

KONSTRUKCE VÝNOSOVÉ KŘIVKY POMOCÍ VLÁDNÍCH DLUHOPIŠŮ V ČESKÉ REPUBLICE

Jiří Málek, Jarmila Radová, Filip Štěrba, Vysoká škola ekonomická v Praze

1. Úvod

Vztah cen vládních dluhopisů a úrokových měr je známý. Ceny dluhopisů citlivě reagují na změny úrokové míry zadané centrální bankou (v ČR 14denní repo), a naopak ceny dluhopisů samy určují základní časovou strukturu úrokových sazeb¹. V tomto příspěvku se budeme zabývat druhým problémem. Jak určit časovou strukturu úrokových sazeb z cen dluhopisů. Pokud bychom měli zadány pouze ceny bezkupónových dluhopisů (dluhopisů s libovolnou dobou splatnosti), byl by problém jednoduchý. Každý dluhopis by podle doby splatnosti určoval příslušnou úrokovou míru na dané období. V praxi však jsou k dispozici většinou kupónové dluhopisy. Metoda *bootstrapping* bývá rovněž většinou nepoužitelná, doby splatnosti a výplaty kupónů různých dluhopisů bývají nepravidelně rozloženy během roku. Je proto nutné najít způsob, jak dostatečně přesně aproximovat údaje získané z dat kupónových dluhopisů. Tomuto problému je stále věnována intenzivní pozornost (např. Bolder a Stréliski, 1999, Diebold a Canlin 2006, Lemke, 2006), nebo časová struktura úrokových měr slouží jako základní struktura výnosových měr v ekonomice. Pokud (bezkupónové) dluhopisy držíme do doby splatnosti, tyto výnosové míry odpovídají bezrizikovým investicím² a slouží jako srovnávací bod (*benchmark*) pro porovnání výnosnosti ostatních (rizikových) investic. Tyto bezrizikové míry se rovněž používají jako vstupní parametry pro ohodnocování různých typů finančních derivátů. V modifikované formě je lze využít rovněž k extrakci tržních očekávání ohledně budoucího vývoje úrokových sazeb.

V tomto článku uvedeme několik možných přístupů ke konstrukci časové struktury úrokových měr. Následně podrobněji ukážeme konstrukci a možnou interpretaci výnosových křivek s využitím parametrických metod. Použité funkce budou jednak vlastní konstrukcí a jednak převzaté a bude provedeno jejich srovnání. Analyzovány budou jejich přednosti a nedostatky. Další struktura tohoto příspěvku bude následující: část druhá shrnuje základní možné tvary výnosových křivek, třetí část představuje základní me-

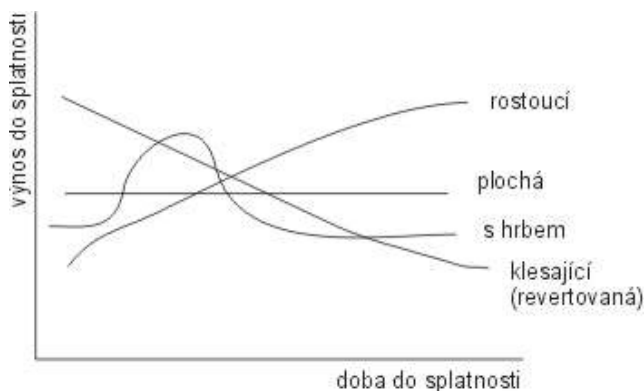
-
- 1 Často se místo pojmu časová struktura úrokových měr používá kratší pojem výnosová křivka. Není to úplně přesné, nebo pojem výnosová křivka evokuje spíše časovou strukturu výnosnosti do doby splatnosti. Nicméně, protože se jedná o zažitý pojem, budeme používat obě vyjádření.
 - 2 Striktně vzato není bezriziková žádná investice. Na finančních trzích se obecně považují za bezrizikové takové investice, které mají ten nejvyšší rating. To splňují například vládní dluhopisy USA. V případě ČR mají státní dluhopisy rating nižší, přesto je v tomto textu budeme dále za bezrizikové považovat. Vycházíme při tom z přesvědčení, že v rámci námi zkoumaného období se prémie za kreditní riziko spojená se státními dluhopisy blížila nule.

todické přístupy ke konstrukci výnosových křivek. Ve čtvrté části odhadneme a porovnáme tvar výnosové křivky pomocí několika parametrických funkcí. Konečně v páté části využijeme Svenssonovu parametrickou funkci k odhadu okamžité forwardové křivky a ukážeme její možnou ekonomickou interpretaci.

2. Tvary výnosové křivky

Výnosové křivky mohou mít různý tvar, což je ovlivněno mnoha faktory, např. očekávanou změnou měnové politiky centrální banky, očekávanou mírou inflace, likviditou atd.. V realitě se tak setkáváme s různými strukturami úrokových měr – stoupající strukturou úrokových měr, klesající strukturou úrokových měr, hrbatou strukturou úrokových měr nebo plochou strukturou úrokových měr a tedy s různými tvary výnosových křivek, což znázorňuje obrázek 1.

Obrázek 1



Při stoupající struktuře úrokových měr je nižší zúročení pro dluhopisy s kratší dobou splatnosti a vyšší zúročení pro dluhopisy s delší dobou splatnosti. Tento případ je nejobvyklejší. Výnosové křivky jsou podle empirických výzkumů nejčastěji rostoucí a konkávní funkcí času.

Při klesající struktuře úrokových měr je tomu naopak. Dluhopisy s kratší dobou splatnosti mají vyšší výnos než dluhopisy s delší dobou splatnosti. S klesající strukturou úrokových sazeb jsme se setkali v ČR v polovině 90. let minulého století, kdy dlouhodobé úrokové sazby byly nižší než krátkodobé. Klesající výnosovou křivku jsme rovněž mohli pozorovat ke konci roku 2006 například v USA, kdy se zdálo, že inflační tlaky mírně polevují a trh očekával, že FED přikročí ke snížení úrokových sazeb. Klesající neboli inverzní výnosová křivka bývá občas považována za jakýsi indikátor možné nastávající recese.

Při hrbaté struktuře úrokových měr mají nejvyšší zúročení střednědobé dluhopisy a při ploché struktuře je úroková míra z dluhopisů s různou dobou splatnosti téměř shod-

ná³. S plochou strukturou úrokových sazeb se pro jednoduchost provádí většina analýz, které souvisejí se stanovením rizika či ohodnocováním.

3. Metody konstrukce výnosové křivky

Pokud předpokládáme, že dluhopis vyplácí kupónové platby v pravidelných intervalech, lze obecně zapsat vztah ceny dluhopisu a úrokových měr následovně:

$$P = \frac{C}{1 + r_1} + \frac{C}{(1 + r_2)^2} + \dots + \frac{C + JH}{(1 + r_n)^n},$$

kde

C je kupónová platba,
 JH je jmenovitá hodnota bondu (*face value*),
 P je tržní cena bondu a
 $r_i, i = 1, 2, \dots, n$ je úroková míra na i -té období

3.1 Bootstrapping

Základní metodou pro nalezení časové struktury úrokových měr, která bývá uváděna v učebnicích, je metoda nazývaná *bootstrapping*. Vychází z předpokladu, že na každé období (např. 1 rok) máme k dispozici jeden dluhopis s příslušnou dobou splatnosti. Dostáváme tak soustavu rovnic, která je poměrně snadno řešitelná.

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{C_1 + JH_1}{1 + r_1} \\ P_2 &= \frac{C_2}{1 + r_1} + \frac{C_2 + JH_2}{(1 + r_2)^2} \\ P_3 &= \frac{C_3}{1 + r_1} + \frac{C_3}{(1 + r_2)^2} + \frac{C_3 + JH_3}{(1 + r_3)^3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ P_n &= \frac{C_n}{1 + r_1} + \frac{C_n}{(1 + r_2)^2} + \dots + \frac{C_n + JH_n}{(1 + r_n)^n} \end{aligned}$$

kde

C_i kupónová platba i -tého dluhopisu (splatného za i let)
 JH_i jmenovitá hodnota i -tého dluhopisu,
 r_i úroková míra na i let

3 Někdy se uvádí i tzv. inverzní hrbatá struktura, kdy úrokové míry zpočátku klesají a následně rostou.

Položíme-li $D_i = \frac{1}{(1+r_i)^i}$, vidíme, že se jedná o soustavu lineárních rovnic o n ne-

známých. Z první rovnice nalezneme r_1 , dosadíme do druhé rovnice, nalezneme r_2 atd. Vypočítané hodnoty r_i pak proložíme hladkou křivkou.

Na většině trhů s vládními dluhopisy včetně českého je však tato metoda nepoužitelná. Existuje příliš málo obchodovatelných vládních bondů (viz tabulka 1), které navíc vyplácejí kupón k různému datu během roku. Důsledkem toho je, že soustava má mnohem více neznámých než je rovnic. Obecně má taková soustava nekonečně mnoho řešení a každé by bylo možné chápat jako možnou časovou strukturu úrokových sazeb.

3.2 Spliny

V posledních deseti letech získaly na popularitě při konstrukci výnosových křivek tzv. spliny. Obecný k -spline⁴ je po částech polynomiální aproximace s polynomy řádu k , která má derivace $k-1$ řádu. Velmi často se používají kubické spliny, jejichž obecný tvar je

$$s(x) = \sum_{i=0}^3 a_i x^i + \frac{1}{3!} \sum_{p=1}^{n-1} b_p (x - x_p)_+^3,$$

kde

$$(x - x_p)_+^3 = \max(x - x_p, 0)^3$$

a x_1, x_2, \dots, x_n jsou uzlové body (body, kde na se jednotlivé polynomy navazují).

Aplikace splinů vyžaduje odhad parametrů, což může způsobit potíže při numerickém zpracování.

3.3 Parametrické funkce

3.3.1 Použití polynomů

Obecný tvar polynomu je

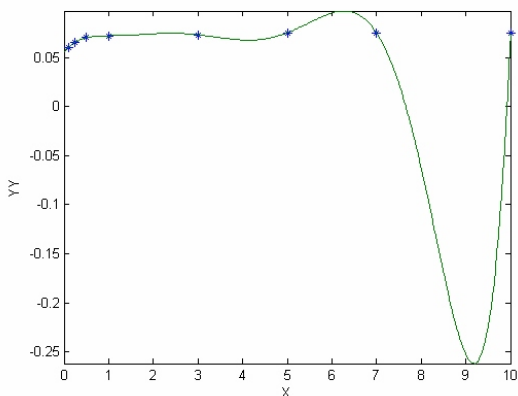
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Je známo, že množina polynomů je hustá v prostotu spojitých funkcí na kompaktní množině. To znamená, že jakoukoli spojitou funkci na konečném uzavřeném intervalu lze libovolně přesně aproximovat polynomem. Nabízí se tedy myšlenka použít polynomy pro konstrukci křivky časové struktury úrokových měr. Ukazuje se však, že tento postup je často nevhodný. Polynomy jsou velmi citlivé na vstupní data a jejich chování mezi vstupními daty je nepředvídatelné. Nastává rovněž problém se stupněm použitého polynomu. Použijeme-li pro aproximaci polynom vyššího stupně, můžeme dosáhnout přesnější aproximace, ale jeho chování mezi daty bývá často nepřijatelné.

4 Polynom má obecně derivace všech řádů. Problémem u splinů jsou uzlové body, kde jednotlivé polynomy na sebe navazují. V těchto bodech se požaduje existence derivací do řádu $k-1$.

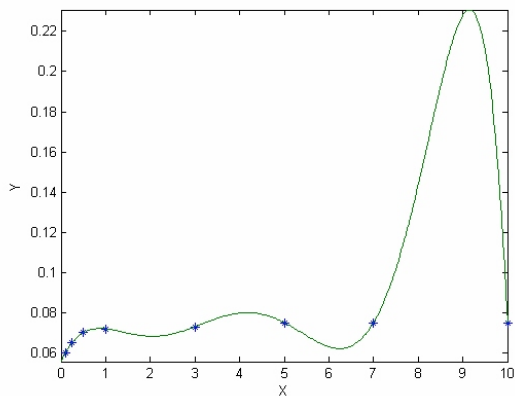
Proto bývá někdy vhodnější použít polynom nižšího stupně, když aproximace nebude tak přesná, ale jeho chování mezi daty bude přijatelnější. Na Obrázku 2 a 3 je ukázáno, jak změna jediné úrokové míry o 4bp.⁵ vede k dramatické změně tvaru výnosové křivky. Pro aproximaci byly použity polynomy sedmého stupně. Vstupní data (X,Y), (X, YY) udávají čas a velikost příslušné úrokové míry. Velikosti naznačují rostoucí výnosovou křivku. Nicméně polynom (který v našem případě přesně kopíruje data) má naprosto nepřijatelný tvar⁶.

Obrázek 2



X=[0.1 0.25 0.5 1 3 5 7 10];
 YY=[0.06 **0.0654** 0.07 0.072 0.073 0.075
 0.075 0.075];

Obrázek 3



X=[0.1 0.25 0.5 1 3 5 7 10];
 Y=[0.06 **0.0650** 0.07 0.072 0.073 0.075
 0.075 0.075];

-
- 5 Označení bp znamená basický bod, které se používá v bankovní praxi pro změnu velikosti úrokové míry. 1bp je 0.01%.
 - 6 Nepřijatelný tvar je velmi vágní a nepřesné tvrzení. Zde musíme vycházet z finanční praxe, která je ochotna přijmout jen určité tvary výnosových křivek (viz obrázek 1).

3.3.2 Funkce Nelson-Siegela

Tato parametrická funkce bývá pro konstrukci výnosových křivek často používána pro svou jednoduchost. Její tvar bývá vyjádřen jako funkce tzv. okamžité forwardové sazby⁷ v závislosti na době vypořádání m , což můžeme zapsat takto:

$$f(m) = a_0 + (a_1 - a_2)m e^{-bm}$$

Príslušnou spotovou výnosovou křivku $r(t)$ pak můžeme zapsat jako:

$$r(t) = a_0 + a_1 \frac{1 - e^{-bt}}{b} - a_2 \frac{1 - e^{-2bt}}{b} e^{-bt}.$$

Koeficient a_0 lze interpretovat jako dlouhodobý faktor. Určuje hladinu výnosové křivky. Snadno se lze přesvědčit, že $r(\infty) = a_0$.

Koeficient a_1 má váhu $\frac{1 - e^{-b}}{b}$, což je funkce, která začíná v hodnotě 1 a klesá monotónně a rychle k 0. Lze jej interpretovat jako krátkodobý faktor. Udává sklon výnosové křivky, který lze definovat jako $r'(0) = r(0)^8$. Zřejmě platí $r'(0) = r(0) - a_1$.

Koeficient a_2 má váhu $\frac{1 - e^{-b}}{b} e^{-b}$, která začíná v 0, roste a pak klesá opět k 0.

Lze jej proto interpretovat jako střednědobý faktor. Souvisí s křivostí křivky, která se zde zjednodušeně definuje jako rozdíl dvojnásobku dvouleté úrokové míry a součtu míry desetileté a tříměsíční. Lze ukázat, že $2r(2) - r(10) - r(0.25) = 0.00053a_1 - 0.37a_2$.

Koeficient b pak určuje míru exponenciálního klesání. Malé b produkuje pomalou míru klesání, a tak může lépe aproximovat křivku v delším časovém horizontu, velké b pak dává rychlé klesání a lépe aproximuje křivku v kratším horizontu.

4. Konstrukce výnosové křivky z českých dluhopisů s využitím parametrických funkcí

V realitě se můžeme v různých dobách na různých trzích vládních dluhopisů setkat s celou řadou tvarů výnosových křivek. Jak jsme již uvedli, nejčastěji se vyskytují čtyři základní tvary výnosových křivek: rostoucí, klesající, plochá a hrbatá (humped). Z toho důvodu je důležité, aby při konstrukci výnosové křivky pomocí parametrické funkce byla zvolená parametrická funkce dostatečně flexibilní, aby mohla zachytit různé tvary výnosových křivek. Zároveň je důležité, aby odhadnuté ceny dluhopisů odvozené z vybrané parametrické funkce co nejlépe aproximovaly skutečné tržní ceny dluhopisů. Naším hlavním cílem bylo otestovat a vzájemně porovnat několik vybraných parametric-

7 Definice okamžité forwardové míry viz Dodatek.

8 V praxi se někdy definuje sklon výnosové křivky jako rozdíl hodnot desetileté a tříměsíční úrokové míry.

kých funkcí. Zde nyní prezentujeme tři parametrické funkce, které se jeví pro konstrukci výnosové křivky jako nejvhodnější⁹:

$$A: r(t) = (a - bt)\exp(ct) - d$$

$$B: r(t) = (a - bt - gt^2)\exp(ct) - d$$

$$C: r(t) = a - b\exp\left(-\frac{t}{3}\right) - c\exp\left(-\frac{t}{9}\right) - d\exp\left(-\frac{t}{27}\right) - g\exp\left(-\frac{t}{27}\right)$$

kde a, b, c, d, g jsou parametry a t je čas.

Vstupní data udává tabulka 1.

Tabulka 1
České vládní dluhopisy, 17. května 2002

Vládní dluhopis	Kótovaná cena	Alikvotní úrokový výnos (AUV)	Cena + AUV	Kupón (%)	Doba splatnosti	Doba do splatnosti (roky)	Výnosnost do splatnosti (%)
SD 6,90/03	101,90	2,22	104,12	6,90	21. 1. 2003	0,678	3,93
SD 14,85/03	107,45	4,17	111,62	14,85	6. 2. 2003	0,719	4,03
SD 10,90/03	107,95	8,48	116,43	10,90	7. 8. 2003	1,222	4,07
SD 7,95/04	106,01	2,25	108,26	7,95	5. 2. 2004	1,717	4,23
SD 7,30/04	106,15	5,70	111,85	7,30	6. 8. 2004	2,219	4,32
SD 6,05/04	103,45	4,08	107,53	6,05	14. 9. 2004	2,325	4,44
SD 6,75/05	105,88	1,67	107,55	6,75	18. 2. 2005	2,753	4,43
SD 5,70/06	103,78	3,18	106,96	5,70	26.10. 2006	4,442	4,73
SD 6,30/07	106,65	1,05	107,70	6,30	17. 3. 2007	4,833	4,72
EIB 8,20/09	117,75	1,23	118,98	8,20	23. 3. 2009	6,850	5,06
SD 6,40/10	108,50	0,59	109,09	6,40	14. 4. 2010	7,908	5,07
SD 6,55/11	108,50	4,04	112,54	6,55	5.10. 2011	9,383	5,37
EIB 6,50/15	109,83	0,54	110,37	6,50	17. 4. 2015	12,917	5,42
SD 6,95/16	114,50	2,14	116,64	6,95	26. 1. 2016	13,692	5,42

Cílem bude nalézt takové hodnoty parametrů, aby kvadratická odchylka skutečné a modelované ceny byla minimální:

$$\sum_{k=1}^N P_k - \sum_{k=1}^N \frac{C_{t_k}}{(1 + r(t_k))^{t_k}} \quad \min, \quad (1)$$

kde druhá suma probíhá všechny časové okamžiky, kdy dluhopis vyplácí platbu (kupón, jmenovitá hodnota), je platba k -tého dluhopisu v čase t_k za , je tržní hodnota dluhopisu

9 Ve skutečnosti jsme při testování různých parametrických forem narazili na více funkcí, které „uspěly“ podobně dobře jako tři funkce, které prezentujeme v této části. Jednou z nich byla rovněž rozšířená Nelson-Siegelova funkce, kterou využijeme v příští části tohoto textu.

10 Kupónové platby jsou roční, probíhají každý rok vždy ve stejný datum (den, měsíc) jako je doba splatnosti. A končí v době splatnosti (viz tabulka 1). Za t_k budeme dosazovat čas v letech, který uplyne od okamžiku měření 17. 5. 2002 do doby příslušné platby.

(kótovaná cena+AÚV, viz tab.1) a N je počet dluhopisů. Za budeme postupně dosazovat funkce A,B,C.

Pokud použijeme spojitě úročení bude mít úloha následující tvar

$$\min_{t_k} \sum_{k=1}^N P_k \exp(-r(t_k) t_k) C_{t_k} \quad (2)$$

Pro výpočet byl použit programovací jazyk MATLAB, speciálně minimalizační program *fmincon* pro nalezení minima funkce s omezujícími podmínkami. Program *fmincon* používá Nelder-Meadova simplexového algoritmu pro řešení nelineárních optimalizačních úloh.

Tabulka 2

Odhadnuté diskontované úrokové míry (výnosnost v %)

Rok	Funkce A	Funkce B	Funkce C
1	4,0292	4,1498	4,1130
2	4,2704	4,3019	4,3365
3	4,4894	4,4700	4,5214
4	4,6867	4,6454	4,6892
5	4,8626	4,8203	4,8441
6	5,0176	4,9880	4,9855
7	5,1522	5,1426	5,1001
Průměrná odchylka cen ¹¹	0,0741	0,0676	0,0446

Vidíme, že podle tohoto kritéria dává nejlepší odhad funkce C. Na druhé straně je tato funkce velmi citlivá na počáteční podmínky algoritmu a na toleranční hodnotu

Z tabulky 2 můžeme vidět, že rozdíly mezi jednotlivými prezentovanými funkcemi jsou velmi malé. Větší rozdíly můžeme pozorovat pouze na nejkratším konci výnosové křivky. Podle kritéria co nejmenší průměrné cenové odchylky odhadnutých cen dluhopisů od skutečných cen je nejhodnější funkce C. Je však nutno upozornit na skutečnost, že tato funkce byla velmi citlivá na počáteční podmínky a algoritmus často dával nesmyslné výsledky. Pro běžné použití lze vystačit s funkcí A, kde algoritmus pracoval spolehlivě.

5. Využití forwardové výnosové křivky – extrakce tržních očekávání

V třetí části tohoto textu jsme zmínili Nelson-Siegelovu metodu konstrukce forwardové výnosové křivky. V této části zaměříme naši pozornost na její rozšířenou verzi, která bývá často uváděna též jako Svenssonova metoda. Ve srovnání s Nelson-Siegelovou funkcí má o jeden člen navíc a umožňuje tak flexibilnější tvar výnosové křivky. Svenssonova metoda je využívána celou řadou centrálních bank (např. Sveriges Riksbank či Norges Bank).

¹¹ Průměrná odchylka cen je počítána jako odmocnina z minimalizační funkce vydělená počtem pozorovaných cen dluhopisů, tj. 14.

Naším hlavním cílem v této části bude aplikovat metodu na aktuálních datech českých vládních dluhopisů a ukázat, jak ji můžeme využít k extrakci tržních očekávání ohledně budoucího vývoje krátkodobých úrokových sazeb a tím i k extrakci očekávání ohledně budoucí měnové politiky prováděné ČNB. V předchozí části jsme při testování různých parametrických metod odhadovali diskontovanou výnosovou křivku. Pokud ovšem chceme využít výnosovou křivku k extrakci tržních očekávání je vhodnější odhadovat forwardovou křivku, konkrétně potom okamžitou forwardovou křivku (instantaneous forward rate curve). Dříve než přejdeme ke konkrétní formulaci Svenssonovy funkce, se pokusme ozřejmit, proč upřednostňujeme odhad forwardové křivky před křivkou spotovou. Skutečností je, že nám oba typy křivek poskytují určité informace ohledně budoucnosti. Hypotéza očekávání říká, že dlouhodobá úroková sazba je průměrem současné krátkodobé úrokové sazby a očekávaných budoucích krátkodobých úrokových sazeb. Z tohoto důvodu diskontovaná výnosová křivka, která zobrazuje diskontní úrokové sazby jako funkci různých dob splatnosti, v sobě nese určitou informaci o očekávaných budoucích krátkodobých sazbách. Předpokládejme na chvíli, že hypotéza očekávání skutečně platí. V takovém případě dlouhý konec diskontované výnosové křivky poskytuje informaci o očekávané průměrné výši budoucích krátkodobých sazeb. Značnou nevýhodou je, že se jedná pouze o očekávanou průměrnou výši krátkodobých úrokových sazeb, nebo taková informace nám mnoho neříká o trajektorii očekávaného vývoje krátkodobých úrokových sazeb. Chceme-li namísto očekávané průměrné výše krátkodobých úrokových sazeb znát trajektorii očekávaných krátkodobých úrokových sazeb, musíme sestrojít forwardovou křivku. Ta zobrazuje požadované forwardové sazby jako funkce různých dob vypořádání. Předmětem našeho zájmu pak bude okamžitá forwardová křivka, která může být chápána jako aproximace vývoje nejkratšího konce výnosové křivky a tudíž jako aproximace očekávané trajektorie základní úrokové sazby v ekonomice určené centrální bankou. V českých podmínkách se jedná o dvou týdenní repo sazbu. Okamžitá forwardová křivka tedy může být chápána jako indikátor tržních očekávání budoucí měnové politiky centrální banky, což následně představuje užitečnou informaci jak pro samotnou centrální banku, tak pro ostatní účastníky trhu.

V předchozím odstavci jsme poskytli ekonomickou interpretaci okamžité forwardové křivky, ale uvedená interpretace byla podmíněna tím, že jsme učinili velmi silný předpoklad o platnosti hypotézy očekávání. Bohužel celá řada empirických studií ukázala, že tato hypotéza ve své čisté formě neplatí, a že různé typy premií způsobují rozdílnost mezi forwardovými sazbami a očekávanými budoucími spotovými úrokovými sazbami. Forwardové sazby by v zásadě měly zahrnovat prémii za dobu splatnosti (často též označovaná jako termínová premie), kreditní riziko a likviditu. Náš odhad okamžité forwardové křivky bude vycházet z pozorovaných cen českých vládních dluhopisů, a proto můžeme premii za likviditu považovat za zanedbatelnou. Abychom si věci ulehčili ještě více, budeme považovat za zanedbatelnou i termínovou premii a premii za kreditní riziko. Z tohoto důvodu je potřeba při interpretaci forwardové křivky jistě opatrnosti. Měli bychom mít vždy na paměti, že tyto premie mohou v určitých obdobích nabývat významných hodnot.

Nyní můžeme přejít k zápisu Svenssonovi funkce pro okamžitou forwardovou sazbu, f . Ta může být zapsána takto:

$$f(m) = \theta_0 + \theta_1 e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \theta_2 \frac{m}{\tau_1} e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \theta_3 \frac{m}{\tau_2} e^{-\frac{m}{\tau_2}}, \quad (3)$$

kde

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \tau_1, \tau_2$ jsou parametry, které je potřeba odhadnout (θ_0, θ_1 a θ_2 musí být pozitivní) a m značí dobu do vypořádání.

Pokud používáme spojitě úročení, tak lze ukázat¹², že musí mezi okamžitou forwardovou sazbou a diskontní úrokovou sazbou platit následující vztah:

$$r(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, \quad (4)$$

kde

$r(t)$ označuje diskontní úrokovou sazbu na období t a $f(s)$ značí okamžitou forwardovou sazbu.

Využijeme-li rovnice (3) a (4), můžeme zapsat odpovídající rovnici pro diskontní úrokové sazby jako:

$$r(t) = \theta_0 + \theta_1 \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} + \theta_2 \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \theta_3 \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\frac{t}{\tau_2}} e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (5)$$

kde jsme pouze pozměnili m označující dobu do vypořádání za t označující dobu do splatnosti.

Nyní jsme již připraveni aplikovat dříve popsanou techniku pro odhadování výnosové křivky na kuponové dluhopisy vydané českou vládou. Jejich doby splatnosti se budou pohybovat od méně než jednoho roku k více než deseti rokům. Odhadnutou okamžitou forwardovou křivku následně budeme interpretovat. Celkem budeme vycházet z pozorovaných cen dluhopisů ke dvěma různým datům. To nám umožní sledovat, jak se během uvažované časové periody pozměnily tržní očekávání budoucí měnové politiky. Tabulky 3 a 4 shrnují údaje, které jsme pro odhad forwardové křivky použili.

První sloupec udává titul vládního dluhopisu. Druhý a třetí sloupec udává nákupní a prodejní ceny dluhopisů na 100 korun nominální hodnoty dluhopisů. Čtvrtý sloupec poskytuje údaje o modifikované duraci dluhopisů, pátý sloupec roční kupónovou platbu na 100 korun nominální hodnoty dluhopisů a šestý sloupec ukazuje dobu splatnosti dluhopisů. Konečně sedmý sloupec udává výši alikvotního úrokového výnosu.

Tabulky 3 a 4 poskytují dostatečné údaje k tomu, abychom mohli odhadnout forwardovou křivku. Vstupní údaje, které z daných tabulek využijeme jsou ceny, kupóny, doby

12 Málek, J. Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty. Praha : Ekopress, 2005.

do splatnosti a durace. Ceny použité při odhadu jsou počítané jako aritmetické průměry nákupních a prodejních cen, ke kterým jsou připočteny příslušné alikvotní úrokové výnosy.

Tabulka 3
České vládní dluhopisy, 15. května 2006

Titul	P bid	P offer	Durace	Kupón	Splatnost	AI
SDB5.70/06	101,35	101,65	0,43	5,70	26.10.2006	319,83
SDB6.30/07	103,20	103,50	0,81	6,30	17.3.2007	106,75
SDB2.90/08	100,05	100,35	1,76	2,90	17.3.2008	49,14
SDB2.30/08	98,30	98,60	2,22	2,30	26.9.2008	148,22
SDB3.80/09	101,90	102,20	2,66	3,80	22.3.2009	59,11
SDB6.40/10	111,05	111,35	3,47	6,40	14.4.2010	60,44
SDB3.70/13	99,50	99,80	5,92	3,70	16.6.2013	-28,78
SDB6.95/16	123,65	123,95	7,22	6,95	26.1.2016	216,22
SDB4.60/18	104,60	104,90	9,03	4,60	18.8.2018	345,00

Tabulka 4
České vládní dluhopisy, 25. července 2006

Titul	P bid	P offer	Durace	Kupón	Splatnost	AI
SDB5.70/06	100,70	100,90	0,24	5,70	26.10.2006	430,67
SDB6.30/07	102,35	102,55	0,62	6,30	17.3.2007	229,25
SDB2.90/08	99,60	99,80	1,56	2,90	17.3.2008	105,53
SDB2.30/08	97,80	98,10	2,03	2,30	26.9.2008	192,94
SDB3.80/09	101,05	101,35	2,46	3,80	22.3.2009	133,00
SDB6.40/10	109,80	110,10	3,27	6,40	14.4.2010	184,89
SDB3.70/13	98,60	98,90	5,94	3,70	16.6.2013	43,17
SDB6.95/16	122,70	123,00	7,02	6,95	26.1.2016	351,36
SDB4.60/18	103,70	104,00	8,82	4,60	18.8.2018	-25,56

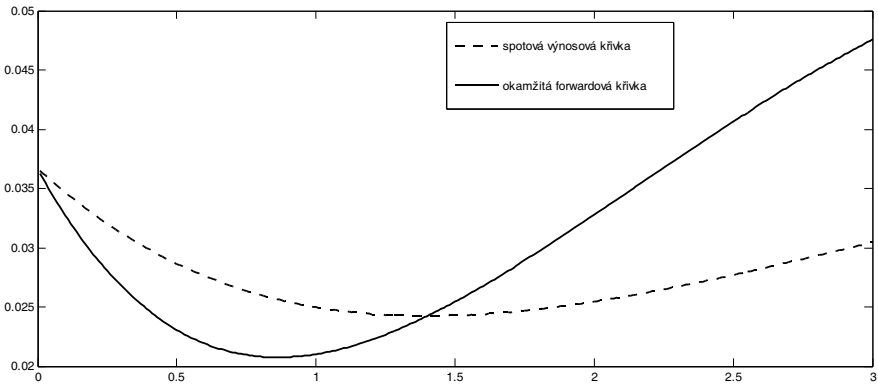
Při odhadu parametrů Svenssonovy funkce využíváme rovnice (2). Odhadnuté ceny dluhopisů mohou být „fitovány“ ke skutečným cenám pomocí metody nelineárních nejmenších čtverců, zobecněné metody momentů nebo pomocí maximální věrohodnosti. My jsme použili metodu nelineárních nejmenších čtverců (konkrétně příkaz Maltabu lsqnonlin).

Obrázek 4 ukazuje odhadnutou okamžitou forwardovou křivku a diskontní výnosovou křivku k 15. květnu 2006.

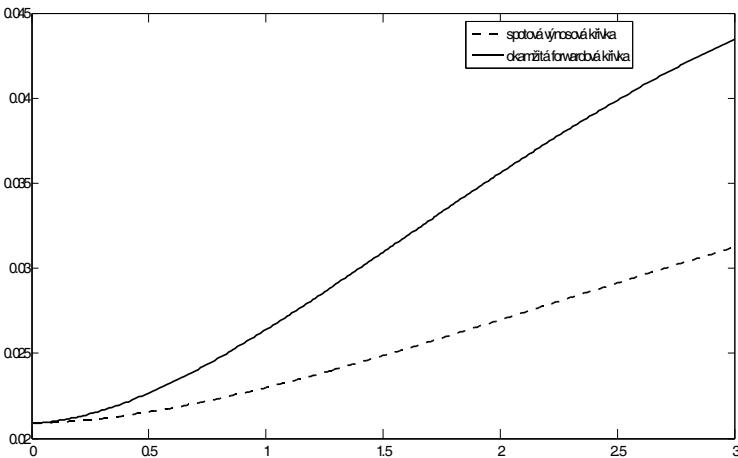
Již na první pohled se výsledek nejeví jako příliš uspokojivý. Repo sazba stanovovaná ČNB byla 15. května 2006 2 %, což neodpovídá počáteční hodnotě odhadnuté forwardové křivky. Navíc trajektorie odhadnuté forwardové křivky během prvních šesti měsíců dramaticky klesá pod 2 % a teprve poté dochází k jejímu postupnému nárůstu. To by indikovalo očekávání o brzkém poklesu repo sazby a teprve poté o jejím následném růstu. Takový výsledek je očividně nerealistický. Problém, že odhadnutá forwardová křivka, zejména pro blízké doby vypořádání, se nezdá být realistická je mj. způsobu

ben skutečností, že při odhadu používáme pouze velmi málo dluhopisů s brzkou dobou splatnosti. Jedním ze způsobů, jak můžeme tento problém překonat je, že při odhadu parametrů „vážíme“ odchylky skutečných a odhadnutých cen převrácenou hodnotou modifikovaných durací. Takto upravený odhad okamžité forwardové křivky zobrazuje obrázek 5.

Obrázek 4
**Odhadnutá spotová výnosová křivka a okamžitá forwardová křivka
 15. května 2006 (bez úpravy o duraci)**



Obrázek 5
**Odhadnutá spotová výnosová křivka a okamžitá forwardová křivka
 15. května 2006 (s úpravou o duraci)**



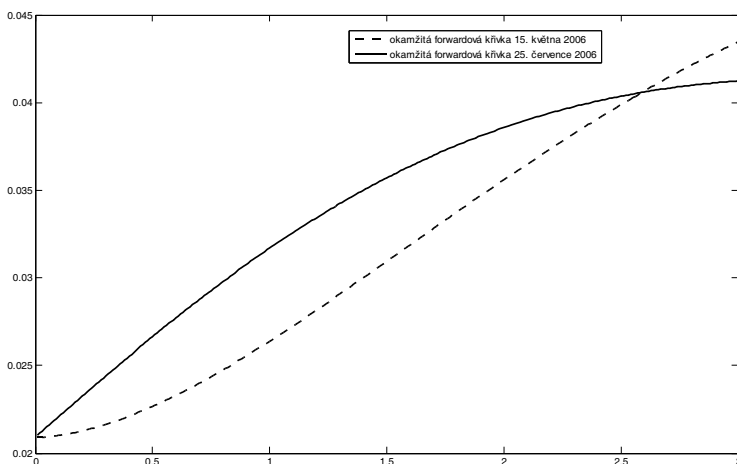
Na obrázku 5 můžeme vidět, že počáteční hodnota okamžité forwardové křivky je nyní velmi blízko 2% hodnotě repo sazby. Zároveň je okamžitá forwardová křivka pozvolně rostoucí, což v rámci námi přijatého předpokladu o zanedbatelné výši rizikových premií můžeme interpretovat jako očekávání trhu, že ČNB bude postupně zvyšovat

vat úrokové sazby. Odhadnutý průběh okamžité forwardové křivky je v souladu s očekáváním finančních analytiků, které monitoruje ČNB¹³. Můžeme tedy říci, že odhadnutou forwardovou křivku lze považovat za realistický odhad. Samozřejmě je potřeba zdůraznit, že odhadnutá forwardová křivka pouze aproximuje očekávání budoucí měnové politiky. Je tomu tak z důvodů, že okamžitá forwardová křivka pouze aproximuje budoucí vývoj 2-týdenní repo sazby a zároveň riziková prémie může v určitých obdobích nabývat významných hodnot.

Závěrečný obrázek 6, který v této části představíme porovnává odhadnutou forwardovou křivku z 15. května 2006 a z 25. července 2006.

Obrázek 6

Porovnání okamžité forwardové křivky 15. května a 25. července 2006 (s úpravou o duraci)



Obrázek 6 nám poskytuje zajímavý pohled. Můžeme na něm pozorovat posun očekávání ohledně budoucího vývoje měnové politiky, ke kterému došlo mezi 15. květnem a 25. červencem 2006. Forwardová křivka z 25. července 2006 je mnohem strmější než forwardová křivka z 15. května 2006. Jinými slovy to znamená, že se účastníci trhu v tomto časovém rozmezí stali více „jestřábími“. Tak např. repo sazba očekávaná k 25. červenci 2007 je podle odhadu forwardové křivky z 25. července 2006 téměř 3,25 % zatímco podle odhadu forwardové křivky z 15. května 2006 je blízko 2,75 %¹⁴. Takováto změna v tržních očekáváním ohledně budoucího vývoje repo sazby se na jednu stranu zdá být poměrně výrazná, na druhou stranu se ovšem opět zdá, že to odpovídá realitě. Pokud tuto změnu opět porovnáme s měřením tržních očekávání pomocí dotazníků

13 ČNB monitoruje očekávání pomocí pravidelného měsíčního dotazníku Měření inflačních očekávání finančního trhu. V tom jsou finanční analytici dotazováni na jejich očekávání ohledně budoucího vývoje vybraných makroekonomických veličin. Více informací k uvedenému dotazníku lze nalézt na webových stránkách ČNB.

14 Mějme na paměti, že 25. července 2007 představuje při odhadu výnosové křivky k 15. květnu 2006 téměř 1,2 roků do splatnosti, resp. vypořádání.

ČNB, je zřejmé, že změna očekávaného vývoje 2-týdenní repo sazby je v obou případech podobná. Určité odlišnosti, které stojí za zmínku, však můžeme pozorovat. Zejména se jedná o skutečnost, že posun k více „jestřábím“ očekáváním je v našem odhadu výraznější než naznačuje dotazník ČNB. Důvodů k tomu může být několik. Jedním z nich může být skutečnost, že v období mezi květnem a červencem 2006 došlo ke zvýšení rizikové prémie. Narůst rizikové prémie by se nepříznivě promítl do našeho odhadu, ale nepromítl by se do dotazníkového měření ČNB. Jiným důvodem může být skutečnost, že naše metoda měří očekávání všech účastníků dluhopisového trhu, zatímco metoda ČNB zahrnuje očekávání pouze několika finančních analytiků. A konečně dalším z možných důvodů může být skutečnost, že časové periody ve kterých došlo ke změně tržních očekávání se ne zcela překrývají. Zatímco v našem odhadu se jedná o změnu očekávání zaznamenanou mezi 15. květnem a 25. červencem 2006, tak v dotaznících ČNB se jedná o změnu mezi 11. květnem a 12. červencem 2006. Především nesoulad v červenci mohl vést k uvedenému rozdílu. Mezi 12. a 25. červencem totiž došlo k některým událostem, které mohly vést k posunu sentimentu k výraznějšímu zvyšování úrokových sazeb. Mezi tyto události můžeme počítat některá vyjádření členů bankovní rady ČNB nebo také červnová čísla o růstu spotřebitelských cen.

Závěrem této části textu můžeme říci, že odhad okamžité forwardové křivky založený na Svenssonově metodě upravený o modifikovanou duraci funguje v českých podmínkách poměrně dobře. Zdá se, že odhadnuté forwardové křivky lze úspěšně využít k extrakci tržních očekávání budoucího vývoje krátkodobých úrokových sazeb.

6. Závěr

Časová struktura úrokových měř bývá reprezentována výnosovými křivkami. V tomto textu jsme se zabývali konstrukcí výnosových křivek v České republice s využitím pozorovaných cen vládních kupónových dluhopisů. Celkově můžeme při konstrukci výnosové křivky vyjít z několika různých přístupů. Uvedli jsme tři základní přístupy. První, teoreticky nejpřitažlivější řešení, je využití metody bootstrapping. Ta však na českém trhu naráží na nedostatečné množství obchodovaných vládních dluhopisů a současně je spojena s problémem, že obchodované dluhopisy v průběhu roku nevyplácejí kupónové platby ke stejným datům. Tyto překážky činí metodu bootstrapping pro konstrukci výnosové křivky v realitě nepoužitelnou. Druhým stručně zmíněným přístupem je konstrukce výnosových křivek pomocí splinů. Největší pozornost byla věnována třetímu možnému přístupu, a sice konstrukci výnosových křivek pomocí parametrických funkcí. Ty jsou založeny na popisu výnosové křivky pomocí nějaké vhodně zvolené parametrické funkce, jejíž parametry jsou odhadovány minimalizací sumy čtverců rozdílů teoretických a skutečných cen dluhopisů. Ukázali jsme, že parametrické funkce zejména polynomů vyššího stupně bývají velmi citlivé na velmi malé změny úrokových sazeb a dávají nepřijatelné výsledky. Dále jsme testovali několik parametrických funkcí a prezentovali tři, které vedly k nejlepším výsledkům. Došli jsme k závěru, že všechny tři uvedené funkce lze pro konstrukci výnosových křivek bez větších problémů použít. Pouze na nejkratším konci výnosové křivky poskytovaly tyto tři funkce odlišné výsledky. V závěrečné části jsme použili Svenssonovu funkci pro odhad okamžité forwardové

křivky na českém trhu. Poté co jsme poskytli její ekonomickou interpretaci jsme prezentovali výsledky odhadnutých křivek. Došli jsme k závěru, že odhadnuté okamžité forwardové křivky založené na Svenssonově funkci upravené o modifikovanou duraci v českých podmínkách fungují poměrně dobře, a že je lze zdárně využít k extrakci tržních očekávání budoucího vývoje krátkodobých úrokových sazeb a tím i k extrakci očekávání ohledně budoucí měnové politiky ČNB. Poměrně dobře se nám rovněž podařilo zachytit změnu v tržních očekáváních.

Dodatek

Spotové a forwardové úrokové míry

Předpokládejme, že máme zadaný systém cen zero bondů $P(t, T)$ pro každou dobu splatnosti $0 \leq t < T$. Bez újmy na obecnosti předpokládáme u všech bondů jmenovitou hodnotu rovnou 1.

Úroková míra $R(t, T)$ na dobu od t do T je definována jako míra výnosnosti do doby splatnosti T . Tedy

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T R(t, s) ds},$$

kde $P(t, T)$ je cena zero-bondu v čase t . Odtud snadno dostáváme

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log \frac{P(t, T)}{P(t, t)}.$$

Okamžitá spotová úroková míra je definována jako

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$$

Forwardová úroková míra $f(t, T_1, T_2)$ v čase t na dobu od T_1 do T_2 , $T_2 > T_1$ je definována (při použití spojitého úročení) na základě vztahu

$$e^{-\int_t^{T_2} R(t, s) ds} = e^{-\int_t^{T_1} R(t, s) ds} e^{-\int_{T_1}^{T_2} f(t, T_1, T_2, s) ds}.$$

Levá strana udává hodnotu jednotkového vkladu uloženého spotově na dobu do T_2 , pravá strana uložení spotem na dobu T_1 a následně forwardem od T_1 do T_2 . Aby se zabránilo arbitrážním možnostem, musí se obě strany rovnat.

Okamžitá forwardová úroková míra $f(t, T)$ je definována jako

$$f(t, T) = \lim_{T_1 \rightarrow T} f(t, T_1, T).$$

Lze ukázat, že platí (viz Málek 2005)

$$f(t, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, t)} \frac{-\log P(t, T)}{T-t}.$$

Dále platí pro cenu zero bondu

$$P(t, T) = \exp \left(-\int_t^T f(t, s) ds \right)$$

a pro spotovou úrokovou míru

$$R(t) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(s) ds.$$

Z předchozích úvah plyne důležitý závěr:

Znalosti cen zero bondů $P(t, T)$, spotových úrokových měr $R(t)$ a okamžitých forwardových úrokových měr $f(t)$ jsou ekvivalentní.

Literatura

- BIS. 2005. Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation [BIS Papers, No. 25].
- BOLDER, D.; STRÉLISKI, D. 1999. Yield Curve Modelling at the Bank of Canada. *Technical Report*. 1999, no. 84.
- DIEBOLD, F. X.; CANLIN, L. 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*. 2006, no. 130, s. 337–364.
- HULL, J. 1999. *Options, Futures & other Derivatives*. 4th ed. Hertfordshire : Prentice Hall, 1999.
- JARROW, R. A. 2002. *Modeling Fixed-Income Securities and Interest Rate Options*. Stanford : Stanford University Press, 2002.
- KLOSTER, A. 2000. Estimating and Interpreting Interest Rate Expectations. *Economic Bulletin*. 2000, no. 3, Norges Bank.
- LEMKE, W. 2006. Term Structure Modeling and Estimation in a State Space Framework. *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*. 2006, vol. 565, Springer Verlag.
- MÁLEK, J. 2002. Comparison Bond Prices in Vasicek Models With and Without Jumps. In *Európské financie. Teória, politika a praxa* [CD-ROM]. Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, 2002.
- MÁLEK, J. 2005. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*. Praha : Ekopress, 2005.
- NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. 1987. Parsimonious Modelling of Yield Curves. *Journal of Business*. 1987, vol. 60, s. 473–89.
- RADOVÁ, J. 2002. The Cost Analysis of Corporate Financing Using Bonds Issues. In *Európské financie. Teória, politika a praxa* [CD-ROM]. Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, 2002.
- RADOVÁ, J.; DVOŘÁK, P.; MÁLEK, J. 2005. *Finanční matematika pro každého*. 5. vyd. Praha : Grada, 2005.
- SÖDERLIND, P.; SVENSSON, L. 1997. New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments. *Journal of Monetary Economics*. 1997, vol. 40, no. 2, s. 373–429.
- SVENSSON, L. 1993. Term, Inflation, and Foreign Exchange Risk Premia: A Unified Treatment [Working Paper, no. 4544]. NBER, 1993.
- SVENSSON, L. 1994. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994 [Working Paper, no. 4871]. NBER, 1994.
- SVERIGES RIKSBANK 2006. *Inflation Report*. 2006, no. 1.
- ŠTĚRBA, F. 2006. Estimation and Interpretation of Instantaneous Forward Rate Curve – Czech Case. *E+M Ekonomie a Management*. 2006, no. 4, s. 104–111.

YIELD CURVE CONSTRUCTION USING GOVERNMENT BONDS IN THE CZECH REPUBLIC

Jiří Málek, Jarmila Radová, Filip Štěrba, University of Economics,
nám. W. Churchilla 4, CZ – 130 67 Praha 3 (malek@vse.cz)

Abstract

The paper deals with yield curve construction methods using coupon bonds in Czech bond market. Generally, there are more possibilities how to approach this problem: bootstrapping, splines, parametric functions. Due to the lack of tradable public bonds and due to the fact that existing bonds do not pay coupons at the same date of the year, traditional bootstrapping method could not be applied under Czech market conditions. It seemed appropriate to use parametrical solutions to the yield curve issue and minimise the sum of squares of differences between market and theoretical prices. There were presented three function types which arrived to similar results in the paper. The authors also used Svensson parametric function to demonstrate the possible use of parametric yield curve construction. It was shown that, after duration adjustment, it can indicate shift in market expectations regarding future short term interest rate moves, and thus regarding future monetary policy, pretty well.

Keywords

term structure of interest rates, yield curve, government bonds, Czech Republic, estimation of parametric functions, market expectations

JEL Classification

G10, G12, C61, C63