POTENCIÁLNÍ PRODUKT, MEZERA VÝSTUPU A MÍRA NEJISTOTY SPOJENÁ S JEJICH URČENÍM PŘI POUŽITÍ HODRICK-PRESCOTTOVA FILTRU

Miroslav Plašil, ČNB a VŠE v Praze*

Úvod

V makroekonomických analýzách se často setkáváme s potřebou rozložit časovou řadu na trendovou a cyklickou složku. Tato potřeba vychází z požadavku oddělit od sebe dlouhodobý vývoj a fluktuace s kratším horizontem. Obě složky jsou potom zpravidla ztotožněny s jistým (přímo neměřitelným) ekonomickým konceptem, přičemž trend je často chápán jako odhad vývoje rovnovážné veličiny a cyklická složka jako dočasná odchylka (mezera) od dlouhodobé rovnovážné trajektorie. V literatuře bylo navrženo několik metod, jak k této problematice přistoupit,[1] přičemž navržené přístupy lze rozdělit do dvou základních skupin: *i)* čistě statistické modely, *ii)* modely vycházející ze strukturálních makroekonomických vztahů. Existují však také metody kombinující do jisté míry rysy obou přístupů.

Pravděpodobně stále nejčastěji používaný způsob dekompozice časové řady v makroekonomické analýze je založen na aplikaci Hodrick-Prescottova filtru (Hodrick a Prescott 1980, 1997, dále HP filtr). I když nekritické použití HP filtru může být v důsledku některých nežádoucích vlastností[2] problematické, patřila jeho aplikace v posledním desetiletí ke standardu a i nadále se díky své jednoduchosti těší poměrně velké oblibě. Mezi často kritizované vlastnosti HP filtru patří jistá arbitrárnost ve volbě parametru vyhlazení, jehož hodnota se může výrazně promítnout do výsledků, dále zkreslení na koncích časové řady (*end-point bias*) a riziko vytváření neexistujících cyklů. V odborné literatuře již lze nalézt postupy, jak negativní dopady výše uvedených vlastností alespoň částečně minimalizovat. Jiným z obecných nedostatků HP filtru, který zatím nebyl uspokojivě řešen, je nemožnost kvantifikovat míru nejistoty spojenou s odhadem.[3] Výstupem HP filtru je pouze bodový odhad spjatý s konkrétním výběrem (časovou řadou), což nedovoluje učinit některé závěry obecnější po-

* Názory vyjádřené v tomto článku jsou názory autora a neodráží oficiální pozici či stanoviska České národní banky.

1 Přehled metod dekompozice časové řady k identifikaci hospodářského cyklu přináší např. Billmeier (2004).

2 Tyto vlastnosti budeme detailněji rozebírat v kapitole 1, kde jsou také uvedeny odkazy na relevantní literaturu. V přehledu literatury je kladen důraz na práce nabízející řešení, jak negativní vlastnosti HP filtru minimalizovat.

3 V dalším textu používáme slovo odhad, i když ve striktním statistickém smyslu o odhad nejde, protože u latentních proměnných s rozsahem výběru není zajištěna konvergence ke *skutečným* hodnotám.

vahy. Pokud například výsledek v jistém období při odhadu potenciálního produktu indikuje kladnou mezeru výstupu, nelze s předem zvolenou pravděpodobností tvrdit, že se ekonomika v daném období skutečně nachází nad potenciálem a nikoli pod či na jeho úrovni. Pro podobný typ úvah je nutné kromě samotného bodového odhadu identifikovat míru jeho variability a stanovit intervaly spolehlivosti. V tomto článku je navržen jednoduchý, prakticky aplikovatelný postup, jak uvedený nedostatek řešit a jak intervaly spolehlivosti pro HP filtr získat (pro trend i cyklickou složku). Navržená metoda spočívá v přímé aplikaci HP filtru na bootstrapové výběry získané pomocí tzv. ME bootstrapu (*Maximum Entropy bootstrap*, navržený v práci Vinod, 2004, 2006). Výhodou této bootstrapové techniky je možnost generovat bootstrapové výběry pro stacionární, ale také nestacionární časové řady, přičemž tato vlastnost nemusí být před konstrukci bootstrapových výběrů předem testována.[4] Intervaly spolehlivosti dále zvyšují využitelnost HP filtru v makroekonomických analýzách. Navržený postup však není díky své obecnosti omezen pouze na využití pro HP filtr, ale je možné jej použít také pro další často používané statistické filtry, jako je např. filtr Baxterové a Kinga (1999) apod.

Článek je rozdělen do čtyř kapitol. První kapitola přináší popis HP filtru a shrnuje jeho základní vlastnosti. Pokud je čtenář s touto problematikou obeznámen, může tuto část přeskočit a přejít ke druhé kapitole, ve které je popsán navrhovaný postup získání intervalů spolehlivosti a vysvětlena myšlenka ME bootstrapu. Zároveň se na tomto místě snažíme ukázat, že dřívější pokusy o získání intervalů spolehlivosti pro HP filtrované řady nemohou být považovány za účinné, protože jejich použití vede u cyklické složky k neopodstatněným interpretacím. Ve třetí kapitole je nově navržená metoda použita k získání intervalů spolehlivosti pro mezeru výstupu a meziročního tempa růstu potenciálního produktu, a to při aplikaci na čtvrtletní data HDP České republiky a eurozóny. Obdržené výsledky přinášejí zpřesněný pohled na průběh ekonomického cyklu od roku 1996 a poněkud střízlivější hodnocení, pokud jde o vývoj mezery výstupu v tomto období. Konkrétně ukazujeme, že tradiční „bodové“ výstupy HP filtru je nutné interpretovat s jistou opatrností, když v některých čtvrtletích je odhad spojen s velmi vysokou mírou nejistoty. V následné diskuzi jsou na základě provedeného odhadu komentovány vlastnosti navrhované metody a naznačeny směry jejích možných modifikací.

1. Hodrick-Prescottův filtr a jeho vlastnosti

Předpokládejme, že (logaritmovanou[5]) časovou řadu x_t, $t = 1, 2, ..., T$ lze vyjádřit jako součet trendové a cyklické složky:

4 Stejně tak není obecně nutné zkoumat přítomnost a následně povahu strukturních zlomů.

5 Provedení logaritmické transformace má kromě jiného interpretační důvody: rozdílem dvou sousedních pozorování logaritmované řady lze aproximovat tempo růstu v daném období a cyklickou složku je možné chápat jako procentní odchylku od trendu.

$$x_t = y_t + c_t. \tag{1}$$

Hodrick-Prescottův filtr z časové řady extrahuje trendovou složku y_t^{HP} (dále HP trend) jako řešení optimalizačního problému, ve kterém je minimalizována účelová funkce:

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left(x_t - y_t^{HP}\right)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[\left(y_{t+1}^{HP} - y_t^{HP}\right) - \left(y_t^{HP} - y_{t-1}^{HP}\right)\right]^2 \tag{2}$$

V zásadě jde o dvoukriteriální optimalizační úlohu, ve které jsou minimalizovány odchylky hledaného HP trendu od napozorovaných hodnot časové řady a současně také druhé diference HP trendu, tak aby byl jeho průběh v čase co „nejhladší". Relativní váha, která je jednotlivým kriteriím přisouzena, závisí na hodnotě parametru vyhlazení $\lambda \in [0;\infty)$. Pokud $\lambda \to 0$, druhý člen účelové funkce (2) přestává hrát v minimalizaci roli a odhad HP trendu se blíží původní řadě x_t. Pokud naopak $\lambda \to \infty$, veškerá váha je přiřazena druhému členu a HP trend se redukuje do podoby lineárního trendu.[6] V případě nízkých hodnot parametru vyhlazení λ je tedy většina variability původní časové řady obsažena v HP trendu, v případě vysokých hodnot je tomu naopak.

Nevýhodou HP filtru je, že optimální hodnota parametru vyhlazení není před samotnou aplikací známá. Jistým standardem pro čtvrtletní data se stala hodnota 1600, která je doporučena v původní práci Hodricka a Prescotta (1997). Tato hodnota nicméně byla původně vztažena výhradně k datům popisující hospodářský cyklus v USA a její obecné použití tak může být sporné. V literatuře lze nalézt „doporučené" hodnoty také pro jiné frekvence, ovšem v tomto případě na nich již nepanuje tak vzácná shoda jako u čtvrtletních dat (srovnej např. s debatou v Ravn a Uhlig, 2002, str. 1). Problém volby parametru λ (zejména pro mezinárodní srovnání výsledků) se snažili řešit Marcet a Ravn (2004), kteří navrhují vyjít z předem zvoleného konstantního podílu mezi variabilitou druhých diferencí (akcelerace HP trendu) a variabilitou cyklické složky. Naopak Schlicht (2005) navrhl přímý odhad parametru λ na základě dat (při přijetí jistých předpokladů), a to metodou maximální věrohodnosti i momentovou metodou. Na jeho práci později navázali Dermoune et al. (2008), kteří navrhli další dva konzistentní estimátory. Zcela jiný přístup byl zvolen v práci Peige a Trindade (2010), kde autoři při odhadu λ vyšli z ekvivalence mezi HP filtrem a modelem s penalizačními spliny s vhodně zvolenými uzly.

Kromě výše uvedené ekvivalence lze dále ukázat, že HP filtr je speciálním případem také jiných filtrů či modelů: v této souvislosti je HP filtr nejčastěji uváděn (viz např. Harvey a Trimbur, 2008) jako speciální případ modelu nepozorovaných stavů (*unobserved component model*). Parametry tohoto modelu je možné odhadnout s využitím Kalmanova filtru, odhad parametru touto cestou však není v praxi doporučován, protože většinou vede k velmi nízkým hodnotám (viz Harvey a Jaeger, 1993, nebo Schlicht, 2005).

6 Druhé diference HP trendu lze vyjádřit také ve tvaru: $2\left[\frac{\left(y_{t+1}^{HP} - y_{t-1}^{HP}\right)}{2} - y_t^{HP}\right]$, tedy jako rozdíl mezi lineární interpolací dvou sousedních pozorování a y_t^{HP}. Je proto zřejmé, že druhý člen ve (2) bude minimální (roven nule), pokud všechny body budou ležet na přímce.

Pokud je hodnota parametru vyhlazení λ určena (či předem arbitrárně zvolena), je řešení minimalizačního problému (2) již poměrně snadnou záležitostí. Danthine a Girardin (1989) ukázali, že řešení (2) pro HP trend lze vyjádřit ve tvaru:

$$\boldsymbol{y}^{HP} = \left[\boldsymbol{I} + \lambda \boldsymbol{K}' \boldsymbol{K} \right]^{-1} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad [y_1^{HP}, y_2^{HP}, ..., y_T^{HP}]' \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, ..., x_T]'$, $y^{HP} = [y_1^{HP}, y_2^{HP}, y_T^{HP}]'$, $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice řádu T x T a $\boldsymbol{K}$ je matice o rozměru T-2 x T, pro jejíž prvky k_{ij} platí: $k_{ij} = 1$ pro $i = j$, resp. $i = j+2$, $k_{ij} = -2$ pro $i = j+1$ *a* $k_{ij} = 0$ jinak. Ze vztahu (3) vyplývá, že HP trend je dán součinem matice vah $\boldsymbol{A}$ a vektoru pozorování $\boldsymbol{x}$. Váhy přitom nejsou závislé na datech a jsou jednoznačně určeny parametrem vyhlazení λ (a délkou časové řady). Při daném T a λ není obtížné prostým dosazením do vztahu (3) ověřit, že váhy jsou pro prostřední hodnoty HP trendu vždy symetrické a že s pohybem směrem ke koncům časové řady se filtr stává jednostranným (nesymetrickým). Důsledkem této vlastnosti je problematické chování filtru na koncích časové řady, kdy dochází v jistém smyslu k vychýlení odhadu trendu. Nepříjemným důsledkem tohoto chování jsou významné revize v odhadnutých hodnotách trendu y_{T-1}^{HP} a y_T^{HP} v okamžiku, kdy jsou k dispozici nová pozorování časové řady (x_{T+1}, x_{T+2}…). Zejména v případech, kdy v čase T dochází ke změně trendu, mohou být revize oproti původnímu odhadu značné. Na významu tato skutečnost nabývá především v případech, kdy filtr má sloužit tvůrcům hospodářské politiky jako podkladový nástroj pro jejich rozhodování, tj. v případech, kdy je vyžadována důkladná znalost aktuálního stavu. Skutečnost, že odhad vývoje v posledních čtvrtletích je podroben největším revizím, zvyšuje nejistotu ohledně aktuální pozice ekonomiky a limituje použití HP filtru.

Nejčastějším postupem (Kaiserová a Maravall, 1999), jak problém koncového chování filtru řešit, je prodloužení výchozí časové řady o předpovědi (např. na základě modelu ARIMA) a následná aplikace HP filtru na prodlouženou řadu. Pokud jsou však předpovědi vychýlené[7], nepřináší tento postup příliš dobré výsledky. V případě, že existují pochybnosti o přesnosti předpovědí, je možné použít alternativní postup, který navrhl Bruchez (2003). Tento postup vychází z úpravy hodnoty parametru λ pro dvě koncová pozorování časové řady (na obou koncích). Podstata návrhu spočívá v myšlence kompenzovat vysoké váhy pro odhad trendu, které jsou přiřazeny posledním pozorováním, vyšší penalizací variability trendu v tomto období. Jak bylo v práci demonstrováno, tento postup problém zkreslení na konci řady podstatně snižuje, ovšem za cenu vzniku některých dodatečných obtíží (blíže viz Bruchez, 2003).

Vedle výše uvedených problémů je třeba vzít v úvahu výsledky studií (např. King a Rebelo, 1993; Harvey a Jaeger, 1993; Cogley a Nason, 1995), které dokládají, že chování HP filtru je v některých případech problémové a vede ke vzniku neexistujících (falešných) cyklů.[8] Ze statistické povahy HP filtru také vyplývá nemožnost využít při

7 Tato situace může nastat v okamžiku přechodu z jedné fáze cyklu do druhé, kdy je problém s koncovými hodnotami HP trendu nejzávažnější. Aplikace tohoto postupu tak v tomto případě dále prohlubuje problémy HP filtru.

8 Toto stanovisko není v literatuře zcela jednotné. Např. Kaiserová a Maravall (1999) polemizují, že kritika vzniku neexistujících cyklů je neoprávněná.

odhadu strukturální ekonomické informace, což do jisté míry omezuje jeho interpretační možnosti. Z těchto důvodu by aplikace HP filtru neměla být zcela automatická a nekritická a měly by být zváženy alternativní možnosti odhadu. Přesto existují praktické důvody, proč HP filtr použít, mezi které patří:

- Konstrukční jednoduchost a snadná implementace – HP filtr může sloužit jako nástroj prvotní (explorační) analýzy, která může výzkumníka navést k výběru pokročilejších technik.
- Neexistence relevantního ekonomického modelu, který by dovoloval odhadnout neměřitelné veličiny jiným způsobem.
- Požadavek nezávislosti na ekonomické teorii – pokud je nutné ověřit výchozí teorii, měla by být k dispozici metoda odhadu neměřitelných veličin, která je na této teorii nezávislá.[9]
- Použití HP filtru k získání mezivýstupu – filtrace veličin vstupujících do strukturálních modelů.
- Jednodušší predikce budoucích hodnot nepozorovatelných veličin – protože HP filtr patří mezi jednorozměrné metody, stačí k získání budoucích hodnot nepozorovaných veličin provést předpovědi pouze pro jednu časovou řadu. U vícerozměrných filtrů nemusí být získání předpovědí pro všechny vysvětlující proměnné vždy snadné.

2. ME bootstrap a konstrukce intervalů spolehlivosti

Vzhledem k formulaci minimalizační úlohy (2), z níž HP filtr vychází, je metoda bootstrap[10] prakticky jedinou možností, jak intervaly spolehlivosti získat.[11] Myšlenka použití bootstrapu není úplně nová, i když literatura v této oblasti není příliš bohatá. Pravděpodobně jedinou relevantní referencí je práce Gallego a Johnson (2005), kde autoři navrhli nepřímý algoritmus, který je schematicky popsán v grafu 1. Stručně jej lze popsat takto: nejdříve je původní řada pomocí HP filtru dekomponována na trend a cyklickou složku. Protože cyklická složka je stacionární,[12] lze její bootstrapové repli-

9 Typickým příkladem je vztah mezi mezerou výstupu a inflací. K určení mezery výstupu je míra inflace v rámci složitějších modelů často využívána jako vysvětlující proměnná. Pokud je úkolem statisticky ověřit skutečný vztah mezi inflací a mezerou výstupu, je použití takto získané mezery výstupu problematické, protože její odhadnuté hodnoty již jsou do jisté míry na specifikaci vztahu mezera výstupu – inflace závislé.

10 Čtenáře, který není seznámen s principy metody bootstrap, lze odkázat na Efron a Tibshirani (1993), nebo na řadu úvodních kurzů, volně dostupných na internetu.

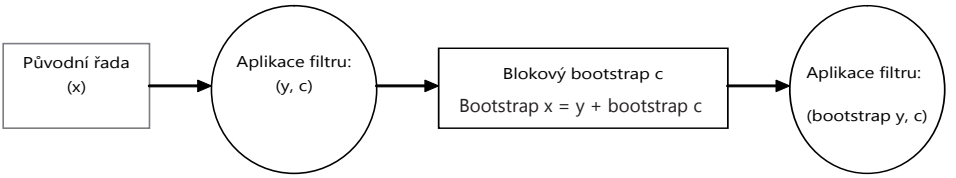
11 Jak již bylo uvedeno, teoreticky je možné dát HP filtru interpretaci modelu nepozorovaných stavů a odhadnout intervaly spolehlivosti s využitím Kalmanova filtru. V praxi je však tento přístup obtížný (viz výše). Jistým řešením může být využití apriorní informace o hodnotě parametru vyhlazení a odhad bayesovskými technikami (Trimbur, 2006 – viz také krátká diskuze v poslední kapitole).

12 King a Rebelo (1993) ukázali, že pokud je původní řada integrována do řádu čtyři, vede aplikace HP filtru (ve velkých výběrech) k stacionární cyklické složce.

kace získat pomocí tradičních bootstrapových technik. Z důvodu požadavku alespoň částečně zachovat v bootstrapových výběrech strukturu závislosti mezi sousedními pozorováními, použili autoři k jejich generování blokový bootstrap (Carlstein, 1986; Künsch, 1989). Vytvořená bootstrapová řada cyklické složky je přičtena k původně získanému HP trendu a následně je na tuto uměle zkonstruovanou řadu opět aplikován HP filtr. Tímto způsobem je možné získat libovolně velké množství bootstrapových výběrů pro trend a cyklickou složku, na jejichž základě lze stanovit pro každý časový okamžik z indexní řady 1,2,…, *T* bootstrapové intervaly spolehlivosti.

I když uvedený postup vypadá logicky, pokusíme se ukázat, že bootstrapové intervaly pro cyklickou složku nejsou *skutečnými* intervaly spolehlivosti a nemají v tomto směru ani žádnou vypovídací schopnost. Protože HP filtr je používán zejména jako metoda detrendace časové řady, kdy právě cyklická složka bývá hlavním předmětem zájmu, znamená toto omezení závažné důsledky pro použití metody v praxi. K demonstraci uvedeného tvrzení byly převzaty výsledky z Gallego a Johnson (2005), které ukazují intervaly spolehlivosti pro mezeru výstupu německé ekonomiky – viz graf 2 (pro všechny ostatní země, které byly v citované práci zpracovány, vykazuje metoda obdobné vlastnosti). Na první pohled je patrné, že tyto intervaly nelze chápat v klasickém smyslu, tj. jako intervaly zkonstruované kolem bodového odhadu, neboť v některých obdobích se bodový odhad pohybuje mimo jejich hranice. Na této vlastnosti je nicméně založena interpretace autorů: pokud bodový odhad překročí zkonstruovaný interval, znamená to, že v daném období dochází k významnému otevření mezery kladným nebo záporným směrem. Níže demonstrujeme, že tato interpretace není oprávněná, protože algoritmus má prostě tendenci nechat z intervalů vystoupit velmi vysoké a nízké hodnoty, přičemž konkrétní mez závisí na tom, jak často se tyto hodnoty v časové řadě nacházejí. Ex ante je přitom vyloučena možnost, že by pro některá období mohla být statisticky významná hodnota relativně blízká nule. Podíváme-li se navíc na cyklický průběh intervalů, nezdá se, že by se shodoval s kolísáním odhadnuté cyklické složky: např. pro rok 1973, kdy cyklická složka dosahuje svého lokálního minima, se intervaly spolehlivosti naopak nachází ve svém lokálním maximu. Vlastní simulace[13] na datech za ČR nabízí vysvětlení této skutečnosti: cyklický průběh intervalů spolehlivosti záleží spíše na délce bloku v blokovém bootstrapu než na skutečném průběhu cyklické složky.

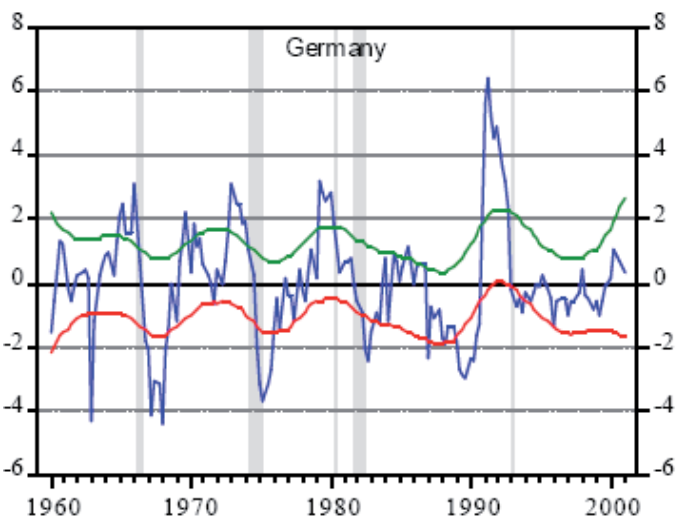
Graf 1
Původní algoritmus získání intervalů spolehlivosti (Gellego a Johnson (2005))



13 Simulace nejsou součástí textu, ale lze je na vyžádání zaslat.

Chování intervalů spolehlivosti navržených v práci Gellego a Johnson (2005) má jednoduché intuitivní vysvětlení: protože cyklická složka ze své konstrukce zpravidla obsahuje přibližně stejně časté úseky kladných a záporných hodnot, dostanou se v bootstrapových výběrech při aplikaci blokového bootstrapu (překrývající se bloky) oba typy hodnot postupně na všechny pozice indexní řady 1, 2, … *T*, a to v relativně rovnoměrném rozložení. To je důsledek skutečnosti, že blokový bootstrap nezachovává „tvar“ cyklu v čase. Při náhodném výběru bloků se tak v bootstrapovém výběru vrchol a sedlo cyklu mohou vzájemně prohodit a dostat na libovolnou pozici. Při konstrukci bootstrapových intervalů spolehlivosti pro daný časový okamžik potom bude typické bootstrapové rozdělení vždy obsahovat jak kladné, tak záporné hodnoty. Interval proto bude více méně symetrický kolem nuly a bude po celé délce zhruba stejně široký. Tento interval budou přesahovat pouze extrémní hodnoty původní časové řady, které mají kvůli svému řídkému výskytu relativně nižší šanci se do bootstrapového výběru v blokovém schématu dostat. Z tohoto důvodu se na jednotlivých pozicích indexní řady objevují relativně zřídka a při konstrukci (1– α) % intervalu jsou z rozdělení „uříznuty“. Na šíři intervalu proto mají relativně malý vliv a samy zůstávají nad stanoveným intervalem.

Graf 2
Intervaly spolehlivosti pro HP filtr

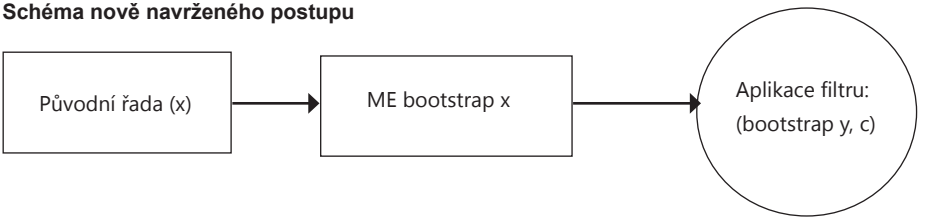


Zdroj: převzato z Gellego a Johnson (2005), s. 744.

Uvedené nežádoucí vlastnosti nepřímého algoritmu získání intervalů nás vedou k návrhu nové metody jejich konstrukce. Protože problematickým místem výchozího postupu byla aplikace blokového bootstrapu na cyklickou složku, je původní algoritmus upraven (a zjednodušen) tak, že metoda bootstrap je aplikována přímo na původní řadu

pozorování. Následně je na každý bootstrapový výběr aplikován HP filtr, což umožňuje získat libovolně velký počet „nezávislých“ bootstrapových replikací pro trendovou i cyklickou složku (viz graf 3). Aby však bylo možné tento postup použít, je nutné upravit metodu generování bootstrapových výběrů. Použití přímého algoritmu, popsaného v grafu 3, nebylo dříve myslitelné, protože obecně nebyla známa účinná metoda získání bootstrapových výběrů pro nestacionární časové řady. Řešení tohoto problému navrhl Vinod (2004, 2006), jehož algoritmus využívá dvojité třídění a výběr pozorování z odhadnuté hustoty pravděpodobnosti, která splňuje princip maximální entropie (ME).

Graf 3
Schéma nově navrženého postupu



Podstatu Vinodovy metody generování bootstrapových výběrů lze popsat prostřednictvím následujících kroků.[14] V prvním kroku je původní časová řada setříděna od nejmenšího pozorování po největší, přitom je uložen třídící vektor, který dovoluje pozdější převod jednotlivých pozorování na původní místo. Ve druhém kroku je pro setříděná pozorování zkonstruována hustota pravděpodobnosti (resp. distribuční funkce) respektující princip maximální entropie. Tento princip spočívá v nalezení takové hustoty pravděpodobnosti, která splňuje vzhledem k datům předem stanovené požadavky, ale jinak zůstává maximálně neinformativní. Pro generování smysluplných bootstrapových hodnot jsou zavedena dvě kriteria: *i*) průměr spočítaný ze všech bootstrapových řad odpovídá průměru původní časové řady, *ii*) pravděpodobnost výběru libovolného pozorování výchozí časové řady je identická s pravděpodobností výběru hodnot v okolí daného pozorování. Hustota pravděpodobnosti respektující výše uvedené principy je při znalosti množiny setříděných pozorování určena jednoznačně a skládá se z po částech rovnoměrných rozdělení. Ve třetím kroku je z odhadnuté hustoty pravděpodobnosti[15] generován bootstrapový výběr o délce T (stále setříděný od nejmenší hodnoty po největší). V posledním kroku je získaný bootstrapový výběr přeorganizován na základě třídícího vektoru z prvního kroku tak, aby zůstal zachován charakter vývoje zkoumané časové řady. Dostatečně velký počet bootstrapových výběrů potom aproximuje výběrový prostor (populaci) odpovídající původní časové řadě.

14 Zde uvedený postup je pouze schematický, plnohodnotný sedmikrokový algoritmus je uveden ve Vinod, López-de-Lacalle (2009) – zde lze pro snadnější pochopení rovněž nalézt jednoduchý ilustrativní příklad.

15 Resp. z distribuční funkce. Výběr je prováděn tak, že pomocí generátoru náhodných čísel je vygenerováno T náhodných čísel z intervalu nula až jedna, které se setřídí od nejmenšího po největší. Následně je nalezen kvantil odhadnutého rozdělení odpovídající náhodně vygenerovaným a setříděným hodnotám.

Při posuzování vhodnosti ME bootstrapu k získání intervalů spolehlivosti pro HP filtr je nutné zabývat se vlastnostmi bootstrapových výběrů. Tyto vlastnosti jsou shrnuty ve Vinod a López-de-Lacalle (2009). Pro konstrukci intervalů je podstatné, že bootstrapové protějšky původní časové řady si zachovávají obdobný „tvar" s touto řadou, což se mj. projevuje ve velmi podobném průběhu autokorelačních funkcí (ACF a PACF) a také ve velmi podobném cyklickém chování (obdobné periodogramy). Proto platí, že při použití ME bootstrapu nedochází k přeházení jednotlivých fází cyklu, když fáze expanze a recese zůstávají ukotveny v čase na původním místě. ME bootstrap přináší i další výhody, které jsou při našem použití přínosné (viz Vinod, 2006):

- U tradičních bootstrapových technik je bootstrapový výběr sestaven pouze z pozorování již obsažených v původním výběru. V reálných situacích však není žádný důvod domnívat se, že hodnoty v okolí hodnot původního výběru jsou nemožné. Jejich systematické vyřazení z bootstrapových výběrů je proto stěží obhajitelné.
- Při malé variabilitě původního výběru (časové řady) není možné generovat dostatečné množství „odlišných" bootstrapových replikací. Možnost vybrat hodnoty blízké hodnotám v původní časové řadě tuto negativní vlastnost částečně odstraňuje.
- Tradiční bootstrap generuje výběry, jejichž rozsah je omezen nejnižší a nejvyšší hodnotou ve výchozím výběru. Protože u časových řad je tento rozsah náhodný, nelze a priori vyloučit také vyšší či nižší hodnoty. Algoritmus bere tuto skutečnost v úvahu a pracuje s vhodně zvolenými, širšími intervaly.

3. Intervaly spolehlivosti pro potenciální produkt a mezeru výstupu

Odhad přímo nepozorovatelných veličin jako potenciální produkt či mezera výstupu je spojen s poměrně velkou mírou nejistoty a může být zatížen značnými chybami. Kromě samotných problémů s vymezením veličin z teoretického hlediska přispívá k nejistotě absence jednoznačného vodítka, kterou metodu v praxi k odhadu zvolit a jak případně nastavit volitelné parametry. I přes celou řadu kritiků (viz blíže první kapitola) je HP filtr poměrně robustní metodou, která při extrakci potenciálního produktu a cyklické složky zpravidla poskytuje akceptovatelné výsledky, a zůstává tak při určení potenciálního produktu jakousi výchozí metodou, vůči níž jsou ostatní metody poměřovány (srovnej např. se Scott, 2000b, nebo Ravn a Uhlig, 2002). V současné literatuře věnující se problematice empirického určení mezery výstupu prakticky nenajdeme práci, která by HP filtr alespoň okrajově nezmiňovala a rutinně je používán také v českém prostředí (viz např. Hájek a Bezděk, 2000; Čapek, 2007; jako podpůrná metoda je využíván také v ČNB a v řadě dalších institucí).

I když HP filtr patří mezi čistě statistické přístupy bez přímé vazby na ekonomickou teorii, měl by si být výzkumník vědom, jaké předpoklady automatickým použitím této metody mlčky akceptuje. Předně je nutné přijmout předpoklad, že úroveň potenciálního produktu je možné poměrně přesně aproximovat dlouhodobým (stochastickým) trendem

obsaženým v časové řadě.[16] Konkrétní úroveň potenciálního produktu a jeho „hladkost" potom záleží na hodnotě parametru lambda, který může být chápán jako poměr mezi variabilitou nabídkových a poptávkových šoků (viz např. Scott, 2000b, str. 4).

Níže je pomocí HP filtru proveden odhad tempa růstu potenciálního produktu a mezery výstupu pro českou ekonomiku a eurozónu. Výsledkem však není bodový odhad samotný, který je dnes běžně publikován (viz např. Zprávy o inflaci ČNB): přínosem jsou získané intervaly spolehlivosti a (re)interpretace výsledků z jejich pohledu. Pro odhad byla použita sezónně očištěná čtvrtletní data za období Q1 1996 – Q3 2010. Pramenem dat je Český statistický úřad a ECB. Všechny výpočty byly provedeny ve statistickém prostředí R; pro generování bootstrapových výběrů byl využit doplňkový balíček *meboot* (Vinod a López-de-Lacalle, 2009). Pro každou časovou řadu bylo generováno 5000 bootstrapových výběrů.[17]

Při aplikaci HP filtru na čtvrtletní data byla z důvodu srovnatelnosti primárně zvolena pro parametr vyhlazení standardní hodnota $\lambda = 1600$.[18] Aby byl minimalizován problém vychýlení HP trendu na konci časové řady, byla řada HDP před filtrací prodloužena o předpovědi na čtyři období. Ty byly získány na základě modelu ARIMA(1,1,0).[19] Prodloužení řady o předpovědi bylo provedeno s ohledem na využitelnost výsledků při ekonomickém rozhodování v „reálném" čase, kdy vychýlení na konci časové řady není žádoucí. K získání 90% intervalů spolehlivosti z vygenerovaných bootstrapových výběrů byl použit percentilový bootstrap. Ostatní metody získání intervalů (např. Hyndman, 1996) však vedly k obdobným výsledkům při delším výpočetním čase.

Výsledky jsou v grafické podobě prezentovány v grafu 4 (horní panel: odhad mezery výstupu a meziročního tempa růstu potenciálního produktu pro Českou republiku, dolní panel pro eurozónu). Již rychlý pohled na výsledky naznačuje, že s odhadem nepozorovatelných veličin je spojena poměrně vysoká míra nejistoty. Její úroveň v čase kolísá, když šíře intervalů spolehlivosti není v jednotlivých obdobích obecně konstantní. Zaměříme-li se na vývoj odhadnutých veličin, je možné pozorovat, že meziroční tempo růstu potenciálního produktu české ekonomiky po rychlém nárůstu v polovině první dekády začalo následně klesat, nicméně v posledních čtvrtletích již dochází k postupnému zpomalování tohoto poklesu, a to až téměř k jeho úplnému zastavení. Odhad meziročního tempa růstu se ve 3. čtvrtletí 2010 pohybuje v rozmezí 0,4–2,5 %. Přes poměrně vysokou nejistotu ohledně konkrétní výše lze považovat meziroční přírůstky za kladné. Naproti tomu růst potenciálního produktu v ekonomice eurozóny

16 A naopak, že mezeru výstupu lze aproximovat cyklickým chováním řady kolem odhadnutého dlouhodobého trendu. Z teoretického hlediska není tento předpoklad všeobecně akceptován (viz např. Cannova (1998)), empirickou identifikaci cyklu a potenciálního produktu však výrazně zjednodušuje.

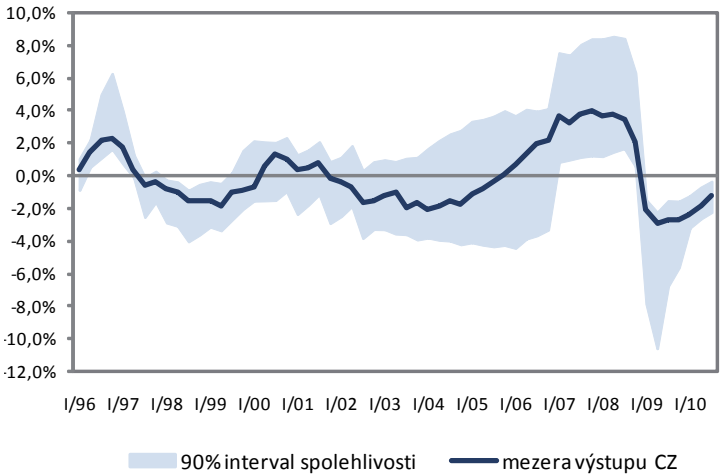
17 Doporučovaný počet bootstrapových výběrů je závislý na konkrétní aplikaci. Hodnota 5000 je zvolena vysoce nad běžná doporučení. Šíře intervalů nicméně není v našem případě na počtu replikací příliš závislá a obdobné výsledky lze obdržet již při použití 500 replikací.

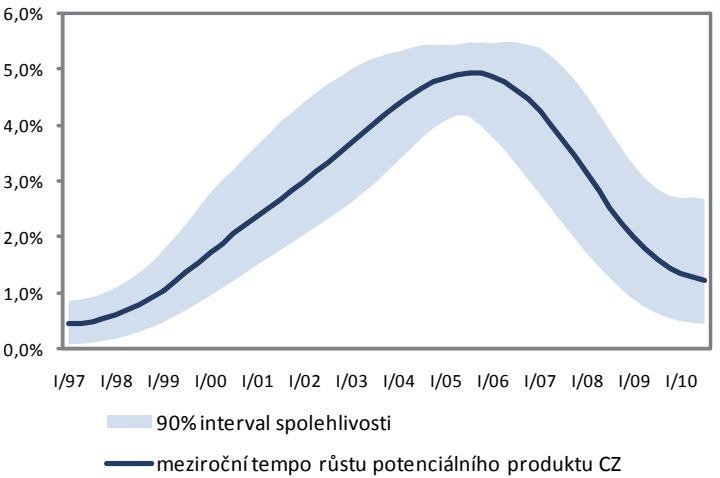
18 K problematice volby parametru vyhlazení se ještě vrátíme na konci kapitoly. Pokusy odhadnout parametr vyhlazení na základě dat nevedly k uspokojivým výsledkům.

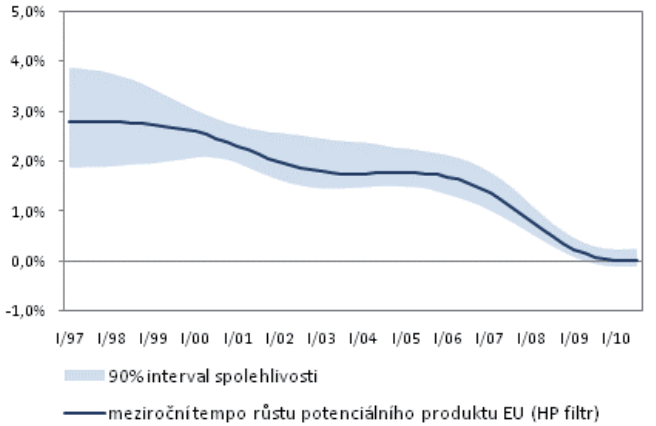
19 V rámci jednoduchých modelů jde o model s nejnižší hodnotou AIC kriteria.

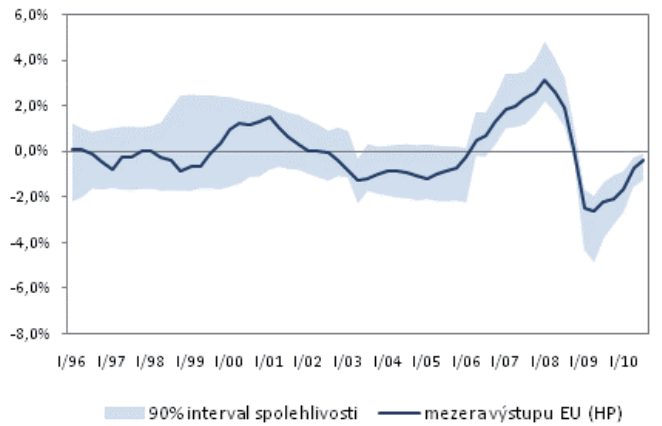
v celém sledovaném období pozvolně meziročně klesá a v současnosti v meziročním vyjádření prakticky stagnuje na nulové hodnotě. Srovnáme-li vývoj meziročního tempa růstu potenciálního produktu v obou ekonomikách, je zřejmé, že odhad pro českou ekonomiku je v posledních čtvrtletích spojen s významně vyšší mírou nejistoty.

Graf 4
Intervalový a bodový odhad mezery výstupu a potenciálního produktu









Pramen: ČSÚ, ECB, vlastní výpočty

Zajímavé je z pohledu intervalů spolehlivosti hodnocení vývoje mezery výstupu. Bodový odhad signalizuje pro českou ekonomiku cyklické chování se třemi obdobími nad a pod úrovní potenciálního produktu. Zohledníme-li však variabilitu odhadu získaného pomocí HP filtru, obrázek o vývoji ekonomiky se pozmění: výsledky indikují po mírném přehřátí a následném překmitnutí do záporu (druhá polovina devadesátých let) poměrně dlouhé období, kdy mezera výstupu není statisticky různá od nuly. V tomto období jsou také intervaly spolehlivosti nejširší. K statisticky významnému otevírání mezery směrem do kladných hodnot došlo až na počátku roku 2007 a náznaky přehřívání trvaly do začátku roku 2009, kdy se v důsledku dopadů finanční krize na reálnou ekonomiku mezera výstupu rychle uzavřela a naopak došlo k jejímu prudkému otevírání směrem do záporu. V této souvislosti si je možné povšimnout, že s HP filtrem je konzistentní i menší míra přehřátí v letech 2007 a 2008 a naopak možnost

vyššího propadu v následném období, než indikuje výchozí bodový odhad.[20] Důležitým zjištěním rovněž je, že k fázi statisticky významného přehřívání začalo docházet ve srovnání s bodovým odhadem až později (1. čtvrtletí 2007 versus 4. čtvrtletí 2005). Ekonomika se po důsledcích finanční krize v posledním sledovaném čtvrtletí stále nachází pod potenciálním produktem, když mezera výstupu je statisticky významně otevřená směrem do záporu; výsledky však naznačují postupné uzavírání mezery výstupu a posun skutečného výstupu směrem k hodnotám potenciálního produktu. Nejistota ohledně míry otevření mezery do záporu je však poměrně velká – šíře intervalů se ve 3. čtvrtletí 2010 pohybuje zhruba kolem dvou procentních bodů.

Vývoj mezery výstupu eurozóny je možné z hlediska intervalů spolehlivosti hodnotit obdobně, jejich šíře je však významně menší a nejistota ohledně vývoje nižší. Za povšimnutí stojí také pozorovatelný předstih ve vývoji mezery výstupu ve srovnání s českou ekonomikou, když k statisticky významnému přehřívání ve druhé půli první dekády začalo docházet dříve. Stejně tak se dříve než v české ekonomice projevily známky finanční krize a s tím spojený následný pokles skutečného produktu pod potenciál.

K ověření, zda zkonstruované intervaly nesou věrohodnou a užitečnou informaci, je účelné porovnat výsledky (alespoň v hrubých rysech) s dalšími pracemi, ve kterých byly intervaly získány pomocí jiných metod. Poměrně důkladně se mírou přesnosti bodových odhadů v souvislosti s mezerou výstupu zabývá např. Scott (2000a), který odhadl parametry strukturálního modelu (4 proměnné) s nepozorovanými stavy s využitím Kalmanova filtru. Základní závěry jsou shodné s těmi, které jsou uvedeny výše pro HP filtr: míra nejistoty ohledně odhadů je poměrně vysoká a šíře intervalů se v čase mění. Zajímavým zjištěním článku Scott (2000a) bylo, že šíře intervalů není nejvyšší v bodech zvratu, kdy dochází k přechodu mezery výstupu ze záporu do kladných hodnot či naopak, ale v následném období či v období, kdy je vývoj skutečného produktu shodný s trendem potenciálního produktu. Tato vlastnost se zdá být do značné míry potvrzena také pomocí navržených intervalů spolehlivosti pro HP filtr. Obecně se zdá být míra nejistoty vysoká v situacích, kdy dochází k velmi pozvolným a mírným změnám v pozici mezery výstupu, a naopak nízká, pokud ve vývoji produktu dochází k prudkým výkyvům. Nápadný je v tomto ohledu zejména velmi úzký interval spolehlivosti v období spojeném s bezprostředními dopady finanční krize, tj. v období uzavírání kladné mezery a jejího překmitnutí do záporných hodnot. Je třeba zmínit, že k intervalům s podobnými rysy dospěly také práce vycházející z jiných metod: za eurozónu se nabízí srovnání např. s článkem IMF Beneš et al. (2010), (strukturální model s nepozorovanými stavy odhadnutý bayesovskými technikami). Porovnáme-li povahu takto získaných intervalů spolehlivosti s intervaly získanými na základě HP filtru, je možné tvrdit, že vykazují obdobné charakteristické rysy, včetně velmi úzkých intervalů v období bezprostředně souvisejícím s finanční krizí.

I když srovnání s jinými metodami je spíše orientační, výsledky naznačují, že navržená metoda poskytuje smysluplné intervaly spolehlivosti, ze kterých vyplývá, že

20 Tyto výsledky vychází na základě některých alternativních strukturálních modelů odhadovaných přes Kalmanův filtr (viz např. Zpráva o inflaci I/2011, ČNB).

při hodnocení výsledků na základě bodového odhadu je na místě opatrnost. Šíře intervalů je v některých obdobích příliš velká na to, aby byly výsledky získané na základě HP filtru dostatečně informativní (to ovšem platí i pro jiné, vícerozměrné, metody, viz Scott, 2000a, str. 13). Výše uvedené závěry by bylo vhodné rozšířit také o další analýzy a další časové řady. To však již přesahuje možnosti, záměry a rozsah tohoto článku.

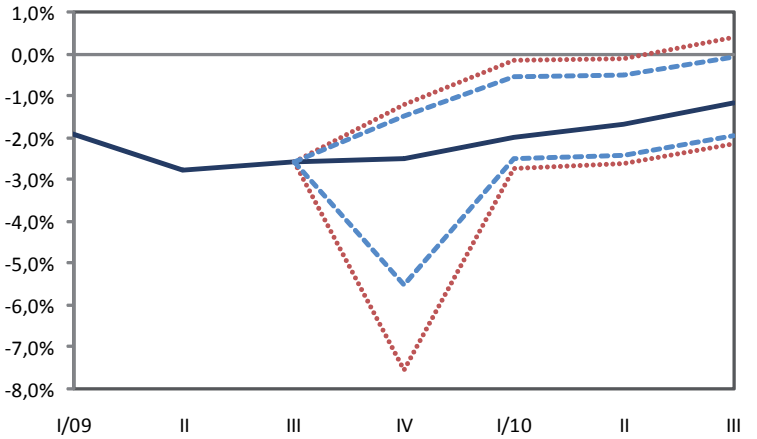
Jak bylo uvedeno výše, jedním z problémů HP filtru je apriorní neznalost hodnoty parametru vyhlazení λ a nutnost její volby před samotnou aplikací. Tato nevýhoda se přenáší také do zkonstruovaných intervalů spolehlivosti: je nutné zdůraznit, že intervaly spolehlivosti vychází z fixně stanoveného parametru λ a nezahrnují v sobě nejistotu ohledně jeho hodnoty. I když volba $\lambda = 1600$ je prováděna téměř automaticky, nemusí být nutně vhodná pro všechny časové řady. Optimální variantou proto je stanovit λ na základě dat (viz kapitola 1). Dostupné metody (viz Dermoune et al., 2008 a Peige a Trindade, 2010) nicméně neposkytují pro zkoumané řady uspokojivé výsledky, když odhady shodně nabývají velmi nízkých hodnot blízkých jedné. Důvodem jsou příliš restriktivní předpoklady, na jejichž základě je odhad vyhlazovacího parametru získán. Tyto předpoklady (týkající se především náhodné složky) nejsou v souladu s povahou hospodářského cyklu, resp. mezery výstupu. Peige a Trindade (2010) ukázali, že odhad parametru λ v modelu s penalizačními spliny je na volbě procesu pro náhodnou složku silně závislý. Pokud je náhodná složka formulována jako AR proces (což je blíže realitě), lze hodnotu 1600 považovat pro odhad potenciálního produktu české ekonomiky a eurozóny za akceptovatelnou.[21]

Jiný přístup ke stanovení intervalů spolehlivosti při nejistotě ohledně parametru vyhlazení navrhl Trimbur (2006). Tento postup vychází z bayesovského zobecnění HP filtru a představuje jistý kompromis mezi fixním nastavením λ a odhadem na základě modelu nepozorovaných stavů (viz výše). V tomto případě je však nutné při odhadu použít nevýběrovou informaci ve formě apriorního rozdělení parametru λ. Použití apriorního rozdělení pro parametr vyhlazení je možné do jisté míry integrovat také do výše navržené bootstrapové metody. Algoritmus se v tomto případě upraví tak, že místo fixní hodnoty se na bootstrapové replikace aplikuje HP filtr s hodnotou λ, která je generována z apriorního rozdělení. Tento postup však není možné chápat jako bayesovské zobecnění metody, protože zde neexistuje žádný ekvivalent aposteriorního rozdělení parametru. Nevýběrová informace tak nesmí být zatížena systematickým zkreslením, jinak mohou být výsledky zavádějící.[22]

21 Po reformulací náhodné složky již však ekvivalence mezi HP filtrem a modelem s penalizačními spliny neplatí a není tak možné získat zcela identické výsledky. Lze nicméně ukázat, že mezera výstupu získaná pomocí HP filtru s parametrem vyhlazení 1600 má velmi podobný průběh jako mezera výstupu získaná na základě modelu s penalizačními spliny a náhodnou složkou modelovanou jako AR proces.

22 Na rozdíl od bayesovského přístupu, kdy důležitost apriorní informace má s rostoucím výběrem klesající roli, může uvedená úprava algoritmu vést k chybným závěrům i pro velké výběry.

Graf 5
Srovnání simultánních intervalů (tečky) a intervalů „bod po bodu“ (čárky)



Pramen: ČSÚ, vlastní výpočty

Při konstrukci intervalů spolehlivosti lze experimentovat také s některými dílčími kroky algoritmu. Například odhad hustoty pravděpodobnosti na základě principu maximální entropie je možné v bootstrapu nahradit jádrovým odhadem hustoty nebo i jinými metodami odhadu. Stejně tak může být přínosné kromě percentilového bootstrapu detailněji prozkoumat další metody získání intervalů z bootstrapových výběrů a případně navrhnout vhodnější metodu. Některé z těchto metod vedou k symetrickým intervalům.

Výhodou využití metody bootstrap v rámci navrženého postupu je poměrně jednoduchá konstrukce *simultánních* intervalů spolehlivosti pro (libovolně) zvolený časový úsek. Zatímco u klasických intervalů spolehlivosti se nejistota ohledně odhadu vztahuje pouze k danému časovému okamžiku (bez ohledu na vývoj v ostatních obdobích), simultánní intervaly lze chápat jako jejich rozšíření, tj. jako intervaly, které s pravděpodobností 1– α zahrnují skutečné hodnoty trendu či cyklické složky ve zvoleném úseku indexní řady. Hodnoty simultánních intervalů spolehlivosti nalezneme pomocí jednoduchého algoritmu (viz Bühlmann, 1998): nejdříve se pro všechny prvky indexní řady z intervalu G stanoví „bodové“ kvantily $\hat{q}_{\alpha(b)/2}$ a $\hat{q}_{1-\alpha(b)/2}$ pro předem pokusně zvolenou hodnotu $\alpha(b)$. Následně je hodnota $\alpha(b)$ iterativně měněna tak, aby platilo:[23]

$$P\left(\hat{q}_{\alpha(b)/2}(t) \le y_t^{HP}(t) \le \hat{q}_{1-\alpha(b)/2}(t), \forall t \in G\right) \approx 1-\alpha \qquad (4)$$

tj. aby podíl bootstrapových řad, které procházejí v úseku G „pásmem“ vytyčeným výše vypočtenými kvantily, byl přibližně 1 – α. Srovnání simultánních intervalů spolehlivosti a intervalů konstruovaných „bod po bodu“ pro mezeru výstupu české

23 Analogicky se konstruují simultánní intervaly spolehlivosti také pro cyklickou složku.

ekonomiky v posledních čtyřech čtvrtletích lze nalézt v grafu 5. Simultánní intervaly spolehlivosti mohou být pro výzkumníka přínosné, pokud ho zajímá nejistota spojená s celkovým vývojem (trendu, cyklické složky) v určitém časovém úseku. Z grafu 5 je zřejmé, že simultánní intervaly spolehlivosti jsou širší (platí obecně) a připouští při hodnocení posledních čtyř čtvrtletí také vývoj mezery produktu ze záporných hodnot k úplnému uzavření.

4. Závěr

V tomto článku byla představena metoda získání intervalů spolehlivosti pro Hodrick-Prescottův a jiné typy statistických filtrů. Díky své jednoduchosti je možná přímočará implementace v libovolném statistickém softwaru, mírně pokročilí programátoři by pak jistě zvládli napsat příslušný algoritmus i pro běžné kancelářské produkty, jako je MS Excel. V případě potřeby je možné algoritmus upravit tak, aby šíře intervalů zahrnovala také nejistotu ohledně správné výše parametru vyhlazení. Ve výpočetním prostředí R trvá výpočet na běžném počítači několik málo sekund. Praktická aplikace metody na čtvrtletní data hrubého domácího produktu dokumentuje, že metoda poskytuje smysluplné intervaly spolehlivosti a napomáhá tak výzkumníkovi s interpretací dlouhodobých trendů a krátkodobých fluktuací.

Výsledky naznačují, že tradiční výstupy HP filtru je třeba interpretovat s jistou dávkou opatrnosti. Zaměříme-li na vývoj po roce 2005, potom lze na základě výsledků tvrdit, že k statisticky významnému otevírání mezery výstupu do kladných hodnot začalo docházet až v 1. čtvrtletí 2007, tedy mnohem později, než indikuje bodový odhad. Fáze přehřívání skončila počátkem roku 2009, kdy mezera výstupu rychle překmitla do záporu. Výsledky ukazují, že ve 3. čtvrtletí 2010 se česká ekonomika stále nachází pod potenciálem, když se odhad míry záporného otevření mezery výstupu nachází v intervalu 0,1–2 %. Obdobný vývoj je v daném období možné pozorovat u mezery výstupu také v eurozóně, viditelný je ovšem mírný předstih ve vývoji cyklu.

Navrženou metodu lze obecně použít také pro jiné úlohy, v nichž je třeba identifikovat trend a cyklické fluktuace. V textu byly naznačeny možnosti, jak některé kroky algoritmu v případě potřeby modifikovat a které přístupy je možné dále rozvést. Podrobné zmapování této problematiky a zjištění, ve kterých případech je použití intervalů spolehlivosti zvláště vhodné, je předmětem dalšího výzkumu.

Literatura:

BAXTER, M.; KING, R. 1999. Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. *Review of Economics and Statistics*. 1999, Vol. 81, pp. 575-93.

BENEŠ, J.; CLINTON, K.; GARCIA-SALTOS, R.; JOHNSON, M.; LAXTON, D.; MANCHEV, P.; MATHESON, T. 2010. Estimating Potential Output with a Multivariate Filter. [IMF Working paper WP/10/285]. International Monetary Fund, 2010.

BILLMEIER, A. 2004. Ghostbusting: Which Output gap Measure Really Matters? [IMF Working paper WP/04/146], International Monetary Fund, 2004.

BRUCHEZ, P. A. 2003. A modification of the HP filter aiming at reducing the end-point bias [Working paper ÖT/2003/3]. Eidgenössische Finanzverwaltung.

CANOVA, F. 1998. Detrending and business cycle facts: A User´s guide. *Journal of Monetary Economics*. 1998, Vol. 41, pp. 533–540.

CARLSTEIN, E. 1986. The Use of Subseries Methods for Estimating the Variance of a General Statistic from a Stationary Time Series. *Annals of Statistics*. 1986, Vol. 14, pp. 1171–1179.

COGLEY, T.; NASON, J. 1995. Effects of the Hodrick-Prescott Filter on Trend and Difference Stationary Time Series: Implication for Business Cycle Research. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1995. Vol. 19, pp. 253–278.

ČAPEK, J. 2007. Mezera výstupu v ČR: oficiální a neoficiální odhady, *Národohospodářský obzor*. 2007, Vol. 2007, No. 4, ISSN 1213-2446.

ČNB 2011. Zpráva o inflaci I/2011. Česká národní banka.

DANTHINE, J. P.; GIRARDIN, M. 1989. Business cycles in Switzerland. A comparative study. *European Economic Review*, 1989. Vol. 33, No. 1, pp. 31–50.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. 1993. *An introduction to the bootstrap*. New York, NY: Chapman & Hall, 1993.

DERMOUNE, A.; DJEHICHE, B.; RAHMANIA, N. 2008. A consistent estimator of the smoothing parameter in the Hodrick-Prescott filter. *Journal of the Japanese Statistical Society*. 2008. Vol. 38, No. 2, pp. 225–241.

GALLEGO, F. A.; JOHNSON, C. A. 2005. Building confidence intervals for band-pass and Hodrick-Prescott filters: an application using bootstrapping. *Applied Economics*. 2005, Vol. 37, No. 7, pp. 741–749.

HÁJEK, M.; BEZDĚK, V. 2000 Odhad potenciálního produktu a produkční mezery v ČR. VP č. 26, ČNB.

HARVEY, A. C.; JAEGER, A. 1993. Detrending, Stylized Facts and the Business Cycle. *Journal of Applied Econometrics*. 1993, Vol. 8, No. 3, s. 231–247.

HARVEY, A.; TRIMBUR, T. 2008. Trend Estimation and the Hodrick-Prescott Filter, *Journal of the Japanese Statistical Society*. 2008, Vol. 38, No. 1, s. 41–49.

HODRICK, R. J.; PRESCOTT, E. C. 1997. Post-war U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit, and Banking*. 1997. Vol. 29, No. 1, pp. 1–16.

HODRICK, R. J.; PRESCOTT, E. C. 1980. Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation [Discussion paper No. 451]. Carnegie-Mellon University, 1980.

HYNDMAN, R. J. 1996. Computing and Graphing Highest Density Regions. *The American Statistician*. 1996. Vol. 50, No. 2, pp. 120–126.

KAISER, R.; MARAVALL, A. 1999. Estimation of the business cycle: A modified Hodrick-Prescott filter. *Spanish Economic Review*. 1999, Vol. 1, No. 2, pp. 175–206.

KING, R. G.; REBELO, S. 1993. Low Frequency Filtering and Real Business Cycles. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1993. Vol. 17, No. 1-2, pp. 207-233.

KŰNSCH, H. R. 1989. The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations. *Annals of Statistics*. 1989. Vol. 17, No. 3, pp. 1217–1241.

MARCET, A.; RAVN, M. 2004. The HP-filter in Cross-Country Comparisons [CEPR Discussion Papers No. 4244]. C.E.P.R. 2004.

PAIGE, R. L.; TRINDADE, A. A. 2010. The Hodrick-Prescott Filter: A special case of penalized spline smoothing, *Electronic Journal of Statistics*, 2010. Vol. 4, pp. 856–874.

R DEVELOPMENT CORE TEAM 2004. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2004.

RAVN, M. O.; UHLIG, H. 2002. On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations. *Review of Economics and Statistics*. 2002. Vol. 84, No. 2, pp. 371–380.

SCOTT, A. 2000a. A multivariate unobserved components model of cyclical activity [Discussion Paper Series DP 2000/04]. Reserve Bank of New Zealand, 2000.

SCOTT, A. 2000b. Stylised facts from output gap measures. [Discussion Paper Series DP 2000/07]. Reserve Bank of New Zealand, 2000.

SCHLICHT, E. 2005. Estimating the smoothing parameter in the so-called Hodrick-Prescott filter. *Journal of the Japanese Statistical Society*. 2005. Vol. 35, No. 1, pp. 99–119.

TRIMBUR, T. M. 2006. Detrending economic time series: a Bayesian generalization of the Hodrick-Prescott filter. *Journal of Forecasting*. April 2006. Vol. 25, No. 4, pp. 247–273.

VINOD, H. D. 2004. Ranking Mutual Funds Using Unconventional Utility Theory and Stochastic Dominance. *Journal of Empirical Finance*. 2004. Vol. 11, No. 3, pp. 353–377.

VINOD, H. D. 2006. Maximum Entropy Ensembles for Time Series Inference in Economics. *Journal of Asian Economics*, 2006. Vol. 17, No. 6, pp. 955–978.

VINOD, H. D.; LÓPEZ-DE-LACALLE 2009. Maximum Entropy Bootstrap for Time Series: The meboot R Package. *Journal of Statistical Software*. January 2009. Vol. 29, No. 5, pp. 1–19.

POTENTIAL PRODUCT, OUTPUT GAP AND UNCERTAINTY RATE ASSOCIATED WITH THEIR DETERMINATION WHILE USING THE HODRICK-PRESCOTT FILTER

Miroslav Plašil, Czech National Bank, Na Příkopě 28, CZ – 115 03, Praha 1 (miroslav.plasil@cnb.cz); University of Economics, Prague, nám. W. Churchilla 4, CZ – 130 67, Praha 3 (plasil@vse.cz).

Abstract

In various fields of macroeconomic modelling, researchers often face the problem of decomposing time series into trend component and cycle fluctuations. While there are several potentially useful methods to perform the task in question, Hodrick-Prescott (HP) filter seems to have remained (despite some serious criticism) the most popular approach over the past decade. In this article I propose a straightforward and easy-to-implement bootstrap procedure for building pointwise and simultaneous confidence intervals around "point estimates" produced by HP filter. The principle of proposed method can be described as follows: first, we use maximum entropy bootstrap (Vinod, 2004, 2006) to approximate ensemble from which original time series is drawn and then apply the HP filter directly to each bootstrap replication. If necessary, the proposed method can be adapted to allow for uncertainty in the smoothing parameter. Practical usefulness of our approach is demonstrated with an application to the GDP data. Results are encouraging – obtained confidence intervals for the trend and cyclical component are overall plausible thus supplying a researcher with some measure of uncertainty related to HP filtering. Finally, we demonstrate that a former approach to build confidence intervals for HP filter (Gallego and Johnson, 2005) leads to erratic inference for cycle due to the shape-destroying block bootstrap sampling.

Keywords

Hodrick-Prescott filter, confidence intervals, bootstrap, potential product, output gap, R

JEL Classification

C13, C14, C22, E32