POSOUZENÍ VYBRANÝCH MOŽNOSTÍ ZEFEKTIVNĚNÍ SIMULACE MONTE CARLO PŘI OPČNÍM OCEŇOVÁNÍ

Tomáš Tichý, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava*

1. Úvod

Finanční deriváty představují významný prvek moderních finančních trhů. Zejména jejich prostřednictvím je možné vysoce efektivním způsobem redistribuovat různé druhy finančního rizika mezi jednotlivé účastníky trhu. Zde hrají velmi důležitou roli opce – finanční deriváty nelineárního typu, tedy aktiva s nesymetrickým rozložením práv a povinností mezi strany kontraktu. Právě opce umožňují přenést pouze tu část rizika, které se daný subjekt chce vzdát či kterou chce naopak získat. Jsou tak nedílnou součástí tzv. *risk managementu* neboli řízení rizik.

Řízení finančních rizik je nezbytné jak pro finanční instituce jako jsou banky, pojiš ovny nebo investiční společnosti, tak pro nefinanční instituce, jejichž základním posláním je výroba či poskytování služeb. Nefinančním institucím umožňuje efektivní řízení finančního rizika uvolnit finanční i lidské kapacity a plně je soustředit na provozování činností, pro které byly založeny. Obdobně vhodné využití finančních derivátů umožňuje finančním institucím omezit riziko nedostatku kapitálu a souvisejících problémů s likviditou, které mohou vést k úpadku.

Efektivní využívání finančních derivátů v ekonomice je podmíněno jak dostatečnými znalostmi ohledně charakteru podkladového procesu aktiva a tedy modelování jeho budoucího vývoje, tak dostupností rychlých a spolehlivých metod oceňování.

V souvislosti s rostoucí volatilitou a vzájemnou provázaností dílčích segmentů finančních trhů roste potřeba existence modelu, který by umožnil efektivní a jednoznačné modelování vývoje primárních finančních veličin a zároveň by jeho vyjádření bylo dostatečně srozumitelné. Klasickým a až do nedávné doby pravděpodobně nejvíce užívaným modelem pro popis vývoje cen finančních aktiv byl geometrický Brownův pohyb (GBM) založený na normálním charakteru pravděpodobnostního rozdělení výnosů. Ačkoliv již dlouho bylo známo, že je uvedený předpoklad příliš silný (viz například Fama, 1965), až teprve v souvislosti s postupem globalizace a celkovým vývojem finančních trhů koncem 20. století přestal tento model vyhovovat. Do té doby se totiž zdál postačující přístup tzv. *implied volatility* – viz například Macbeth a Merville (1979) ohledně základních zjištění o implikované volatilitě nebo Rubinstein (1985) či (1994) ohledně aplikace při oceňování opcí.

Jako zajímavé alternativy se ukázaly zejména modely z obecné skupiny Lévyho procesů, které umožňují modelovat i vyšší momenty pravděpodobnostního rozdělení vý-

* Významná část tohoto příspěvku vznikla v rámci projektu České Grantové Agentury, GAČR: 402/08/1237.

nosů (šikmost a špičatost), zpravidla prostřednictvím nekonečné intenzity skoků a případně se tak zcela obejít bez difúzní složky. V rámci ekonomických interpretací některých Lévyho modelů (VG model, NIG model), blíže viz Cont a Tankov (2004), právě skoky modelované určitým vnitřním subordinátorem představují ekonomickou intenzitu, tedy příchod nových informací s významným vlivem na cenu aktiva. Nevýhodou těchto moderních modelů je jejich složitost a nedostatečné prozkoumání efektivních postupů souvisejícího modelování a oceňování.

Obecně lze přírůstek ceny finančního aktiva vyjádřit prostřednictvím stochastické diferenciální rovnice. Cenu odvozeného derivátu lze následně za předpokladu nemožnosti arbitráže a na základě replikačního portfolia formulovat prostřednictvím příslušných parciálních diferenciálních rovnic.

Problémem zmiňovaných Lévyho modelů je jednak více zdrojů nejistoty, a tedy problematické vytvoření replikačního portfolia, dále pak obtížná řešitelnost formulovaných rovnic. I v případě nejjednodušších problémů (evropská call opce) je zpravidla nutná aplikace pokročilých metod matematické analýzy.

Alternativním postupem, jak určit teoreticky správnou cenu opce, je simulace Monte Carlo. Tato metoda, poprvé uvedená za účelem určení ceny opce Boylem (1977), umožňuje relativně snadné určení ceny i v případě komplexních výplatních funkcí evropských opcí. Jelikož metoda Monte Carlo v základním vyjádření vyžaduje realizaci velkého množství nezávislých scénářů, byly postupem času v různých vědeckých disciplínách nabídnuty mnohé postupy s cílem snížit předpokládanou chybu odhadu, a tedy i nutný počet realizovaných scénářů, a časovou náročnost.

Cílem této práce je aplikovat, ověřit a posoudit efektivnost vybraných postupů simulace Monte Carlo při odhadu ceny evropské call opce jak v klasickém prostředí určeném BS modelem (geometrický Brownův pohyb, Black a Scholes, 1973), tak v prostředí komplexních procesů zohledňujících šikmost a špičatost podkladových výnosů – konkrétně budeme pracovat s VG modelem (*variance gamma model*, v symetrické podobě definován v Madan a Seneta (1990) a dále rozšířen pro případ asymetrie výnosů v Madan a Milne (1991) a Madan et al. (1998)) a NIG modelem (*normal inverse Gaussian model*, Barndorff-Nielsen, 1995). Evropská call opce byla zvolena proto, že je známa analytická formule pro určení její hodnoty – je tak usnadněno vyhodnocení studovaných postupů.

V úvodních kapitolách článku jsou prezentována základní východiska oceňovaní opcí a principy simulace Monte Carlo z pohledu opčního oceňování. Kapitola 4 je poté zaměřena na aplikaci a ověření vybraných postupů simulace Monte Carlo (MC) – přímé simulace (PMC), metody protikladných proměnných (AVMC) a metod stratifikovaného výběru (SSMC a LHSMC), včetně kombinace obou posledně jmenovaných postupů – při odhadu teoreticky správné ceny call opce v rámci BS modelu, VG modelu a NIG modelu.

2. Principy oceňování opcí

Hodnota opce je jednoznačně určena v okamžiku jejího uplatnění na základě stanovené výplatní funkce v závislosti na hodnotách podkladových faktorů *S*. Je nutné

rozlišovat evropské opce, které je možné uplatnit pouze v jednom okamžiku, označme jako T – doba zralosti, a opce americké, které lze uplatnit kdykoliv od vystavení.[1]

Obecně můžeme hodnotu opce v čase $t < T$ zapsat takto:

$$V_t \quad \exp[df \quad] \quad [\quad (S_T)]. \tag{1}$$

Zde V_t představuje cenu opce v čase t, označuje dobu do zralosti, $= T - t$, df určuje diskontní faktor a S_T je cena podkladového aktiva v době zralosti.

Klíčovým prvkem oceňování opcí je zvolení správného diskontního faktoru a identifikace náhodného procesu, s jehož pomocí lze modelovat vývoj podkladového aktiva. V naprosté většině případů dochází k oceňování opcí v rámci rizikově-neutrálního prostředí specifikovaného pravděpodobnostní mírou Q – diskontní faktor i očekávaný přírůstek rizikového aktiva jsou tedy určeny na základě bezrizikové sazby r. Pak:[2]

$$V_t \quad \exp[\quad r \quad] \quad {}^{Q}[\quad (S_T)] \tag{2}$$

a

$${}^{Q}[S_T] \quad \exp(r \quad) \; S_t. \tag{3}$$

Co se týče náhodného podkladového procesu, standardním předpokladem je, že výnosy mají normální pravděpodobnostní rozdělení. Vhodným prostředkem pro vyjádření dynamiky ceny podkladového aktiva ve velmi krátkém časovém úseku dt v rizikově neutrálním prostředí proto je následující stochastická diferenciální rovnice:

$$dS \quad r \; S \; dt \qquad S \; dW. \tag{4}$$

Takto vyjadřuje směrodatnou odchylku výnosů ceny aktiva a dW je Wienerův proces na bázi normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti, tj. $dW \quad \sqrt{dt}$ a $N[0,1]$. Za předpokladu, že je výnos aktiva připisován spojitě, a po zohlednění Itôovy lemy, lze na bázi (4) formulovat cenu aktiva v čase T takto:

$$S_T \quad S_t \quad \exp[(r \quad \frac{2}{2}) \qquad W \;], \tag{5}$$

kde $(\; {}^{2}/2)$ zajiš uje platnost (3).

Za účelem efektivnějšího vystižení vývoje podkladového aktiva (zohlednění šikmosti a špičatosti výnosů) je možné využít některý z Lévyho procesů. Nyní uvedeme exponenciální Lévyho model:

$$S_T \quad S_t \quad \exp[(r \quad) \qquad X \;], \tag{6}$$

1 V tomto článku se budeme zabývat pouze opcemi evropskými s nejjednodušší výplatní funkcí kupní (call) opce na jedno podkladové aktivum typu akcie bez dividendového výnosu.

2 Výraz ${}^{Q}[x]$ představuje očekávání učiněné na základě množiny rizikově neutrálních pravděpodobností Q ohledně náhodné veličiny x. Pro účely tohoto článku budeme předpokládat, že množina Q existuje a je jedinečná.

kde představuje kompenzační složku, exp[X], tedy opět je zaručena platnost (3), a X označuje Brownův pohyb řízený jiným Lévyho procesem $\ell(t)$ se střední hodnotou přírůstku a volatilitou :

$$X \quad \ell(\quad \sqrt{\ell(} \tag{7}$$

Složka $\ell(t)$ tak představuje tzv. subordinátor (vnitřní řídící proces).

Složku $\ell(t)$ je nutné zvolit takovým způsobem, aby její hodnota byla vždy pozitivní – jedná se o svého druhu vnitřní čas, který vyjadřuje ekonomickou aktivitu. Vhodným proto jsou prvky z gama rozdělení, což vede ve VG model, nebo inverzního Gaussova rozdělení, což vede v NIG model.[3]

Poté, co zvolíme vhodný model pro popis budoucího vývoje ceny podkladového aktiva, je možné se buď vrátit ke vztahu (2) nebo přikročit k formulaci hedgingového (replikačního) portfolia.

V prvém případě je operátor očekávání nahrazen integrací přes příslušnou pravděpodobnostní míru (na základě dané funkce hustoty). Oproti tomu ve druhém případě se dostáváme k formulaci parciální diferenciální rovnice, případně parciálních integro-diferenciálních rovnic (je-li například nutné vyjádřit kumulaci skoků).

2. Simulace Monte Carlo

Předpokládejme, že představuje určitý budoucí stav, je množina všech možných budoucích stavů, přičemž , a výplata v době zralosti je závislá právě na konkrétní hodnotě , ( ). Pak lze (2) vyjádřit jako integrál přes množinu všech budoucích stavů ,

$$V_t \quad e^{r} \quad \mathrm{E}^{Q}[\ (\ )] \quad e^{r} \qquad (\ )dQ. \tag{8}$$

Chceme-li získat odhad ceny opce , pak stačí zkonstruovat (nasimulovat) dostatečné množství relevantních budoucích stavů . Označme N jako množství nasimulovaných budoucích stavů neboli náhodných scénářů vývoje. Pak pro N platí, že

$$V_t \quad \hat{V}_t \quad e^{r} \quad \frac{1}{N} \quad {}^{N}_{i\ 1} \quad {}^{(Q)}(\ {}^{(i)}). \tag{9}$$

Zde ${}^{(Q)}(\ {}^{(i)})$ označuje výplatu opce v době zralosti v rámci rizikově neutrálního prostředí v závislosti na pro i–tý scénář vývoje.

Postup je proto následující. Pro každý scénář vývoje je nejdříve určena výplata opce v závislosti na hodnotách relevantních stavů při rizikově neutrálních očekáváních. Následujícím krokem je zprůměrňování všech budoucích hodnot výplatní funkce opce. Nakonec dochází k diskontování tohoto průměru bezrizikovou úrokovou sazbou r.

3 V obou případech lze komplexní Lévyho proces rovněž získat jako rozdíl dvou nezávislých prvků z gama rozdělení o odlišných parametrech (VG model), respektive vhodnou kombinací tří prvků z normovaného normálního rozdělení.

(Pořadí posledních dvou kroků lze převrátit.) Zjištěná hodnota odpovídá odhadnuté ceně opce.

Relevantním budoucím stavem je zde míněn každý stav, který může nějakým způsobem ovlivnit výplatu opce v době zralosti. V závislosti na tom, které faktory ovlivňují cenu opce, se bude jednat o budoucí vývoj ceny akcií, úrokových sazeb, měnových kurzů apod.

Je zřejmé, že v případě jednoduché plain vanilla opce evropského typu se jedná pouze a jen o cenu podkladového aktiva v době zralosti. Tedy $^{(i)}$ $S_T^{(i)}$. V tomto případě stavy (ceny) v průběhu životnosti konečnou výplatu a tedy ani cenu opce neovlivňují. Znatelně odlišná je situace v případě opcí typu PD – tj. opcí, jejichž výplata závisí na cestě sledované cenou podkladového aktiva po dobu životnosti opce. Zde je nutné simulovat (zjistit) celou relevantní cestu ceny podkladového aktiva v čase.

Odhad ceny opce dle (9) při aplikaci přímé simulace Monte Carlo (PMC) bude možné považovat za dostatečně přesný pouze pro velmi vysoká N – v řádu stovek tisíc nezávislých pokusů. Zároveň je nutné mít na zřeteli, že s rostoucím N roste i časová náročnost simulace a určení (odhad) ceny opce se stává nákladnějším. Právě z toho důvodu byly vyvinuty mnohé techniky, zaměřené na snížení potřebného počtu náhodných scénářů nutných k dosažení stanovené chyby odhadu. Tyto techniky jsou obecně označovány jako **metody snižování rozptylu** (*variance reduction techniques*).

Základní přehled metod, které umožňují zlepšit efektivnost simulace MC, uvádí například Hull (2005). Problematika je detailněji rozpracována zejména Glassermanem (2004), případně McLeishem (2005).

Z teoretického i aplikačního hlediska nejjednodušší technikou pro snížení rozptylu je **metoda protikladných proměnných** (AVM, *antithetic variates method*), v souvislosti s oceňováním opcí poprvé uvedená Boylem (1977). Ta vychází ze skutečnosti, že jestliže náhodný prvek $\sim$ $N[0;1]$, pak rovněž musí $\sim$ $N[0;1]$, přičemž dokonale negativní závislost mezi oběma prvky (korelace $= -1$) výrazně omezuje chybu odhadu.

Aplikace této techniky je jednoduchá. Předpokládejme, že je třeba získat vektor náhodných čísel z normovaného normálního rozdělení o N prvcích, přičemž je vhodné, aby N bylo sudé. Nejdříve získáme daným algoritmem vektor o M náhodných prvcích, $\vec{\mathrm{M}}$ $\{\sim_1,\ldots,\sim_i,\ldots,\sim_M\}$, kde $\sim$ $N[0;1]$ a $M = N/2$ Potřebný vektor o N prvcích pak vytvoříme sjednocením vektorů $\vec{\mathrm{M}}$ a $-\vec{\mathrm{M}}$, tj.

$$\vec{\mathrm{N}} = \vec{\mathrm{M}} \quad \vec{\mathrm{M}} \quad \{\sim_1,\ldots,\sim_i,\ldots,\sim_M,\ \sim_1,\ldots\ \sim_i\ldots,\ \sim_M\}. \tag{10}$$

Přínos metody AVM se projevuje ve dvou směrech. Jednak dochází k výrazné časové úspoře – vynásobení původního vektoru číslem mínus jedna je zpravidla znatelně rychlejší, než generování nové řady čísel. Druhou větví, ve které se projevují pozitiva tohoto přístupu, je symetričnost pravděpodobnostního rozdělení vygenerovaných hodnot. Pro všechny přípustné prvky bezpochyby platí, že $(\sim_i \quad \sim_i)/2 \quad 0$. Množina vygenerovaných náhodných čísel proto bude zcela jistě splňovat požadavek nulové střední hodnoty a taktéž šikmost by měla být nulová. Nevýhodou této metody může být skutečnost, že ji lze aplikovat pouze při generování náhodných prvků ze symetrických rozdělení (včetně rovnoměrných).

Alternativně lze sice generovat nejprve prvky z rovnoměrného rozdělení R [0,1] a následně aplikací procedury inverzní transformace získat náhodné prvky $\tilde{x}$ splňující charakteristiky požadovaného pravděpodobnostního rozdělení X, tj.

$$\tilde{x} \quad F_X^{\ 1}(\tilde{u}), \quad \tilde{u} \quad R[0,1], \qquad ()$$

kde $F_X^{\ 1}$ představuje inverzní funkci k distribuční funkci požadovaného rozdělení X, časová náročnost však takto silně roste.

Další metoda snižování rozptylu generované náhodné složky je založena na **sladění momentů** (MM, *moment matching*) zvoleného řádu. Nutným požadavkem je znalost očekávané (tj. „správné“) hodnoty. Základní aplikace metody sladění momentů prezentovali Barraquand (1995), Boyle et al. (1997) nebo Duan a Simonato (1998). Na obdobné bázi jako metoda sladění momentů je založena i metoda **řídící proměnné** (CVM, *control variate method*), viz Boyle (1977). Její aplikace je však více zaměřena na řešení konkrétních problémů, jako je například určení ceny asijských opcí s geometricky stanoveným průměrem v závislosti na průměru zjištěném aritmeticky (Kemna a Vorst, 1990).

K vysoce efektivním, i když oproti metodě AVM složitějším postupům, patří metoda **stratifikovaného výběru** (SS, *stratified sampling*). Tato metoda umožňuje generovat „náhodná“ čísla s takřka požadovanou charakteristikou i pro velmi nízká N. Další předností je možnost využití i pro jiná než symetrická rozdělení.

V zásadě existují dva přístupy, jak tuto metodu aplikovat. První přístup spočívá v rozčlenění intervalu přípustných hodnot na M subintervalů (*stratas*) přímo takovým způsobem, že pravděpodobnost příslušnosti (výskytu) náhodného čísla bude stejná pro všechny intervaly. Tedy, uvažujeme-li náhodné číslo $\tilde{\ } \quad N[0;1]$, pak $\tilde{\ } \quad (\quad ; \quad)$. Tento interval hodnot následně rozčleníme na M subintervalů takovým způsobem, že

$$\Pr\{\tilde{\ } \quad (\ _i ; \ _{i\ 1})\} \quad p_i, \ p_i \quad \frac{1}{M}, \ i \quad 1,\ldots M, \quad _1 \qquad , \quad _{M\ 1} \qquad ,$$

Z těchto intervalů jsou poté generována požadovaná náhodná čísla. Děje se tak s využitím náhodných prvků $\tilde{u}$ z rovnoměrného rozdělení, $\tilde{u} \quad R[0,1]$,. Tedy,

$$\tilde{\ } \quad _i \quad \tilde{u} \ (\ _{i\ 1} \quad _i). \qquad (12)$$

Přitom lze stanovit, aby do každého z intervalů náležel jeden či více náhodných prvků. Jestliže $M = N$, pak počet subintervalů odpovídá požadovanému počtu náhodných prvků, tj. z každého z nich je vybrán právě jeden prvek. Oproti tomu, řekněme, že $M = N/5$. V takovémto případě musí být z každého subintervalu vybráno právě 5 náhodných prvků.

Nevýhodou je nutnost výpočetních procedur s plus či mínus nekonečnem (tj. krajní subintervaly). Proto se může ukázat jako vhodnější přejít k nepřímé metodě, využívající inverzní funkci k distribuční funkci daného rozdělení. U nepřímé metody stratifikovaného výběru jsou nejprve stratifikována náhodná čísla z rovnoměrného rozdělení, $\tilde{u} \quad R[0,1]$. Tedy, prvním krokem je rozdělení jednotkového intervalu na subintervaly s rovnocennými pravděpodobnostmi. Následuje generování rovnoměrně rozdělených náhodných čísel z jednotlivých subintervalů, $\tilde{u}_i \quad \frac{i \ 1}{M} \quad \frac{\tilde{u}}{M}$. Konečným krokem je

provedení inverzní transformace cíleného pravděpodobnostního rozdělení dle (11), v našem případě normovaného normálního, $F_N^{\ 1}(\tilde{u}_i)$.

Postupem, který dále rozpracovává metodu stratifikovaného výběru, je metoda **LHS** (*Latin hypercube sampling*) poprvé uvedená v McKay et al. (1979) a dále analyzovaná Steinem (1987). Tato metoda nachází uplatnění zejména tehdy, je-li třeba generovat dvě či více navzájem nezávislých množin náhodných čísel. Metodu lze aplikovat jak při generování množin náhodných čísel ze stejného rozdělení, tak při generování složených procesů, tj. procesů, které jsou složeny z náhodných čísel z rozdělení s různými charakteristikami. Postup je obdobný k metodě stratifikovaného výběru až na to, že je nutné pořadí subintervalů náhodně permutovat zvláš pro každou proměnnou.

Zajímavou možností, jak dále snížit časovou náročnost, je postup na bázi **významných scénářů**. Vychází se z toho, že ne všechny scénáře vedou k pozitivní výplatě opce. Pro určení ceny je proto postačující generovat pouze takové vývoje podkladových faktorů, které povedou k uplatnění opce, tedy že (S_T) 0. V závislosti na konkrétní výplatní funkci je možné rozdělit interval přípustných hodnot podkladových faktorů na dva či více subintervalů dle toho, zda dojde k uplatnění opce. Například jednoduchá call opce bude uplatněna jen pokud S_T K, na základě čehož lze určit pravděpodobnost, že opce nebude uplatněna, jako $\Pr(S_T$ $K)$ a. Tento přístup je vhodné spojit s metodou inverzní transformace tak, že jednotkový interval rozčleníme pomocí a. Následně generujeme prvky rovnoměrně rozložené v rámci intervalu $[a,1]$ a vztah (11) přechází v:

$$\tilde{x} \quad F_X^{\ 1}(\tilde{u}), \quad \tilde{u} \quad R[a,1], \tag{13}$$

4. Srovnání jednotlivých metod

V této části je posouzena efektivnost vybraných metod simulace Monte Carlo při určení (odhadu) ceny evropské call opce v rámci klasického prostředí dle Blacka a Scholese (BS model) a pokročilejších modelů VG (*variance gamma*) a NIG (*normal inverse Gaussian*). Zvolená opce je typu ATM call, což zajiš uje vysokou citlivost na změnu vývoje ceny podkladového aktiva (gama je maximální), při $S_0 = K = 100$, doba do zralosti = 0,1 (cca 5 týdnů, tj. 25 obchodních dnů), bezriziková sazba $r = 0{,}05$ p.a. a volatilita výnosů ceny podkladového aktiva je pro zjednodušení pro daný interval = 0,14455, což je asi 45,7 % p.a.

Zvažovanými přístupy pro zvýšení efektivnosti přímé simulace (PMC) jsou metoda protikladné proměnné (AVMC), metoda stratifikovaného výběru (SSMC), respektive její rozšíření pro více dimenzí (LHSMC), a jejich kombinace – tedy AV-SSMC, respektive AV-LHSMC. Pokud to je možné, je rovněž aplikována simulace na bázi významných scénářů – jsou generovány jen ty náhodné prvky, které mají za následek významnost scénáře vývoje, vedou tedy k pozitivní výplatě opce.

Za účelem porovnání jednotlivých metod je zjiš ován odhad hodnoty opce $\hat{V}_0$,

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{N} \quad {}_{i\ 1}^{N} V_0^{(i)} \tag{14}$$

kde horní index (i) označuje i-tý scénář, časová náročnost všech N scénářů a taktéž je určena normovaná chyba:[4]

$$\mathrm{SE}(\hat{V}_0) = \frac{\hat{\ }}{\sqrt{N}} \quad \sqrt{\frac{1}{N \quad 1} \sum_{i \quad 1}^{N} (V_0^{(i)} \quad \hat{V}_0)^2} \Big/ \sqrt{N}. \tag{15}$$

Výsledky jsou prezentovány pro počet (ne)závislých scénářů $N = 10^x$, kde x je zpravidla 2, 3, 4, 5 a 6. Na závěr jsou ověřeny intervaly spolehlivosti. Veškeré výpočty jsou prováděny pomocí softwaru *Mathematica*® verze 6.0.1 na stroji Dell XPS s operační pamětí 2GB a procesorem Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T7300@2.00GHz/2.00GHz pod systémem Windows Vista. Vzhledem k určitým změnám v efektivnosti jednotli- vých metod oproti verzi programu *Mathematica*® 5.2 jsou zmíněny i nejvýznamější rozdíly.[5]

BS model (geometrický Brownův pohyb)

V rámci BS modelu předpokládáme, že se cena podkladového aktiva vyvíjí dle geometrického Brownova pohybu (GBM), za účelem ocenění v rizikově neutrálním prostředí:

$$S_T \quad S_0 \quad S_0 \ \exp[(r \quad \tfrac{\ }{2}^2) \quad \sqrt{\ }\ ], \tag{16}$$

což po dosazení jednotlivých parametrů dává:

$$S_T \quad S_0 \ \exp \ 0.05 \quad \frac{0.457^2}{2} \quad 0.1 \quad 0.457 \sqrt{0.1} \quad S_0 \ \exp[\ 0.0054 \quad 0.14455 \ ].$$

Dosazením do výplatní funkce opce, $\substack{vanilla \\ call}$ $(S_T \quad K)$, lze určit, že aby byla výplata pozitivní, musí být náhodný prvek z normovaného normálního rozdělení nepatrně větší než nula, konkrétně $\quad > 0{,}037685$. To určuje, že pravděpodobnost uplatnění opce, tj. že $S_T > K$, je mírně nižší než 0,5 (přesněji 0,48497). Tento poznatek zužitkujeme při generování významných scénářů.

Vzhledem k tomu, že výplatní funkce zde studované opce je dostatečně jednoduchá a zároveň je předpokládán jednoduchý model GBM, lze určit cenu opce i analyticky (na základě BS modelu):

$$V_0 \quad S_0 \ N(d \ ) \quad e^{r} \quad K \ N(d \ ) \quad 6.00013, \tag{17}$$

při

$$d \quad \frac{\ln(S_0 / K) \quad (r \quad \frac{1}{2} \quad {}^2)}{\sqrt{\ }} \ .$$

4 Tento vztah aplikujeme pouze pro PMC a AVMC, kdy je však za V_0 dosazován průměr zjištěný na základě protikladných scénářů. Pro účely metod na bázi stratifikace je vhodnější odhadnout chybu na základě více opakování odhadů ceny opce.

5 Pro detailní popis postupu výpočtu v *Mathematica*® viz http://homel.vsb.cz/~tic02/.

Za účelem odhadu hodnoty opce aplikujeme metody PMC, AVMC, SSMC a AV-SSMC jak pro všechny, tak jen pro významné scénáře. Jednotlivé výsledky jsou zachyceny v tabulkách 1 až 4. V levých sloupcích jsou uvedeny výsledky zjištěné na základě generování všech přípustných scénářů, v pravé části pak pro scénáře významné.

Za účelem generování jen významných scénářů je nutné nejdříve určit pravděpodobnost, s jakou opce (ne)bude uplatněna. V našem případě stanovíme s ohledem na provedení simulace pro jednotlivá N příslušnou hranici jako $a = 0{,}51$ (pravděpodobnost uplatnění je zaokrouhlena nahoru na 0,49 – přibližně půl procenta významných scénářů tak povede k nulové výplatě). Dalším krokem je generování prvků z rovnoměrného rozdělení $R[a,1]$, přičemž však počet generovaných prvků je jen $p\ N \quad (1 \quad a)\ N$, tedy přibližně polovina oproti situaci, kdy jsou generovány veškeré scénáře. Na závěr je nutné násobit jak odhad ceny, tak chyby odhadu pravděpodobností uplatnění $p = 1 - a$.

Dle výsledků zjištěných pomocí aplikace metody PMC pro celý obor přípustných scénářů (tabulka 1, levá část) je zřejmé, že pro prvotní odhad ceny je postačující generovat několik tisíc scénářů vývoje se zanedbatelnou časovou náročností, chyba však zůstává významná. Pro většinu aplikací akceptovatelný výsledek (včetně chyby) lze získat při počtu scénářů okolo $N = 1\,000\,000$ s časovou náročností několika sekund. Postup na bázi generování jen významných scénářů sice znamená snížení počtu scénářů o nepatrně více než polovinu, avšak vzhledem k náročnější proceduře metody inverzní transformace (určování kvantilů normovaného normálního rozdělení) je časová náročnost více než 25-krát vyšší. Odhadnutá chyba je pro stejné N přibližně poloviční, viz tabulka 1, pravá část.

Tabulka 1
Odhad hodnoty vanilla call opce dle BS modelu pomocí PMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	5,492	0,9180	0,000	6,027	0,4120	0,012
1 000	5,531	0,2665	0,004	5,992	0,1506	0,110
10 000	6,043	0,0940	0,047	5,926	0,0480	1,107
100 000	5,999	0,0297	0,406	5,992	0,0156	10,967
1 000 000	5,998	0,0093	4,212	6,011	0,0050	109,372

Tabulka 2
Odhad hodnoty vanilla call opce dle BS modelu pomocí AVMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	5,205	0,8008	0,000	5,728	0,1523	0,014
1 000	5,877	0,2169	0,004	5,955	0,0714	0,109
10 000	6,047	0,0716	0,047	5,978	0,0226	1,045
100 000	5,999	0,0227	0,359	5,990	0,0072	10,827
1 000 000	6,000	0,0072	3,869	6,000	0,0023	106,377

Tabulka 3
Odhad hodnoty vanilla call opce dle BS modelu pomocí SSMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	5,198	0,0689	0,016	6,153	0,0693	0,014
1 000	6,004	6×10-3	0,202	6,017	6×10-3	0,109
10 000	6,000	6×10-4	2,138	6,002	6×10-4	1,077
100 000	6,000	6×10-5	21,653	6,000	6×10-5	10,561
1 000 000	6,000	6×10-6	218,900	6,000	6×10-6	106,767

Tabulka 4
Odhad hodnoty vanilla call opce dle BS modelu pomocí AV-SSMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	6,229	0,0528	0,016	5,963	0,0556	0,015
1 000	5,995	5×10-3	0,203	6,003	5×10-3	0,110
10 000	6,002	5×10-4	2,168	6,003	5×10-4	1,029
100 000	5,999	5×10-5	21,173	6,000	5×10-5	10,546
1 000 000	6,000	5×10-6	213,686	6,000	5×10-6	106,159

Obdobné výsledky jsou patrné při aplikaci metody AVMC v plné formulaci (tabulka 2, levá část), stejně jako pro generování pouze významných scénářů (tabulka 2, pravá část). Při prvé možnosti lze vypozorovat jak mírnou úsporu časových nákladů, tak pokles chyby odhadu o zhruba čtvrtinu. Generování pouze významných scénářů se svou časovou náročností blíží obdobnému postupu pro PMC, chyba je však zhruba poloviční.

Třetím aplikovaným přístupem je metoda stratifikovaného výběru, tedy ze všech tří zvolených metod postup teoreticky nejpřesnější a časově nejnáročnější. Vzhledem k nutnosti určení chyby odhadu můžeme aplikovat dva odlišné postupy: (*i*) každý subinterval vyplňujeme N/M-krát;[6] (*ii*) jednotlivé scénáře vývoje generujeme opakovaně, přičemž odhad ceny je výsledek první série N pokusů $\hat{V}_0^{(1)}$ a chyba SE je zjištěna jako směrodatná odchylka jednotlivých odhadů $\hat{V}_0^{(k)}$, $k = 1$ až 1 000. Po ověření je aplikována druhá možnost, která se pro odhad chyby jeví jako spolehlivější.

Dle výsledků obsažených v tabulce 3 je zřejmé, že metoda poskytuje vysoce kvalitní odhad s minimální chybou již pro několik tisíc scénářů v čase do jedné sekundy, přičemž při generování pouze významných scénářů, tj. stratifikace pravděpodobností jen v intervalu $[a,1]$, lze časovou náročnost dále snížit o přibližně polovinu (chyba odhadu zůstává vzhledem ke specifikaci subintervalů v zásadě stejná).

Kromě uvedených bylo dále prověřeno spojení metod AVMC a SSMC. Po ověření několika variant (dva prvky souměrné mezi stratami, dva prvky souměrné uvnitř každé

6 Je možné pracovat například s dvojicemi {10,10}, {100,10}, {200,50}, {1000,100} a {2000,500}, přičemž {x,y} označuje počet subintervalů a náhodných prvků v každém z nich.

straty, více prvků souměrně umístěných uvnitř každé ze strat, apod.) se jako nejefektivnější ukázalo generování dvou symetricky vzdálených prvků v každém z intervalů. Právě tyto výsledky jsou prezentovány v tabulce 4. Výsledkem je o téměř pětinu nižší chyba oproti SSMC při obecně mírně nižší časové náročnosti.

Zde je nutné zmínit, že časová náročnost při práci jen s významnými scénáři jak u SSMC, tak AV-SSMC se příliš neliší od odpovídajících hodnot pro PMC a AVMC, avšak chyba je mnohonásobně nižší. Je to dáno tím, že ve všech případech nejprve generujeme prvky z rovnoměrné rozdělení, které následně převádíme prostřednictvím metody inverzní transformace na prvky splňující podmínky normovaného normálního rozdělení.

Poznámka k rozdílnosti verzí programu: generování souboru prvků z normovaného normálního rozdělení je ve verzi 6.0.1 až osmkrát rychlejší oproti verzi 5.2; naopak při generování prvků z rovnoměrného rozdělení došlo k zrychlení řádově jen o desítky procent, což při zachování přibližně stejné náročnosti určení inverzní funkce k normovanému normálnímu rozdělení výrazným způsobem snižuje přínos pokročilé metody stratifikovaných výběrů i postupu na bázi významných scénářů.

Ověření intervalu spolehlivosti pro BS model

Nezbytnou součástí procedury simulace Monte Carlo je určení intervalu spolehlivosti. Tedy, získáme-li odhad ceny opce $\hat{V}_0$, měla by skutečná cena ležet s pravděpodobností $(1 - \quad)$ v intervalu ohraničeném $V_0 \quad$ a V_0 :

$$\hat{V}_0 \quad \hat{V}_0 \quad F_N^{-1}(\quad /2)\ \mathrm{SE}\,. \tag{18}$$

Tento vztah je založen na předpokladu normálního pravděpodobnostního rozdělení odhadu. V této části jednak ověříme, zda je tento předpoklad platný, tj. nakolik je určený interval relevantní, a rovněž ověříme, zda zjištěná hodnota parametru SE skutečně odpovídá chybě odhadu (směrodatné odchylce).

Za tímto účelem realizujeme pro jednotlivé metody $k = 1\,000$ odhadů ceny derivátu, pro zjednodušení pro $N = 100$ a $N = 1\,000$ (nezávislých) scénářů náhodného vývoje. Pak musí $(1 - \quad)k$ odhadů ležet uvnitř intervalu:

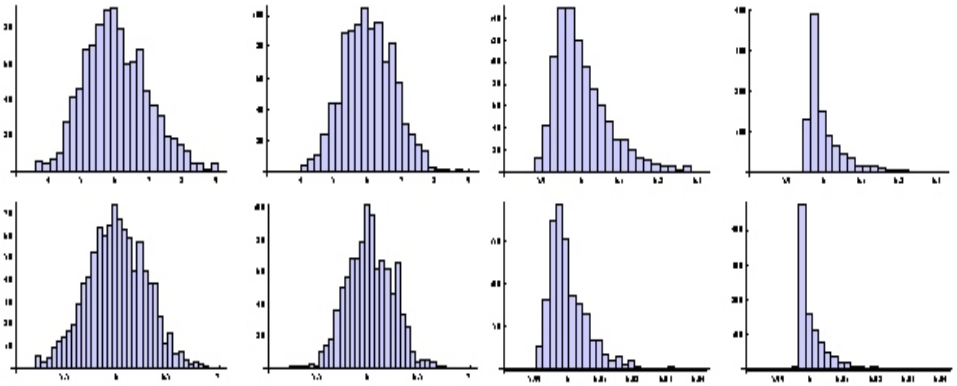
$$\hat{V}_0\,(\quad)\quad [V_0 \quad F_N^{-1}(\quad /2)\ \mathrm{SE};\ V_0 \quad F_N^{-1}(\quad /2)\ \mathrm{SE}]\,. \tag{19}$$

Již z grafického znázornění pomocí histogramů (obrázek 1) je patrné, že výsledky získané jednoduššími metodami (PMC, AVMC) naznačují normální typ pravděpodobnostního rozdělení, kdežto metody postavené na stratifikaci (SSMC a AV-SSMC) vedou k pozitivní šikmosti a rovněž těžším koncům v pravé části spektra (grafická podoba připomíná spíše lognormální pravděpodobnostní rozdělení). Při interpretaci výsledků je tak nutná větší obezřetnost.

Pro úplnější posouzení jsou jednotlivé výsledky detailněji zaznamenány prostřednictvím zjištěné směrodatné odchylky odhadů, šikmosti a špičatosti a dolní a horní meze intervalu určeného pro $\quad = 0{,}05$ – vzhledem k obdobným výsledkům pro blízké postupy pouze pro metody PMC (tabulka 5) a SSMC (tabulka 6).

Obrázek 1

Pravděpodobnostní rozdělení odhadů ceny opce při *k* = 1 000 opakování (*N* = 100 nahoře, *N* = 1 000 dole) pro PMC, AVMC, SSMC a AV-SSMC (zleva doprava



Tabulka 5

Ověření chyby odhadu dle PMC (BS model)

Parametr	**Odhad pro *N* = 100**	**Ověření při *k* = 1 000**	**Odhad pro *N* = 1 000**	**Ověření při *k* = 1 000**
Střední hodnota	8,350	6,027	5,897	6,023
Směrodatná odchylka	0,954	0,926	0,284	0,291
Šikmost	—	0,45	—	– 0,020
Špičatost	—	3,473	—	2,952
Dolní mez	4,148	4,380	5,444	5,447
Horní mez	7,852	7,983	6,556	6,554

Je logické, že střední hodnota odhadů pro *k* opakování je ve všech případech mnohem blíže teoreticky správné ceně. Co se týče odhadu směrodatné odchylky výsledku (SE), pro metodu PMC je vcelku odpovídající v obou případech, šikmost a špičatost pak indikuje normální pravděpodobnostní rozdělení jen pro vyšší *N*. Obdobně interval zjištěný pro stanovené *a* vcelku odpovídá předpokladu jen pro *N* = 1 000, zatímco pro *N* = 100 je zjištěný interval znatelně posunutý. Po ověření i dalších kombinací *N* a *k* lze říci, že odhadnutý interval lze pro nižší *N* obecně považovat jako méně pravdivý než při vyšším počtu scénářů. Za předpokladu aplikace metody SSMC (tabulka 6) je zřejmé, že směrodatná odchylka musí odpovídat (dáno způsobem určení). Rovněž není překvapivé, že střední hodnota odhadů je tentokrát ještě blíže k předpokládanému výsledku. Co se týče parametrů šikmosti a špičatosti, příslušné hodnoty potvrzují závěr o nenormálnosti rozdělení, který byl učiněn na základě grafických výsledků. To má za následek zejména vzdálení se pravého okraje intervalu.

Tabulka 6
Ověření chyby odhadu dle SSMC (BS model)

Parametr	Odhad pro $N = 100$	Ověření při $k = 1\,000$	Odhad pro $N = 1\,000$	Ověření při $k = 1\,000$
Střední hodnota	5,699	6,004	5,973	6,000
Směrodatná odchylka	0,079	0,079	0,006	0,006
Šikmost	—	1,782	—	1,603
Špičatost	—	9,172	—	7,343
Dolní mez	5,870	5,903	5,989	5,992
Horní mez	6,130	6,180	6,011	6,017

VG model (Variance gama mod*el)*

V této části budeme pracovat s VG modelem, který umožňuje modelovat i vyšší momenty pravděpodobnostního rozdělení výnosů ceny podkladového aktiva (šikmost a špičatost). V rizikově neutrálním prostředí je dán vývoj ceny podkladového aktiva S takto:

$$S_T \quad S_0 \quad S_t \ \exp(r \quad VG(\qquad), \tag{20}$$

přičemž parametr $\frac{1}{v}\ln(1 \quad v \quad \frac{1}{2} \quad {}^2 v)$ zajiš uje, že $\mathrm{E}[S_T] \quad S_0 \exp[r \ ]$. Oproti předchozímu případu předpokládáme, že *šikmost* = – 0,80556 a *špičatost* = 4,14235.

Náhodný prvek $VG(\ )$ dle (7):

$$VG(\ ) = \quad g \qquad \sqrt{g} \ \sim, \tag{21}$$

zde tedy $\ell(t) \quad g$, lze získat dvěma způsoby – buď jako řízený Brownův pohyb (dále V1), tj. kombinací nezávislých náhodných veličin $\tilde{g} \quad G[\frac{}{v}; v]; \sim$, nebo alternativně jako rozdíl dvou nezávislých gama prvků (dále V2).

V případě zde studované opce lze její cenu $V^{VG}(\ ; S; \ )$ získat integrací ceny dle BS modelu, $V^{BS}(\ ; S; \ )$, na základě funkce hustoty gama rozdělení $f_G(g)$:

$$V^{VG}(\ ; S; \ ) \quad \underset{0}{} f_G(g) V^{BS} \quad ; S \ \exp[\quad g \ \frac{1}{2} \quad {}^2 g \qquad], \quad \sqrt{\frac{g}{}} \ \mathrm{d}g$$

$$= \underset{0}{} \frac{g^{\frac{1}{v} \ 1} \exp[\frac{g}{v}]}{v^{\frac{1}{v} \ 1} \ (\frac{1}{v})} V^{BS} \quad ; S \ \exp[\quad g \ \frac{1}{2} \quad {}^2 g \qquad], \quad \sqrt{\frac{g}{}} \ \mathrm{d}g. \tag{22}$$

Po dosazení příslušných parametrů = – 2,00628, = 0,34325, = 0,02264 a = – 1,90566 lze získat cenu opce jako $V^{VG}(\ ; S; \ ) = 5{,}7537$.

Jednotlivé výsledky získané aplikací vybraných simulačních postupů jsou uvedeny v tabulce 7 (PMC), tabulce 8 (LHSMC) a tabulce 9 (AV-LHSMC), v levé části vždy pro V1, v pravé pro V2. V tabulce 10 jsou pak prezentovány výsledky získané metodou SSMC pro distribuční funkci VG procesu, tj. kombinaci funkcí hustoty pro gama

rozdělení a normální rozdělení pravděpodobnosti, přičemž v pravé části jsou uvedeny výsledky získané při realizování jen významných scénářů.

Nejdříve se zaměříme na metodu PMC. Srovnáme-li výsledky obou studovaných pojetí, není patrný významný rozdíl. Pro prvotní odhad ceny opce je stejně jako v případě metody PMC u BS modelu nutné generovat několik tisíc scénářů, přičemž vypočtená chyba řádově odpovídá. Za předpokladu vývoje ceny podkladového aktiva dle VG modelu tak velmi kvalitní odhad zabere opět větší počet sekund.

Výsledky získané aplikací pokročilejšího postupu LHSMC jsou obsaženy v tabulce 8. Porovnáme-li obě definice VG modelu, je postup dle V2 tentokrát výrazně náročnější, zejména díky složitější inverzní funkci gama rozdělení. Přitom je růst časové náročnosti oproti PMC přibližně 250-ti násobný. Vzhledem k tomu, že přístup LHS neumožňuje jednoduché vyjádření chyby odhadu, je SE určena na základě opakování scénářů vývoje. Tímto postupem zjištěná chyba přibližně odpovídá chybě u PMC při desetkrát vyšším počtu scénářů, což vzhledem k časové náročnosti upřednostňuje metodu PMC.

Alternativou k metodě LHSMC je generování dvou symetricky umístěných prvků v každém subintervalu (AV-LHSMC). Výsledky jsou prezentovány v tabulce 9. Je zřejmé, že časová náročnost je obdobná, chyba odhadu však roste. Prosté LHS proto působí efektivněji pro obě vyjádření VG modelu.

Tabulka 7
Odhad hodnoty vanilla call opce dle VG modelu pomocí PMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	5,005	0,7555	0,000	6,008	0,7987	0,000
1 000	6,500	0,2406	0,007	5,892	0,2467	0,016
10 000	5,657	0,0774	0,046	5,684	0,0756	0,031
100 000	5,792	0,0241	0,437	5,742	0,0241	0,468
1 000 000	5,753	0,0076	4,462	5,756	0,0076	4,586

Tabulka 8
Odhad hodnoty vanilla call opce dle VG modelu pomocí LHSMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	5,825	0,2325	0,125	5,815	0,2059	0,187
1 000	5,792	0,0733	1,139	5,805	0,0688	1,997
10 000	5,763	0,0238	11,371	5,762	0,0197	19,781
100 000	5,770	0,0074	115,051	5,749	0,0065	196,000
1 000 000	5,750	0,0024	1 156,590	5,754	0,0017	1 922,000

Tabulka 9
Odhad hodnoty vanilla call opce dle VG modelu pomocí AV-LHSMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	5,775	0,3530	0,121	5,708	0,2639	0,187
1 000	5,941	0,1111	1,154	5,674	0,0964	2,075
10 000	5,748	0,0324	11,763	5,801	0,0284	19,468
100 000	5,762	0,0113	117,203	5,738	0,0098	193,286
1 000 000	5,753	0,0034	1 156,110	5,758	0,0025	1 908,200

Tabulka 10
Odhad hodnoty vanilla call opce dle VG modelu pomocí SSMC

Počet scénářů N	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU	Hodnota V_0	Chyba SE	Čas CPU
100	5,692	0,03740	221,8	5,864	0,03740	111,2
1 000	5,751	0,00354	2203,6	5,764	0,00354	1 117,4
10 000	5,754	0,00031	22 287,6	5,756	0,00031	11 253,1
100 000	5,754	0,00003	221 816,0	5,754	0,00003	111 124,1

Poslední studovaná alternativa odhadu ceny call opce dle VG modelu je stratifikační přístup SSMC dle distribuční funkce VG modelu, což umožňuje pracovat jen s významnými scénáři. Dle potřebného času je zřejmá početní náročnost této metody, i když pro dané N dochází k výraznému snížení předpokládané chyby odhadu (pokles je v zásadě obdobný k BS modelu). Časovou náročnost stratifikace dle distribuční funkce lze dále snížit na přibližně jednu polovinu, pokud budeme pracovat pouze s významnými scénáři. Chyba odhadu přitom zůstává stejná.

Poznámka k rozdílnosti verzí programu: posun v efektivnosti generování souboru prvků z gama rozdělení je ve verzi 6.0.1 ještě vyšší než u normovaného normálního rozdělení, což vede k přiblížení časových náročností BS a obou definic VG modelů při jednoduché simulaci oproti verzi 5.2. Posun v efektivnosti výpočtů pro metody inverzní transformace však opět není nijak patrný, relativní efektivnost metod LHS i SS tak i zde klesá. Rovněž nebylo pozorováno ani zvýšení efektivnosti řešení invertované distribuční funkce VG procesu.

Ověření intervalu spolehlivosti pro VG model

Rovněž v případě VG modelu došlo k ověření, nakolik je interval spolehlivosti využitelný za účelem odhadu chyby modelu. Důkladněji jsou prezentovány jen výsledky získané dle metody PMC pro vyjádření VG modelu jako řízeného Brownova pohybu, nebo s určitou výjimkou aplikace distribuční funkce VG procesu jsou ostatní výsledky obdobné.

Grafická podoba pravděpodobnostního rozdělení hodnot opce pro jednotlivé série scénářů v zásadě odpovídá obrázek 1 – není patrná žádná zvláštní odlišnost od normálního rozdělení, což je potvrzeno hodnotami v tabulce 11. I když pro nižší počty

scénářů existují určité rozdílnosti (zjištěná směrodatná odchylka je mírně nižší než odhadnutá a interval je užší), s rostoucím N se tento rozdíl stírá. Střední hodnota jednotlivých opakování odhadů je tak velmi blízká teoreticky předpokládanému výsledku, odhad směrodatné odchylky je relevantní, šikmost a špičatost se znatelně neodlišuje od parametrů normálního rozdělení a hranice intervalů jsou téměř totožné.

Tabulka 11
Ověření chyby odhadu dle PMC (VG model)

Parametr	**Odhad pro** $N = 100$	**Ověření při** $k = 1\,000$	**Odhad pro** $N = 1\,000$	**Ověření při** $k = 1\,000$
Střední hodnota	7,918	5,781	5,900	5,751
Směrodatná odchylka	0,826	0,766	0,241	0,241
Šikmost	—	0,155	—	0,091
Špičatost	—	3,140	—	2,886
Dolní mez	4,136	4,365	5,282	5,287
Horní mez	7,372	7,399	6,225	6,224

NIG model (Normal Inverse Gaussian model)

Jiným modelem, který umožňuje vystihnout i vyšší momenty pravděpodobnostního rozdělení výnosů ceny podkladového aktiva (šikmost a špičatost) je NIG model:

$$S_T \quad S_0 \quad S_t \exp(r \quad NIG(\quad), \tag{23}$$

kde parametr $\quad 1 \quad \sqrt{1 \quad 2 \quad v \quad {}^2 v} \;/\; v$ opět zajiš uje, že $\mathrm{E}[S_T] \quad S_0 \exp[r \quad]$, přičemž *šikmost* = – 0,80556 a *špičatost* = 4,14235.

Náhodný prvek $NIG($ dle (7):

$$NIG(\quad = \quad I \quad \sqrt{I} \quad \sim, \tag{24}$$

zde tedy $\ell(t) \quad I$, lze získat dvěma způsoby. Buď jako řízený Brownův pohyb kombinací nezávislých náhodných veličin $I \quad G[\;;\frac{}{v}];\sim \quad N$ (dále V1), nebo alternativně kombinací tří nezávislých prvků z normovaného normální rozdělení, tj. na bázi parametrů , , (dále V2).

Ve zde studovaném případě jednoduché call opce lze cenu opce $V^{VG}(\;;S;\;)$ určit na základě integrace ceny dle BS modelu, $V^{BS}(\;;S;\;)$, pomocí funkce hustoty inverzního Gaussova rozdělení $f_{IG}(g)$:

$$V^{NIG}(\;;S;\;) \quad \underset{0}{} f_{IG}(g) V^{BS} \quad ;S \exp[\quad g \quad \tfrac{1}{2} \quad {}^2 g \quad], \quad \sqrt{\tfrac{g}{}} \quad dg$$

$$= \underset{0}{} \frac{\sqrt{\frac{2}{v g^3}} \exp \frac{(g \quad)^2}{2 v g}}{\sqrt{2}} V^{BS} \quad ;S \exp[\quad g \quad \tfrac{1}{2} \quad {}^2 g \quad], \quad \sqrt{\tfrac{g}{}} \quad dg. \tag{25}$$

Po dosazení příslušných parametrů = – 0,42022, = 0,0677, = 0,09237 a = – 0,4106 určíme cenu opce: $V^{VG}(\ ;S;\ ) = 5{,}7612$.[7]

Výsledky dosažené aplikací vybraných simulačních postupů jsou uvedeny v tabulce 12 (PMC), tabulce 13 (LHSMC), tabulce 14 (AV-LHSMC/AVMC), v levé části vždy pro V1, v pravé pro V2, a dále v tabulce 15 – SSMC pro distribuční funkci včetně zohlednění metody významných scénářů (vpravo).

Tabulka 12
Odhad hodnoty vanilla call opce dle NIG modelu pomocí PMC

Počet scénářů	Hodnota	Chyba	Čas	Hodnota	Chyba	Čas
N	V_0	SE	CPU	V_0	SE	CPU
100	6,867	0,7536	0,001	5,433	0,7557	0,015
1 000	5,522	0,2255	0,006	5,639	0,2449	0,187
10 000	5,765	0,0761	0,063	5,835	0,0752	1,857
100 000	5,773	0,0242	0,499	5,748	0,0234	18,735
1 000 000	5,762	0,0076	5,553	5,742	0,0076	186,156

Tabulka 13
Odhad hodnoty vanilla call opce dle NIG modelu pomocí LHSMC

Počet scénářů	Hodnota	Chyba	Čas	Hodnota	Chyba	Čas
N	V_0	SE	CPU	V_0	SE	CPU
100	5,787	0,2587	0,280	5,867	0,8395	0,078
1 000	5,844	0,0800	2,574	5,760	0,2393	0,562
10 000	5,783	0,0242	24,727	5,789	0,0760	6,209
100 000	5,754	0,0087	258,244	5,772	0,0240	63,398
1 000 000	5,761	0,0024	2 633,080	5,759	0,0076	620,838

Tabulka 14
Odhad hodnoty vanilla call opce dle NIG modelu pomocí AV-LHSMC/AVMC

Počet scénářů	Hodnota	Chyba	Čas	Hodnota	Chyba	Čas
N	V_0	SE	CPU	V_0	SE	CPU
100	5,586	0,2585	0,265	6,514	1,1628	0,011
1 000	5,663	0,0788	2,403	5,549	0,3070	0,044
10 000	5,737	0,0235	23,369	5,773	0,1096	0,553
100 000	5,761	0,0073	225,546	5,730	0,0311	5,647
1 000 000	5,765	0,0024	2 274,77	5,759	0,0102	55,081

7 Výsledek se poněkud liší vzhledem k VG modelu kvůli zaokrouhlení vstupních parametrů.

Tabulka 15
Odhad hodnoty vanilla call opce dle NIG modelu pomocí SSMC

Počet scénářů	Hodnota	Chyba	Čas	Hodnota	Chyba	Čas
N	V_0	SE	CPU	V_0	SE	CPU
100	5,753	0,02999	210,9	5,753	0,02999	143,7
1 000	5,763	0,00310	2 142,3	5,763	0,00310	1 433,5
10 000	5,759	0,00030	21 416,5	5,759	0,00030	14 453,5
100 000	5,761	0,00003	213 233,5	5,761	0,00003	143 424,5

Na základě aplikace metody PMC je zřejmé, že zjištěná chyba odhadu i časová náročnost u obou vyjádření přibližně odpovídají výsledkům dosaženým v případě VG modelu. Pro spolehlivý odhad tak je opět třeba několik sekund. Zároveň je zřejmé, že alternativní definice pomocí parametrů (, ,) je znatelně pomalejší.

Jestliže aplikujeme postup založený na stratifikaci intervalu pravděpodobností (LHSMC), jsou výsledky ovlivněny skutečností, že v případě procesu IG musíme zdlouhavě numericky řešit inverzní funkci k funkci distribuční. Časová náročnost proto oproti předchozím modelům roste vícenásobně. Na druhou stranu, alternativní definice je zde aplikována na bázi tří nezávislých prvků z jednoduše zpracovatelných rozdělení – časová náročnost proto roste méně, nedochází však k téměř žádnému poklesu chyby.

Konečně, výsledky při využití metody protikladných proměnných jsou uvedeny v tabulce 14, v levé části pro definici modelu NIG jako řízeného geometrického Brownova pohybu (spojení AVMC a LHSMC), v pravé části pro definici pomocí parametrů (, ,) (AVMC bez stratifikace). V prvém případě dochází oproti prosté LHSMC k nepatrnému snížení chyby i časové náročnosti. Druhý případ je nutné srovnat spíše s metodou PMC – chyba je sice stejného řádu, časová náročnost však klesá na jednu čtvrtinu (realizujeme jen čtvrtinu scénářů).

Co se týče intervalu spolehlivosti, respektive pravděpodobnostního rozdělení odhadů, tak jsou výsledky obdobné k VG modelu. Tedy díky tomu, že pracujeme s prvky z dvou různých či tří stejných pravděpodobnostních rozdělení s odlišnými parametry, nemá ani stratifikace dopad na změnu grafické podoby histogramu, respektive znatelné zvýšení šikmosti či špičatosti.

Poznámka k rozdílnosti verzí programu: od verze 6 je nově zakomponováno inverzní Gaussovo rozdělení, přičemž generování příslušných pseudonáhodných prvků je vcelku stejně efektivní jako u gama rozdělení; zakomponovaná inverzní funkce k danému rozdělení však je značně neefektivní – metoda inverzní transformace proto byla aplikována pomocí numerického řešení invertované distribuční funkce, což se ukázalo jako desetkrát rychlejší.

Shrnutí a srovnání jednotlivých výsledků

Postupně byly aplikovány vybrané přístupy simulace Monte Carlo za účelem odhadu (určení) ceny evropské call opce na aktivum typu bezdividendové akcie za předpokladu normálního pravděpodobnostního rozdělení výnosů (BS model) i při zohlednění

šikmosti a špičatosti (modely VG a NIG). Parametry pravděpodobnostního rozdělení podkladových výnosů a teoreticky správnou cenu opce shrnuje tabulka 16.

Tabulka 16
Parametry podkladového procesu a teoretická cena opce

Parametr	Symbol	BS	VG	NIG
Střední hodnota výnosů	r	0,0050	0,0050	0,0050
Směrodatná odchylka výnosů		0,1446	0,1445	0,1445
Šikmost výnosů		0,0000	– 0,8056	– 0,8056
Špičatost výnosů		3,0000	4,1423	4,1423
Střední hodnota ceny aktiva	$E[S_T]$	100,501	100,501	100,501
Cena opce	V_0	6,00013	5,7537	5,7612

Prvním analyzovaným bylo klasické prostředí BS modelu s teoretickou cenou $V^{BS} = 6.00013$. Při aplikaci simulace Monte Carlo v základní podobě bylo možné v čase do 1 sekundy dosáhnout odhadu s předpokládanou chybou přibližně 0,62 % z teoretické ceny opce při spolehlivosti 95 %. Za předpokladu aplikace metody protikladných proměnných bylo možné dosáhnout ve stejném čase výsledek s předpokládanou chybou přibližně 0,46 %. Jinak řečeno, metoda AVMC nám dává přibližně stejnou odhadovanou chybu při polovičním čase jako metoda PMC.

Bylo ukázáno, že při stejné velikosti parametru N vede vyhodnocení pouze významných scénářů k přibližně 25-násobnému růstu časových nákladů při snížení chyby odhadu na asi polovinu. Oba postupy lze obdobně srovnat jen co do času. Při hrubém srovnání, potřebujeme-li pro realizaci N scénářů x časových jednotek, bude odpovídající náročnost pomocí inverzní transformace $50x$. Generování jen významných scénářů tak bude v daném případě rychlejší, pokud pravděpodobnost uplatnění $p = (1 - a) < 0{,}02$, což je velmi řídký případ.

Chceme-li srovnat oba postupy důkladněji, je vhodné vyhodnotit například metodu PMC pro takový počet scénářů, aby časová náročnost byla stejná. V daném případě se jedná o provedení PMC pro $25N$ – výsledkem je o více než polovinu nižší chyba odhadu. Jednoduchý přístup PMC tak působí efektivněji, s výjimkou opcí silně OTM.

Mírně odlišná situace nastává v případě AVMC. Provádíme-li simulaci pouze pro významné scénáře, roste časová náročnost téměř třicetkrát, chyba se však snižuje více než třikrát. Provedeme-li AVMC pro $28N$, časová náročnost je tedy stejná jako u AVMC pro významné scénáře na bázi N, bude zjištěná chyba o přibližně pětinu nižší. Ve zde studovaném případě lze tedy upřednostnit provádění AVMC pro všechny scénáře. Je však zřejmé, že pokud pravděpodobnost uplatnění opce znatelně klesne pod jednu polovinu, bude vhodné upřednostnit právě práci jen s významnými scénáři.

Jako postup, který by měl vést k výrazně lepším výsledkům, byla aplikována metoda stratifikace. Při této metodě bylo dosaženo přibližně stejné chyby jako pro PMC (0,62 % z ceny opce) v čase do 0,1 sekundy. Mírného snížení předpokládané chyby i časové náročnosti bylo dosaženo při zakomponování postupu protikladných proměnných do stratifikace, tj. při generování dvou symetricky umístěných prvků v každé ze strat (tento způsob se ukázal jako nejvhodnější ze všech zvažovaných kombinací obou postupů).

Pokud byly generovány jen významné scénáře, bylo možné dodatečné snížení časové náročnosti o přibližně polovinu při v zásadě stejné chybě. Tento postup se proto jeví jako nejefektivnější ze všech zde sledovaných alternativ. Chyby 0,62 % z ceny opce lze dosáhnout v čase 0,05 sekundy. Je-li pro výpočet k dispozici jedna sekunda, bude chyba 0,01 % z ceny opce.

Velmi důležitá je rovněž identifikace konvergence výsledku, tedy jakou mírou klesá chyba odhadu. Na základě příslušných tabulek je zřejmé, že vynásobíme-li počet scénářů koeficientem x, klesne chyba odhadu pro PMC či AVMC v obou vyjádřeních o $\sqrt{x}$, tj.

$$N \quad x \qquad {}^{N}\!/_{\sqrt{x}},$$

nebo o x pro SSMC či AV-SSMC v obou vyjádřeních, tj.

$$N \quad x \qquad {}^{N}\!/_{x},$$

kde $_N$ označuje směrodatnou odchylku odhadu pro N realizovaných scénářů.

V rámci alternativního studovaného prostředí byla zohledněna skutečná šikmost a špičatost podkladových výnosů, jednak pomocí VG modelu, dále s využitím NIG modelu, přičemž oba modely by měly vést k ceně opce 5,75.[8] Bylo zjištěno, že oba modely přes odlišnou definici umožňují za předpokladu použití stejného postupu simulace dosáhnout přibližně stejnou chybu odhadu, i když časová náročnost se může lišit.

Pro případ simulace Monte Carlo v základní podobě je vypočtená chyba mírně nižší než u BS modelu (pro stejný počet scénářů), časová náročnost však mírně vyšší. Z obou definic VG modelu – spojení prvků z normovaného normálního rozdělení a gama rozdělení (V1) nebo dvou nezávislých prvků z gama rozdělení (V2) – je efektivnější vzhledem k rychlosti generátoru pojetí první. V případě PMC je dosahováno stejné chyby v obou případech. Při aplikaci metody LHS je sice chyba v pojetí dvou nezávislých prvků z gama rozdělení nižší, avšak pokud vyhodnotíme VG model v pojetí V1 pro počet scénářů, které znamenají stejnou časovou náročnost, tj. přibližně 1,5N, bude naopak zjištěná chyba nižší pro pojetí V1. Zakomponování metody protikladných proměnných žádný významný přínos nepřineslo jak pro pojetí V1, tak V2. Časová úspora je minimální, chyba znatelně roste. Nezdá se tedy, že by mělo smysl zvažovat užití této alternativy.

Pokud by nebyla respektována časová náročnost, bylo by možné považovat za nejpříhodnější postup stratifikaci distribuční funkce studovaného modelu. Při zohlednění časové náročnosti se tento přínos může zdát jako sporný. Podívejme se však blíže na konvergenci výsledků. Pokud zvýšíme počet scénářů x-krát, poklesne chyba u PMC (i AVMC) dle $\sqrt{x}$ (tedy obdobně jako u BS modelu). Pokles stejného řádu však lze vypozorovat i pro postupy založené na LHSMC. To znamená, že chceme-li snížit chybu odhadu desetkrát, musíme zvýšit počet scénářů a tím i časovou náročnost stokrát.

Výrazně lepší konvergence je patrná pro stratifikaci na základě distribuční funkce komplexního procesu – pokles odpovídá x. Preferovaná metoda proto bude záviset na požadované přesnosti. Opět platí, že SSMC pro významné scénáře bude efektivnější než metoda pracující se všemi scénáři, viz tabulka 17.

8 Jak již bylo uvedeno, výsledky se mírně liší vzhledem k zaokrouhlení vstupních parametrů.

Tabulka 17
Srovnání efektivnosti při požadavku vysoké přesnosti

	PMC		SSMC		SSMC – jen významné	
N	100	10^8	100	10^5	100	10^5
SE	0,825	$7{,}6 \times 10^{-5}$	0,0374	$3{,}1 \times 10^{-5}$	0,0374	$3{,}1 \times 10^{-5}$
CPU	$4{,}4 \times 10^{-4}$	$4{,}4 \times 10^5$	221	$2{,}21 \times 10^5$	111	$1{,}1 \times 10^5$

V případě modelu NIG byly studovány dvě varianty – definice na bázi prvků z normovaného normálního rozdělení a inverzního Gaussova rozdělení (V1) nebo definice pomocí tří prvků (V2). Při celkovém srovnání vychází jako jednoznačně nejefektivnější PMC pro V1. Jedinou výjimkou může být požadavek velmi vysoké přesnosti – v takovém případě by se projevila rychlejší konvergence při stratifikaci NIG distribuční funkce, tak jako tomu bylo u VG modelu.

Ze srovnání modelů VG a NIG vyplývá v zásadě stejná chyba i obdobná časová náročnost, i když výpočty s funkcemi pro inverzní Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti jsou náročnější a tedy i mírně zdlouhavější.

5. Závěr

Těžiště využití simulací typu metody Monte Carlo ve financích leží zejména při odhadu ceny finančních derivátů, jejichž cenu nelze určit analyticky. Jedná se například o opce s komplikovanou výplatní funkcí, s více podkladovými aktivy nebo komplexními podkladovými procesy. Výnosy aktiv na moderních finanční trzích jsou typické nenulovou šikmostí a dodatečnou špičatostí, což vytváří další oblasti efektivní aplikace metody Monte Carlo.

Tento článek byl zaměřen na aplikaci a posouzení schopností vybraných metod snižování rozptylu simulace Monte Carlo při určení teoreticky správné ceny opce. Zvažovanými modely bylo jak klasické prostředí dle Blacka a Scholese, tak více reálnější prostředí, které umožňuje modelovat i šikmost a špičatost pravděpodobnostního rozdělení výnosů podkladových faktorů (VG model a NIG model).

Jako nejefektivnějším postupem při určení ceny plain vanilla call opce v rámci BS modelu se jevila metoda stratifikovaného výběru ve spojení s principem protikladných proměnných prováděná pouze pro významné scénáře. V rámci prostředí zohledňujícího šikmost a špičatost byly výsledky získány nejrychleji prostou simulací (PMC), jak u VG modelu, tak NIG modelu. V případě vysoké požadované přesnosti však lze vzhledem ke konvergenci opět předpokládat vyšší efektivnost při využití distribuční funkce komplexního procesu pro významné scénáře.

Ze srovnání VG modelu a NIG modelu pro zde posuzované metody a postupy vychází oba modely obdobně zejména pro jednodušší metody. Ve všech případech se však projevuje vyšší početní náročnost modelu NIG, zejména v důsledku výrazně rychlejšího a efektivnějšího určení inverzní funkce k distribuční funkci gama rozdělení oproti inverznímu Gaussovu.

Nedílnou součástí odhadu ceny opce pomocí simulace Monte Carlo je určení intervalu spolehlivosti. V této souvislosti je nutné zmínit poněkud odlišný charakter

pravděpodobnostního rozdělení odhadů – zatímco jednodušší metody vedou k normálnímu rozdělení, v případě stratifikace náhodných prvků z jednoho rozdělení má výsledek podobu spíše rozdělení lognormálního. Tuto skutečnost je nutné brát v úvahu při interpretaci odhadnuté ceny.

Literatura

BARNDORFF-NIELSEN, O. E. 1995. Normal inverse Gaussian distributions and the modeling of stock returns [Research report No. 300]. Aarhus University, Department of Theoretical Statistics, 1995.

BARNDORFF-NIELSEN, O. 1998. E. Processes of Normal Inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*. 1998, vol. 2, no. 1, s. 41–68. ISSN 0949-2984.

BARRAQUAND, J. 1995. Numerical valuation of high dimensional multivariate European securities. *Management Science*. 1995, vol. 41, no. 12, s. 1882–1891. ISSN 0025-1909.

BLACK, F.; SCHOLES, M. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. 1973, vol. 81, no. 3, s. 637–654. ISSN 0022-3808.

BOYLE, P. 1977. Options: a Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*. 1977, vol. 4, no. 4, s. 323–338, 1977. ISSN 0304-405X.

BOYLE, P., BROADIE, M., GLASSERMAN, P. 1997. Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1997, vol. 21, no. 8/9, s. 1267–1321. ISSN 0165-1889.

BROADIE, M.; DETEMPLE J. B. 2004. Option Pricing: Valuation Models and Applications. *Managament Science*. 2004, vol. 50, no. 9, s. 1145–1177. ISSN 0025-1909.

CARR, P.; GEMAN, H.; MADAN, D. B.; YOR, M. 2003. Stochastic Volatility for Lévy Processes. *Mathematical Finance*. 2003, vol. 13, no. 3, s. 345–382. ISSN 0960-1627.

CONT, R.; TANKOV, P. 2004. *Financial Modelling with Jump Processes*. London : Chapman & Hall/CRC, 2004. ISBN 15-848-84134.

DUAN, J. C.; SIMONATO, J. G. 1998. Empirical martingale simulation for asset prices. *Managament Science*. 1998, vol. 44, no. 9, 1218–1233, 1998. ISSN 0025-1909.

EBERLEIN, E.; KELLER, U. 1995. Hyperbolic Distributions in Finance. *Bernoulli*. 1995, vol. 1, no. 3, s. 281–299. ISSN 1350-7265.

FAMA, E. F. 1965. The Behaviour of Stock Market Prices. *Journal of Business*. 1965, vol. 38, *no*. 1, s. 34–105. ISSN 0021-9398.

GEMAN, H.; MADAN, D. B.; YOR, M. 2001. Time changes for Lévy processes. *Mathematical Finance*. 2001, vol. 11, no. 1, s. 79–96. ISSN 0960-1627.

GLASSERMAN, P. 2004. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, New York : Springer-Verlag, 2004. ISBN 0-387-00451-8.

HULL, J. C. 2005. *Options, Futures, & other Derivatives*. 6th ed. Upper Saddle river : Prentice Hall. 2005. ISBN 0-13-149908-4.

KEMNA, A. G. Z.; VORST, A. C. F. 1990. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking and Finance*. 1990, vol. 14, no. 1, s. 113–129. ISSN 0378-4266.

MACBETH, J. D.; MERVILLE, L. J. 1979. An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model. *The Journal of Finance*. 1979, vol. 34, no. 5, s. 1173–1186. ISSN 0022-1082.

MADAN, D. B.; MILNE, F. 1991. Option pricing with VG martingale components. *Mathematical Finance*. 1991, vol. 1, no. 4, s. 39–56. ISSN 0960-1627.

MADAN, D. B.; SENETA, E. 1990. The VG model for Share Market Returns. *Journal of Business*. 1990, vol. 63, no. 4, s. 511–524. ISSN 0021-9398.

MADAN, D. B.; CARR, P.; CHANG, E. C. 1998. The variance gamma process and option pricing, *European Finance Review*. 1998, vol. 2, no. 1, s. 79–105. ISSN 1382-6662.

MCKAY, M. D.; CONOVER, W. J.; BECKMAN, R. J. 1979. A comparison of three methods for selecting input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*. 1979, vol. 21, no. 2, s. 239–245. ISSN 0040-1706.

MCLEISH, D. L. 2005. *Monte Carlo Simulation and Finance*. Hoboken : Wiley, 2005. ISBN 0-47-167778-7

RUBINSTEIN, M. 1985. Non-parametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *Journal of Finance*. 1985, vol. 40, no. 2, s. 455–480, 1985. ISSN 0022-1082.
RUBINSTEIN, M. 1994. Implied binomial trees. *Journal of Finance*. 1994, vol. 49, no. 3, s. 771–818. ISSN 0022-1082.
SCHOUTENS, W. 2003. *Lévy processes in Finance*: *Pricing Financial Derivatives*. Chichester : Wiley, 2003. ISBN 978-0-470-85156-2.
STEIN, M. 1987. Large sample properties of simulations using Latin hypercube sampling. *Technometrics*. 1987, vol 29, no. 2, s. 143–151, 1987. ISSN 0040-1706.
TICHÝ, T. 2006. Model Dependency of the Digital Option Replication: Replication under Incomplete Model. *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance*. 2006, vol. 56, no. 7-8, s. 361–379. ISSN 0015-1920.
TICHÝ, T. 2006. *Finanční deriváty – typologie finančních derivátů, podkladové procesy, oceňovací modely*. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 2006. ISBN 80-248-1180-4.

EXAMINATION OF SELECTED IMPROVEMENT APPROACHES TO MONTE CARLO SIMULATION IN OPTION PRICING

Tomáš Tichý, VSB –Technical University of Ostrava, Sokolská 33, CZ - 701 21 Ostrava. (tomas.tichy@vsb.cz)

Abstract
In general, there exist many ways to detect the fair value of financial derivatives. However, each of them is suitable for different purposes. For example, when the payoff function is not very simple or the underlying process is too complex, the approach of Monte Carlo simulation can be useful. Unfortunately, the plain Monte Carlo simulation needs a very high number of independent paths to get reliable results. It is the reason why an improvement of the plain approach should be applied to decrease the number of paths required in order to get reliable results. In this paper we study more closely several such approaches and examine their potential of increasing the efficiency. To be more exact, we apply the antithetic variates method and stratified sampling approaches, including their combinations in order to get the fair price of a plain vanilla call. We consider three distinct underlying processes: geometric Brownian motion, variance gamma model and normal inverse Gaussian model. We also verify the confidence interval for the option price. We did not find any improvements of examined methods for complex processes considering the definition via two or more independent random numbers. However, if the required accuracy is very high, it might be useful to apply the stratification to the distribution function of the complex process.

Keywords
Simulation Monte Carlo, variance reduction methods, options, option pricing, Black and Scholes model, Lévy process, variance gamma model, normal inverse Gaussian model, confidence interval

JEL Classification
C1, G2, G13