dot{K}}{K} = i(y, k) \frac{Y}{K}. \quad (2.13)$$

Použijeme-li logaritmy místo původních hodnot Y a K , máme

$$\dot{k} = i(y, k) e^{y-k}. \quad (2.14)$$

Rovnice (2.10) a (2.14) popisují dynamiku produkce a kapitálové tvorby. Jsou určitou úpravou původního Kaldorova modelu. Závěrečnou úpravu těchto rovnic dostaneme, jestliže za míru investic dosadíme specifický tvar této funkce daný vztahem (2.9), čímž dostaneme

$$\dot{y} = \frac{a}{b_0 (a - b_0)} e^{a(y-k)} (s_0 - s_1 y - s_2), \quad (2.15)$$

$$\dot{k} = \frac{a}{b_0 (a - b_0)} e^{a(y-k)} e^{y-k}. \quad (2.16)$$

2. Cenová hladina a očekávaná inflace

Přidejme k uvažovanému modelu popsanému rovnicemi (2.15) a (2.16) rovnice pro dynamiku cenové hladiny a pro očekávanou inflaci. Dynamika cenové hladiny je ovlivňována nerovnováhou na peněžním trhu. Poptávka po penězích je dána Fisherovou rovnici poptávky po penězích

$$M^d = \frac{1}{V(\cdot)} P Y, \quad (3.1)$$

kde M^d je poptávka po penězích, P je cenová hladina, V je rychlost oběhu peněžního, d je očekávaná inflace. O rychlosti oběhu peněžního V předpokládáme, že roste s očekávanou inflací. Zlogaritmováním výše uvedené rovnice dostaneme

$$m^d = p - y - v(\cdot), \quad (3.2)$$

kde m^d je logaritmus poptávky po penězích, p je logaritmus cenové hladiny a v je logaritmus rychlosti peněžního oběhu. Předpokládáme, že logaritmus rychlosti peněžního oběhu je dán následující rovnicí

$$v(\cdot) = v_0 + \epsilon \left(\frac{d}{d} \right), \quad (3.3)$$

kde konstanta v_0 je určena technologickou úrovní platebního styku. Parametr ϵ je konstanta a $\frac{d}{d}$ je logistická funkce proměnné $\frac{d}{d}$. Logistická funkce, jak víme, řeší rovnici

$$\frac{d \left(\frac{d}{d} \right)}{d} = \left(\frac{d}{d} \right) (g - h \left(\frac{d}{d} \right)). \quad (3.4)$$

Předpokládáme-li počáteční podmínku (0) , dostaneme partikulární řešení výše uvedené diferenciální rovnice tvaru:

$$(\quad) \frac{g_0}{h_0 (g_0 h_0) e^g}, \quad (3.5)$$

kde g a h jsou parametry a $h = 0$. Teď jsme již připraveni zavést rovnici pro dynamiku cenové hladiny v rozšířeném Kaldorově modelu. Tento cenový vývoj je důsledkem nerovnováhy na peněžním trhu. Jedná se vlastně o matematický popis Marshallova přizpůsobovacího procesu. Rozsah nerovnováhy je vyjádřen rozdílem nabídky peněz m^s a poptávky po penězích m^d , tedy

$$\dot{p} = (m^s - m^d). \quad (3.6)$$

Ve výše uvedené rovnici je ϕ parametrem rychlosti přizpůsobení. Dosadíme-li za m^d z rovnice (3.2) a využijeme-li rovnice (3.3) a (3.5), dostaneme

$$\dot{p} = m^s - p - y - v_0 (\quad). \quad (3.7)$$

Spojité adaptivní očekávání inflace je vyjádřeno rovnicí

$$\dot{\pi} = (\dot{p} - \pi). \quad (3.8)$$

Dosadíme-li z rovnice (3.7) do rovnice (3.8), máme

$$\dot{\pi} = m^s - p - y - v_0 (\quad). \quad (3.9)$$

Jestliže využijeme rovnice (3.3), dostaneme závěrečný tvar rovnic popisující pohyb cen a spojitě adaptivní očekávání inflace.

$$\dot{p} = m^s - p - y - v_0 \frac{g_0}{h_0 (g_0 h_0) e^g} \quad (3.10)$$

$$\dot{\pi} = m^s - p - y - v_0 \frac{g_0}{h_0 (g_0 h_0) e^g} \quad (3.11)$$

Konečná forma rozšířeného modifikovaného Kaldorova modelu je dána rovnicemi (2.15), (2.16), (3.10), a (3.11).

3. Stabilita modelu

Pro identifikaci chaotického chování rozšířeného modifikovaného Kaldorova modelu použijeme metodu srovnávání realizací makroekonomického modelu podle exponenciální divergence, která je měřena tzv. Ljapunovými exponenty. Teorie Ljapunových exponentů poskytuje užitečný aparát pro charakterizaci chování nelineárních dynamických systémů. Mimořádně důležitá vlastnost Ljapunovových exponentů je jejich invariance k topologické struktuře systému. Významnou roli hraje maximální Ljapunovův exponent λ . Tento exponent je negativní pro stabilní modely a pozitivní pro nestabilní modely. Podrobnější popis a význam pozitivních hodnot včetně nekonečných

pozitivních hodnot pro chaotické chování modelu je podrobně popsán v monografii H.-W. Lorenz (1994).

Nechť $x(t_1)$ a $x(t_2)$ jsou dva body ve stavovém prostoru s následující metrikou $\|x(t_1) - x(t_2)\|$. Nechť $\rho = \frac{\|x(t_1) - x(t_2)\|}{\|x(t_1) - x(t_2)\|_0}$ je menší než 1. Vzdálenost v čase t_1 a t_2 označíme jako Δt , tj.

$$\rho = \frac{\|x(t_1 + \Delta t) - x(t_2 + \Delta t)\|}{\|x(t_1) - x(t_2)\|}. \quad (4.1)$$

Aproximujeme exponenciálou tento výraz a dostaneme

$$\rho \approx \exp(\lambda \Delta t) \quad (4.2)$$

pro $\lambda \Delta t \ll 1$ a $\Delta t > 1$. Jestliže $\lambda < 0$, realizace modelu exponenciálně divergují. Jestliže $\lambda = 0$, model má stabilní limitní cyklus. Jestliže $\lambda > 0$ nebo $\lambda = 0$, model má chaotické chování. Jestliže model je výrazně závislý na počátečních podmínkách, potom Ljapunovův exponent je $\lambda > 0$. Ljapunovův exponent lze explicitně formulovat následovně:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln \rho}{\Delta t} = \lambda. \quad (4.3)$$

Pro analýzu stability modelu můžeme použít vlastních čísel Jacobiánu modelu.

Vyjádřeno v maticových pojmech, rozvineme vektorovou funkci $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ v rovnovážném bodě $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{J}(\mathbf{x}(t))$ je 4x4 Jacobiho matice vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ v bodě $\mathbf{x}^*$. Uvažujme dynamický systém jako zobrazení a dynamiku vzdálenosti realizací si reprezentujeme následovně:

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_n)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_n)) \text{ pro } n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Po rozvinutí vektorové funkce dostaneme

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{J}_n(\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{x}(t_n)) + O(\|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{x}(t_n)\|^2). \quad (4.5)$$

Rovnovážný bod $(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i)$ je stabilní tehdy a jen tehdy, když systém $\mathbf{f}(\cdot)$ je stabilní, tj. jestliže všechna vlastní čísla matice systému $\mathbf{f}(\cdot)$ mají záporné reálné části. Označme λ_i pro $i=1, \dots, 4$ vlastní čísla matice $\mathbf{J}_n(\cdot)$. Ljapunovovy exponenty λ_i jsou definovány takto:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\lambda_i^N}{\lambda_i} \right| \text{ pro } i=1, \dots, 4. \quad (4.6)$$

Jaká je dimenze takového systému? Uvažujme typickou orbitu chaotického atraktoru. Uspořádejme Ljapunovovy exponenty v sestupném pořádku od největšího k nejmenšímu. Předpokládejme, že j je největší celé číslo, pro něž platí $\lambda_{j+1} < 0$. Potom platí, že $\lambda_{j+1} < 0$. Dimenze atraktoru je vypočtena následovně:

$$D_L = \prod_{j=1}^j \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1}. \quad (4.7)$$

D_L se nazývá Ljapunova dimenze. Chaotické atraktory jsou spojovány s přítomností alespoň jednoho kladného Ljapunova exponentu. Přítomnost alespoň jednoho kladného Ljapunova exponentu je svázána se ztrátou prediktability systému. Tato vlastnost je typická pro chaotické chování systému. Aplikujme teorii Ljapunových exponentů na rozšířený a modifikovaný Kaldorův model. Jacobián rozšířeného a modifikovaného Kaldorova modelu má následující tvar:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & s_2 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & A_{33} & & \\ 0 & A_{43} & & \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

kde

$$A_{11} = \frac{a^2 - b_0(a - b_0)\exp(-a(y - k))}{(b_0 - (a - b_0)\exp(-a(y - k)))^2}, \quad A_{12} = \frac{a^2 - b_0(a - b_0)\exp(-a(y - k))}{(b_0 - (a - b_0)\exp(-a(y - k)))^2},$$

$$A_{21} = \frac{a^2 - b_0\exp(y - k)}{(b_0 - (a - b_0)\exp(-a(y - k)))^2}, \quad A_{22} = \frac{a^2 - b_0\exp(y - k)(a - b_0\exp(-a(y - k)))}{(b_0 - (a - b_0)\exp(-a(y - k)))^2},$$

$$A_{33} = \frac{g^2 - h_0(g - h_0)\exp(-g)}{(h_0 - (g - h_0)\exp(-g))^2}, \quad A_{43} = \frac{g^2 - h_0(g - h_0)\exp(-g)}{(h_0 - (g - h_0)\exp(-g))^2} - 1.$$

Jestliže $\max_{i=1, \dots, 4} \lambda_i < 0$, potom rozšířený a modifikovaný Kaldorův model má stabilní fixní bod. Jestliže $\max_{i=1, \dots, 4} \lambda_i = 0$, má tento model stabilní limitní cyklus. Jestliže rozšířený

a modifikovaný Kaldorův model má asymptoticky stabilní fixní body, má tento model čtyři záporné Ljapunovy exponenty. Jestliže rozšířený a modifikovaný Kaldorův model má asymptoticky stabilní limitní cyklus, potom má 4- k záporných Ljapunových exponentů a $k=1$. Jestliže rozšířený modifikovaný Kaldorův model má quasiperiodické atraktory, potom má 4- k záporných Ljapunových exponentů a $k=s$ pro quasiperiodický atraktor na T^s torusu.

4. Rozšířený a modifikovaný Kaldorův model a jeho řešení

Numerické naplnění nelineárního spojitého dynamického modelu je vždy problém, který není dosud uspokojivě vyřešen. Model studovaný v tomto článku je deterministický spojitý nelineární dynamický model, který, jak již bylo řečeno, může vytvářet i velmi složitou dynamiku včetně aperiodických oscilací. Parametry takových modelů jsou vět-

šinou kalibrovány hodnotami, které považujeme za ekonomicky přípustné. Obvykle v rámci přípustných mezí měníme hodnoty kalibrovaných parametrů a v závislosti na těchto změnách zkoumáme změny dynamiky modelu a volíme takovou kalibraci, která nejlépe zobrazuje realitu. V tomto článku provedeme jednu kalibraci modelu. Hodnoty parametrů modelu zvolíme podle tabulky 1.

Tabulka 1

a	b		s_0	s_1	s_2	$\acute{a}$	$\hat{a}$
1	1	0,5	0,2	0,05	0	35	0.1

$\check{a}$	$\acute{o}$	$\check{u}$	$\check{e}$	g	h	$_0$	ϵ	v_0	m^s
1	0,6	0,8	0,25	1	1	0,5	15	1	2

Snažili jsme se o ekonomicky realistickou volbu parametrů. Parametr funkce úspor (2.8) s_0 má hodnotu 0,2. To znamená, že například při očekávané inflaci 0 a výši produkce 1 je uspořeno 0,2, jak zjistíme dosazením do funkce (2.8), což vcelku odpovídá ekonomické skutečnosti. Podobně parametr $\check{e}$ ve funkci míry investic je kalibrován vcelku realisticky, jak vidíme ve vzorci (2.7). Hodnota $\check{e} = 0,25$ znamená, že maximálně dosažitelná míra investic (při logaritmu produkce blížícím se k nekonečnu, tj. při značně vysokých hodnotách produkce) je 0,25, což lze pokládat za ekonomicky zdůvodněné. Za diskutabilní mohou být pokládány rychlosti přizpůsobení $\acute{a}$, $\acute{o}$, $\check{u}$. Jedná se totiž o nepozorovatelné hodnoty. Měly by být dosaženy ve více variantách, což bylo provedeno během přípravných prací na tomto článku. V tabulce je uvedena pouze jedna z variant, při které je dosaženo složitější dynamiky systému. Ostatní koeficienty uvedené v tabulce nejsou pro dynamiku systému už tak zásadní. Ovlivňují totiž jenom sklony jednotlivých funkcí, tj. sklony funkce investiční míry a rychlosti oběhu peněžního, případně odpisy kapitálu.

Míra investic a sklon k úsporám jsou vyjádřeny rovnicemi (2.7) a (2.8) a mají po výše uvedené kalibraci následující tvar:

$$i(y, k) = \frac{0.25}{1 - e^{-y \cdot k}}, \quad s = 0.2 - 0.05y. \quad (5.1)$$

Užitím výrazu (5.1) v rovnicích (2.10) a (2.14) dostaneme numerickou formu rovnic pro modelování jednoduchého modelu uzavřené ekonomiky.

Rovnice dynamiky produkce:

$$\dot{y} = 35 - \frac{0.25}{1 - e^{-y \cdot k}} - (0.2 - 0.05y). \quad (5.2)$$

Rovnice tvorby kapitálu:

$$\dot{k} = \frac{0.25}{1 - e^{-y \cdot k}} - 0.1. \quad (5.3)$$

Rovnice cenové dynamiky:

$$\dot{p} = 0.6(2 - y - p) + \frac{0.75}{1 + e^p} \quad (5.4)$$

Rovnice adaptivního očekávání inflace:

$$\dot{y} = 0.8(0.6(2 - y - p) + \frac{0.75}{1 + e^p}) - y \quad (5.5)$$

Položme počáteční hodnoty jednotlivých realizací proměnných následovně: $y(0) = 3$, $k(0) = 10$, $p(0) = 1$, $\dot{p}(0) = 0$. Trajektorie a fázový portrét jsou uvedeny v obrázcích 1-4.

Obrázek 1

Obrázek 2

Obrázek 3

Obrázek 4

Fázový portrét rozšířeného a modifikovaného Kaldorova modelu je uveden na obrázku 5.

Obrázek 5

Vlastní čísla tohoto systému rovnic jsou následující:

$$\begin{matrix} 0.02 & 0.373i \\ 0.02 & 0.373i \\ \text{eigenvals}(A) & 0.6 \\ & 0.999 \end{matrix}$$

Ljapunovovy exponenty nabývají těchto hodnot: 0,0635, 0, -0,0005, -1,7475. Ljapunovova dimenze má hodnotu 3. Chování Ljapunovových exponentů a Ljapunovovy dimenze pro rozšířený a modifikovaný Kaldorův model je uvedeno na obrázku 6.

Obrázek 6

0.0635, 0, -0.0005, -1.7475, (3.000)

Závěr

V tomto článku byl formulován rozšířený a modifikovaný Kaldorův model. Jádrem našeho modelu tvoří rovnice (2.15) a (2.16), které popisují původní Kaldorův model. Rovnice (3.10) a (3.11) tento model rozšiřují o dynamiku cenové hladiny. Model je komplexem lineárních a nelineárních závislostí. Nelineární závislosti jsou pouze dvě. První z nich je nelineární funkce sklonu k investicím, která je logistickou funkcí. Druhá nelinearita byla použita ve výrazu pro rychlost peněz. Rychlost peněz je modelována jako logistická funkce očekávané inflace. Jak již bylo poznamenáno, i vcelku jednoduché nelineární závislosti na pravých stranách diferenciálních rovnic mohou být příčinou složitého dynamického chování modelu. Tuto skutečnost jsme ukázali na rozšířeném Kaldorově modelu, za jehož parametry byly dosazeny číselné hodnoty odpovídající ekonomické realitě. Takto kalibrovaný model má nestabilní bod rovnováhy, jeden kladný, jeden nulový a dva záporné Ljapunovy exponenty. Kladná hodnota Ljapunovova exponentu indikuje chaotické chování rozšířeného a modifikovaného Kaldorova modelu navzdory jeho relativní jednoduchosti.

Další rozšíření modelu by mohlo směřovat k modelu malé otevřené ekonomiky. Takové rozšíření by znamenalo zavedení devizového kursu jako nové proměnné a další rovnice, která by popisovala adaptaci devizového kursu. Základní část modelu nenabízí úrokovou míru jako endogenní proměnnou modelu. Nabízí se produktivita kapitálu nebo mezní produktivita kapitálu a reálná zahraniční úroková míra jako vstupní proměnné pro vysvětlení dynamiky devizového kursu. To ovšem předpokládá další teoretickou analýzu modelu a výpočetní experimenty s ním.

Literatura

- Allena, R.D.G.:** *Matematická ekonomie*. Praha, Academia 1971.
Dornbusch, R.: *Open Economy Macro-Economics*. New York, Basic Books 1980.
Flaschel, P., Franke R., Semmler, W.: *Dynamic Macroeconomics*. Cambridge, MA, MIT Press 1997.

- Guckenheimer, J., Holmes, P.:** *Non-Linear Oscillation, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York, Springer Verlag 1986.
- Hahn, F.:** *Stability*. In: Handbook of Mathematical Economics, vol. II,
- Kodera, J.:** *Four Equation Model of Price Dynamics*. In: Proc. 20th International Conference Mathematical Methods in Economics. Ostrava, University of Economics 2002, s. 151-155.
- Kodera, J., Sladký, K., Vošvrda, M.:** *The Role of Inflation Rate on the Dynamics of an Extended Kaldor Model*. Second Workshop of the Society for Computational Economics, Special Interest Group on Economic Dynamics, Aix en Provence (Marseilles), France, May 8-11, 2003.
- Kodera, J., Sladký K, Vosvrda M.:** *The Extended Kalecki-Kaldor Model Revisited*. 21st International Conference Mathematical Methods in Economics 2003, Praha, 2003.
- Lorenz, H.-W.:** *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Berlin, Springer Verlag 1994.
- Takayama, A.:** *Analytical Methods in Economics*. Hertfordshire, Harvester Wheatsheaf 1994.
- Tobin, J.:** Keynesian Models of Recession and Repression. *American Economic Reviews*, 1975, s. 195-202.

PRODUCT, CAPITAL STOCK AND PRICE DYNAMICS IN A SIMPLE MODEL OF CLOSED ECONOMY

Jan Kodera, Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic; University of Economics (nám. W. Churchilla 4, CZ – 130 67 Praha 3, e-mail: kodera@vse.cz); University of Law of Bratislava,

Miloslav Vošvrda, Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic, Pod vodárenskou věží 4, CZ – 182 00 Praha 8 (e-mail: vosvrda@utia.cas.cz)

Abstract

A purpose of this paper is to formulate a continuous dynamical model for a small closed economy with a simple structure and with a minimum number of non-linearities. A basis of this model is developed from dynamical Kaldorian model. Variables in the modified dynamical Kaldorian model are in a logarithm scale. A form of the logistic function is used for non-linear connections in this model. The model is formed by four differential equations. First two equations create relatively closed sub-model generating both production and capital stock trajectories. Two other equations describe the price level dynamics as a consequence of money market disequilibrium and continuously adaptive expectation of inflation. Our investigation is firstly aimed to investigate a dynamics of the production and capital stock. Secondly to compute Ljapunov exponents for a simple model of closed economy showing its a chaotic behavior. Simulation studies are performed on numerical calibrated model.

Keywords

investment ratio, propensity to save, expected inflation, nonlinear system, and price dynamics

JEL Classification

E44