

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta managementu v Jindřichově Hradci

Doktorská dizertační práce

Ing. Vladimír Příbyl

2011

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta managementu

Podpora manažerského rozhodování o dopravních sítích

Autor:

Ing. Vladimír Příbyl

Školitel:

prof. RNDr. Jan Černý, DrSc., dr. h. c.

Jindřichův Hradec, 2011

Prohlášení

Prohlašuji, že doktorskou dizertační práci na téma
„Podpora manažerského rozhodování o dopravních sítích“
jsem vypracoval samostatně.
Použitou literaturu a podkladové materiály uvádím
v přiloženém seznamu literatury.

Jindřichův Hradec, září 2011

podpis doktoranda

Poděkování

Za cenné rady, připomínky a podporu bych na
tomto místě rád poděkoval svému školiteli,
prof. RNDr. Janu Černému, DrSc., dr. h. c.

Abstrakt

Práce je zaměřena na problematiku manažerského rozhodování o sítích (zejména dopravních), resp. přesněji na podporu tohoto rozhodování pomocí kvantitativních metod. Problematika sítí a rozhodování o jejich částech či prvcích je velmi širokou oblastí, která je předmětem výzkumu již po řadu desetiletí. Z této oblasti jsou v práci formulovány a podrobně rozpracovány dva problémy, které jsou důležité z hlediska jejich praktického významu pro rozhodování manažerů dopravců, případně veřejné sféry, a které dosud nebyly v této formě publikovány. Jedná se o problém hledání podsítě s limitovaným prodloužením tras mezi důležitými dvojicemi vrcholů a problém návrhu autobusové linky v oblasti s malou poptávkou.

Práce přináší pro každý z těchto problémů kombinatorickou exaktní metodu řešení, dále metodu založenou na celočíselném lineárním programování a v neposlední řadě také heuristické metody řešení. Významná pozornost je věnována i počítačové realizaci každé z těchto metod. Díky tomu se podařilo navrhnout a implementovat úpravy algoritmů, které vedly u exaktních metod k významnému urychlení a u heuristických metod zase ke zvýšení přesnosti výsledků.

Všechny metody byly testovány na množině sítí, která byla pro tento účel v rámci práce pseudonáhodným způsobem vytvořena. Testování bylo zaměřeno především na porovnání výsledků poskytovaných heuristickými metodami, které mají, vzhledem k velké výpočetní náročnosti exaktních metod, velký význam pro reálné úlohy většího rozsahu. Testy prokázaly, že navržené heuristické metody jsou prakticky použitelné a dosahují výsledků, které jsou v porovnání s exaktně optimálními v mnoha případech shodné, nebo jsou jim alespoň blízké.

Klíčová slova:

sít', podsít', redukce sítě, návrh linky, heuristická metoda, lineární programování

Abstract

The presented thesis is focused on a set of problems related to managerial decision-making concerning networks (particularly transportation networks), respectively - if we put it more precisely – the thesis focuses on the support of this decision-making by means of quantitative methods. A set of problems related to nets and decision-making concerning their individual parts or elements represents a very complex sphere which has been a subject of research for a number of decades. Out of this sphere, the thesis formulates and elaborates in great detail two problems, which – from the point of view of their practical significance – are important for the decision-making of managers of carriers, or the public sphere, and which have not been published in this form yet. The main point is the problem of how to find a subnet with a limited prolongation of routes between important pairs of vertices. Another problem is a design of a bus route in an area with a low demand.

For each of these problems, the thesis offers an exact combinatorial solution method, furthermore a method based on integer linear programming, and – last but not least – also, of course, heuristic methods of solution. All these methods have been tested on a set of networks, which has been created for this purpose in a pseudo-random way in the frame of this thesis. The testing has been focused primarily on the comparison of the results provided by heuristic methods, which are of great importance – with regard to a great computational difficulty of exact methods – for feasible tasks on a larger scale. The tests have proved that the proposed heuristic methods are practically applicable and show results whicheven represent the optimal solution in a number of cases, or are only slightly distant from the optimal solution.

Key words:

network, subnetwork, network reduction, route design, heuristic method, linear programming

Obsah

Seznam ilustrací a tabulek	15
1 Úvod	17
1.1 Zaměření dizertační práce	18
1.2 Struktura práce	18
1.3 Přínosy práce pro rozvoj vědního oboru	19
2 Přehled stavu problematiky v odborné literatuře.....	21
3 Příprava testovací množiny sítí	25
3.1 Stručný popis algoritmu pro generování sítě	25
4 Problém hledání podsítě	27
4.1 Formulace optimalizačního problému.....	28
4.2 Metody řešení	29
4.2.1 Exaktní metoda.....	29
4.2.2 Celočíslné lineární programování.....	33
4.2.3 Heuristická metoda.....	37
4.3 Přehled experimentálních výsledků	42
5 Návrh autobusové linky	48
5.1 Formulace optimalizačního problému.....	49
5.2 Metody řešení	49
5.2.1 Exaktní metoda.....	50
5.2.2 Celočíslné lineární programování.....	52
5.2.3 Heuristické metody.....	56
5.3 Přehled experimentálních výsledků	64
6 Technologická koncepce implementace metod.....	67
7 Závěr.....	68
Bibliografie.....	71
Příloha A: Testovací sítě	77
Příloha B: Výsledky hledání podsítí (redukce sítí).....	83
Příloha C: Výsledky návrhu autobusové linky	147

Seznam ilustrací a tabulek

Obr. 4.1: Rozdíl v době výpočtu exaktní metodou pro nastavení $p=0$ a $p = 1$	33
Obr. 4.2: Histogram vzdálenosti výsledku neupravené heuristické metody od optimálního řešení.....	39
Obr. 4.3: Histogram vzdálenosti výsledku upravené heuristické metody od optimálního řešení.....	40
Obr. 4.4: Histogram vzdálenosti výsledku opakované upravené heuristické metody od optimálního řešení.....	41
Obr. 4.5: Histogramy vzdálenosti výsledku různých realizací heuristické metody od optimálního řešení.....	42
Obr. 4.6: Neupravená heuristika (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$)	45
Obr. 4.7: Upravená heuristika (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$).....	45
Obr. 4.8: Heuristika s opakováním (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$).....	45
Obr. 4.9: Optimální řešení – EM a LP (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$).....	45
Obr. 4.10: Neupravená heuristika (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$).....	46
Obr. 4.11: Upravená heuristika (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$)	46
Obr. 4.12: Heuristika s opakováním (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$).....	46
Obr. 4.13: Optimální řešení – EM a LP (sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$).....	46
Obr. 4.14: Neupravená heuristika $q=1,2$	47
Obr. 4.15: Upravená heuristika $q=1,2$	47
Obr. 4.16: Heuristika s opakováním $q=1,2$	47
Obr. 4.17: Optimální řešení (EM a LP) $q=1,2$	47
Obr. 5.1: Porovnání výpočetních časů EM a LP pro $\lambda=2$ až 4.....	55
Obr. 5.2: Výsledek GGH (sít' č. 7).....	62
Obr. 5.3: Výsledek GGHO (sít' č. 7)	62
Obr. 5.4: Výsledek NGH (sít' č. 7).....	62
Obr. 5.5: Výsledek NGH (sít' č. 7).....	62
Obr. 5.6: Výsledek CH pro $k = 0,1$ (sít' č. 7).....	62
Obr. 5.7: Výsledek CHO pro $k = 0,1$ (sít' č. 7)	62
Obr. 5.8: Optimální vedení linky - EM (sít' č. 7)	62
Obr. 5.9: Výsledek GGH (sít' č. 3).....	63
Obr. 5.10: Výsledek GGHO (sít' č. 3).....	63
Obr. 5.11: Výsledek NGH (sít' č. 3)	63

Obr. 5.12: Výsledek NGHO (sít' č. 3).....	63
Obr. 5.13: Výsledek CH pro $k = 0,4$ (sít' č. 3)	63
Obr. 5.14: Výsledek CHO pro $k = 0,4$ (sít' č. 3).....	63
Obr. 5.15: Optimální vedení linky (sít' č. 3)	63
Tab. 4.1: Srovnání výpočetní náročnosti exaktní metody a lineárního programování.....	36
Tab. 4.2: Výsledky testovaných metod pro sít' č. 1 až 5.....	43
Tab. 4.3: Výsledky testovaných metod pro sít' č. 6 až 10.....	44
Tab. 4.4: Výsledky redukce sítě č. 15 (Piešťany).....	46
Tab. 5.1: Přehled výsledků testování metod LP a EM.....	55
Tab. 5.2: Porovnání výsledků heuristik GGH a GGHO	60
Tab. 5.3: Porovnání výsledků heuristik NGH a NGHO	61
Tab. 5.4: Porovnání výsledků heuristik CH a CHO.....	61
Tab. 5.5: Přehled výsledků návrhu linky pro testovací sítě č.1 - 5	64
Tab. 5.6: Přehled výsledků návrhu linky pro testovací sítě č.6 - 10	65

1 Úvod

Zkušenosti významných manažerů potvrzují, že problematika manažerského rozhodování patří neoddělitelně a významnou měrou k náplni práce každého manažera. Ať již se jedná o rozhodování na strategické úrovni řízení, či na úrovni taktické nebo operativní. Některá rozhodnutí je možné učinit i na základě zkušenosti, nebo v souladu s obvyklými postupy pro danou problematiku. Velkou část rozhodnutí ale i zkušený (nebo možná právě zkušený) manažer učiní za podpory, kterou mu nabízí aplikace kvantitativních metod operačního výzkumu či jiných metod a technik z oblasti, která se často nazývá „management science“ v širším slova smyslu. Žijeme ve společnosti, které se právem říká „znalostní společnost“, neboť schopnost pracovat s obrovským množstvím dat, a hlavně nacházet a odvozovat z nich znalosti rychle využitelné při podpoře rozhodování je dnes základní podmínkou udržení konkurenceschopnosti v globálním světě ekonomiky.

V případě manažerů, kteří se pohybují v oblasti síťových a zejména dopravních systémů, to podle mého názoru platí možná více než v jiných oblastech. Jejich rozhodnutí mají velmi často dlouhodobý a strategický význam i pro jiné oblasti ekonomiky a jsou často spojena s velkými investicemi. To může vést v případě chybných rozhodnutí k velké neefektivitě v nakládání s prostředky (v mnoha případech z veřejných rozpočtů). Samozřejmě také ne ve všech případech lze chybná rozhodnutí snadno napravit.

Problematika rozhodování o dopravních sítích zahrnuje velmi širokou škálu úloh a problémů. Celou řadu těchto úloh je možné úspěšně řešit pomocí modelů a metod využívajících poznatky z teorie grafů a operačního výzkumu. Pro řadu úloh však neznáme, nebo dokonce neexistují, i přes významný posun ve výkonnosti výpočetních systémů, uspokojivě rychlé algoritmy pro jejich řešení. V takovýchto případech má jistě smysl pracovat na zdokonalování heuristických algoritmů, které sice zpravidla nedávají optimální řešení, ale jsou většinou velmi rychlé. V praxi je pak přínosem každé řešení (byť není nejlepší), které je ze sledovaného hlediska lepší, než stávající.

Mezi typické úlohy manažerského rozhodování o dopravních sítích patří:

- Konstrukce sítí (Network Design), která je nejvíce teoreticky probádaná a zabývá se dvěma hlavními směry:
 - doplnění sítě o nové úseky
 - zkvalitnění stávajících úseků (zejména zvýšení propustnosti)
- Výběr podsítí (jejíž probádanost je podstatně nižší)

- obecných (např. v případě silniční sítě výběr podsítě pro nákladnou údržbu, nebo v případě autobusové MHD výběr podsítě pro zavedení trolejbusové dopravy)
- lineárních (např. linky veřejné dopravy)
- Umístění center obsluhy
 - zastávek veřejné dopravy
 - překladišť
 - logistických center
 - dep apod.

1.1 Zaměření dizertační práce

Je zřejmé, že není možné v rámci jedné práce postihnout tak širokou oblast, jaká byla popsána výše. Proto se zaměřím dvěma směry:

- Na **hledání podsítě** daných vlastností ve smyslu úlohy, která je popsána v rámci kapitoly 4 na straně 27.
- Na **návrh trasy linky** v autobusové dopravě ve smyslu úlohy, která je popsána v rámci kapitoly 5 na straně 48.

Oba tyto směry patří z hlediska výše uvedeného přehledu typických úloh do oblasti výběru podsítí. Výběr zaměření vyplynul z mně známých potřeb dopravců a veřejné správy a z faktu, že mně známá odborná literatura neposkytuje prostředky k jejich řešení.

1.2 Struktura práce

Struktura práce odpovídá výše uvedenému zaměření na dvě oblasti podpory pro manažerské rozhodování o dopravních sítích. Po úvodním přehledu stavu problematiky v literatuře a popisu přípravy prostředí potřebného k realizaci a testování navrhovaných metod řešení jsou hlavními částmi práce dvě kapitoly popisující možnosti řešení každé z vybraných oblastí. Každá z nich obsahuje detailní popis a formulaci úlohy, navržené metody pro její řešení a samozřejmě také výsledky provedených testů. Přestože se může zdát, že jsou tyto kapitoly poměrně stručné, stojí za nimi značné množství práce s implementací a testováním popisovaných metod, kterou jsem se snažil co nejprůhledněji shrnout do tabulek, grafů a obrázků. Číslování tabulek, obrázků i výrazů vždy obsahuje i číslo hlavní kapitoly, ke které příslušný objekt patří. Citace literárních zdrojů je provedena v souladu s formátem APA, neboť norma ISO 690 není podle mého názoru v textovém

procesoru MS Word (ve kterém je celá grafická podoba práce vytvořena) implementována zcela správně.

Součástí práce je i obsáhlá část příloh, ve které jsou uvedeny všechny grafické podklady popisující zadání a výsledky aplikace metod na testovací množině sítí. Uvádění těchto výsledků v textu kapitol by neúnosně snížilo přehlednost práce a naopak jejich neuvedení by, především s ohledem na prakticky orientovaný cíl a přínos práce, znamenalo její nekompletnost.

1.3 Přínosy práce pro rozvoj vědního oboru

Práce přináší originální výsledky, které dosud (září 2011) nebyly podle dostupných informací ve světové literatuře publikovány. K tomuto přesvědčení jsem dospěl na základě rešerše provedené odbornými pracovníky Centra knihovnických a informačních služeb Vysoké školy ekonomické v Praze a také samozřejmě na základě vlastní rešerše v rámci dostupných internetových zdrojů. Jedná se zejména o tyto výsledky (s uvedením čísla příslušné kapitoly v závorkách):

1. Modely a metody pro řešení problému volby podsítě.
 - 1.1. Model celočíselného lineárního programování pro řešení problému.(4.2.2)
 - 1.2. Exaktní metoda prohledávání stromu řešení do hloubky.(4.2.1)
 - 1.3. Heuristická metoda.(4.2.3)
2. Počítačová realizace navržených metod a modelů pro řešení problému volby podsítě včetně jejich testování.
 - 2.1. Algoritmus pro přípravu detailního zápisu úlohy celočíselného lineárního programování se syntaxí příslušného LP solveru. (4.2.2)
 - 2.2. Realizace vybrané varianty exaktní metody. (4.2.1)
 - 2.2.1.Výběr, implementace a testování úprav algoritmu exaktní metody vedoucích k urychlení jejího výpočtu.
 - 2.3. Realizace a testování heuristické metody.(4.2.3)
 - 2.3.1.Výběr, implementace a testování úprav algoritmu heuristické metody vedoucích ke zvýšení kvality jejích výsledků.
3. Formulace manažerského rozhodovacího problému návrhu autobusové linky v oblasti s malou poptávkou při dodržení podmínky dostupnosti. (5.1)
4. Modely a metody pro řešení problému volby podsítě.
 - 4.1. Model celočíselného lineárního programování pro řešení problému volby podsítě (5.2.2)

- 4.2. Exaktní metoda prohledávání stromu řešení do hloubky. (5.2.1)
- 4.3. Heuristické metody. (5.2.3)
 - 4.3.1. General Greedy Heuristics.
 - 4.3.2. Neighbor Greedy heuristics.
 - 4.3.3. Combined heuristics.
- 5. Počítačová realizace navržených metod a modelů pro řešení problému návrhu autobusové linky.
 - 5.1. Algoritmus pro přípravu detailního zápisu úlohy celočíselného lineárního programování se syntaxí příslušného LP solveru. (5.2.2)
 - 5.2. Realizace exaktní metody. (5.2.1)
 - 5.2.1. Výběr, implementace a testování úprav algoritmu exaktní metody vedoucích k urychlení jejího výpočtu.
 - 5.3. Realizace a testování heuristických metod. (5.2.3)
 - 5.3.1. Výběr, implementace a testování úprav algoritmů heuristických metod vedoucích ke zvýšení kvality jejich výsledků.
- 6. Počítačová realizace aplikace pro pseudonáhodné generování testovacích sítí daného rozsahu. (3)

Výsledky 2, 5 a 6 jsem dosáhl samostatně. Ostatní výsledky jsem dosáhl jako člen týmu vedeného mým školitelem.

Výsledky 3, 4 a 5 jsou popsány také v článku „Černý, J., Černá, A., Příbyl, V.: Bus Route Design in Small Demand Areas“ přijatého do tisku v časopise Transport vydavatelství Taylor-Francis. Výsledky 1 a 2 jsou uvedeny v článku „Černý, J., Černá, A., Příbyl, V.: On a Network Reduction Problem“, který je v současné době v recenzním řízení časopisu „Network and Spatial Economics“.

2 Přehled stavu problematiky v odborné literatuře

Stav problematiky podpory manažerského rozhodování o podsítích jsem analyzoval nejen na základě dostupných zdrojů na Internetu, ale především na základě rozsáhlé rešerše zaměřené na tuto problematiku, kterou zpracovali odborní pracovníci Centra knihovnických a informačních služeb VŠE. Ta vycházela především z pramenů dostupných v rámci on-line databází jako jsou např. EBSCO, Proquest 5000 a Electronic Journals Library – TRANSPORT, ACM Digital Library, Lecture Notes In Computer Science. Výsledkem této rešerše byly stovky odkazů na zdroje, z nichž velká většina byla zaměřena na jiné aspekty rozhodování o podsítích, než na které je zaměřena tato práce.

První oblast vyplývající ze zaměření práce je problematika hledání, resp. optimalizace podsítí daných vlastností. Tato oblast velmi úzce souvisí s teorií grafů, která zpravidla představuje teoretický nástroj pro modelování a řešení problémů souvisejících se sítěmi a rozhodování o nich. Problematika související s hledáním extrémních, a to jak minimálních tak maximálních, podgrafů majících dané vlastnosti tvoří významnou oblast výzkumu v teorii grafů a je studována po řadu desetiletí. Svědčí o tom například fakt, že první algoritmus pro nalezení minimální kostry grafu byl publikován již v roce 1926 (Borůvka, 1926) českým autorem Otakarem Borůvkou jako návod k řešení typicky manažerské úlohy související s optimalizací elektrorozvodné sítě. Později byl znovu objeven dalšími autory, z nichž asi nejznámější je M. Sollin (Sollin, 1965) a publikovány i jiné algoritmy k řešení problému minimální kostry grafu, jako např. Jarníkův (Jarník, 1930) či Kruskalův (Kruskal, 1956). Další vývoj teorie koster grafu je popsána např. v (Cai & Corneil, 1995).

Typickými představiteli oblasti hledání a optimalizace podsítí jsou zejména následující úlohy, jejichž cílem je pro daný graf (model dané sítě) $G = (V, E, c)$, kde $c(e) \geq 0$ je nákladová, nebo váhová funkce ohodnocující hranu grafu $e \in E$ (může to být například délka, čas průchodu, náklady na průjezd apod.):

- Nalezení planárního podgrafu s maximálním ohodnocením. Viz např. (Eades, Foulds, & Giffin, 1982),
- Pro dané celé číslo $\lambda > 0$ najít podgraf s hranovou souvislostí stupně λ s minimálním součtem vah hran. Viz např. (Gabow, Goemans, Tardos, & Williamson, 2005), (Cheriyán & Thurimella, 2000) a také (Fernandes, 1998) kde $c(e) \equiv 1$ a (Carr & Ravi, 1998) kde $\lambda = 2$.
- Pro dané $k > 0$ najít podgraf s k vrcholy s maximálním součtem vah hran. Viz (Suzuki & Tokuyama, 2005).

- Pro daná celá čísla $k > 0$ a $\lambda > 0$ najít podgraf s k vrcholy a stupněm hranové souvislosti λ s minimální součtem ohodnocení hran. Viz (Safari & Salavatipour, 2008),
- Pro dané celé číslo $d > 0$ najít podgraf s maximálním součtem ohodnocení hran, pro který maximální stupeň vrcholu nepřekročí d . Viz (Amini, Peleg, Pérennes, Sau, & Saurabh, 2009).
- Pro dané celé číslo $d > 0$ najít podgraf s minimálním součtem ohodnocení hran, pro který minimální stupeň vrcholu neklesne pod d . Viz (Amini, Peleg, Pérennes, Sau, & Saurabh, 2009).
- Pro daný podgraf H grafu G najít podgraf s minimálním součtem ohodnocení hran, který je izomorfní s H . Viz (Vassilevska, Williams, & Yuster, 2006)

Další úlohy patřící do skupiny problémů zaměřených na hledání extrémní podsítě se od těch uvedených výše částečně liší. Například již jednou zmíněná práce (Vassilevska, Williams, & Yuster, 2006) obsahuje i alternativní přístup s váhovým ohodnocením vrcholů. Úloha zůstává stejná, tedy najít podgraf s minimálním součtem ohodnocení vrcholů, který je izomorfní s H .

Hintsanen ve své práci (Hintsanen, 2007) považuje ohodnocení hran $c(e)$ za pravděpodobnost defektu, který vede k přerušení služby a cílem je vybrat k hran tak, aby byla maximalizována spolehlivost služby.

Autoři práce (Ferrer, Serratos, & Valveny, 2007) studují konečnou množinu grafů $G_1, \dots, G_n$ a řeší problém jak najít maximální společný podgraf. (Berger & Shor, 1990) studují orientovaný graf G s cílem najít maximální acyklický podgraf.

Samozřejmě existuje i řada dalších, zde neuvedených, podobně zaměřených prací, avšak žádné z mě známých se nezabývá stejně formulovanou úlohou, jako je předmětem části této práce týkající se hledání podsítě s limitovaným prodloužením tras mezi významnými dvojicemi uzlů.

Další důležitou oblastí je problematika návrhu sítí specifického zaměření. Příklady z oblasti dopravních sítí lze nalézt jak v nákladní dopravě (Chen & Zeng, 2010), (Janáček & Gábrišová, 2009), tak i např. v osobní dopravě handicapovaných osob (Matuška, 2010).

Významnou skupinu úloh z této oblasti tvoří ty, které jsou zaměřeny na optimální výběr některých prvků sítě. Práce (Janáček & Gábrišová, 2009) popisuje výběr podmnožiny uzlů sítě pro umístění daných objektů (zařízení). Jiní autoři, např. (Jakimavičius & Burinskienė, 2010) (Matis, 2010) (Szűcs, 2009) se ve svých pracích zabývají hledáním různých typů tras (linek) v sítích, což je problematika, do které spadá i druhá oblast zaměření této práce.

Úlohy zaměřené na konstrukci linek v sítích mají velký význam ve veřejné dopravě zejména pak v městské. Tento typ úloh je předmětem studia již desítky let a dochází samozřejmě i k vývoji charakteru metod a podílu mezi prací experta na jedné straně a výpočetní techniky na straně druhé. Např. autoři práce (Erlander & Scheele, 1974) pracují s množinou linek, která byla vytvořena „ručně“ dopravními inženýry. Naproti tomu např. v práci (Cipriani, Fusco, Gori, & Petrelli, 2005) je pracovní množina linek vytvářena pomocí výpočetní techniky jako množina nejkratších cest spojujících dvojice významných (tzn. přinášejících významnou poptávku) uzlů. V obou případech se jedná o oblasti s dostatečně velkou poptávkou.

V rámci této dizertační práce je úloha návrhu linky řešena pro situaci, kdy naopak nelze předpokládat poptávku dostatečnou pro návrh množiny linek. Proto je cílem návrh jedné linky, která je schopna obsloužit distribuovanou poptávku s definovanou dostupností. Na rozdíl od práce (Peško, On Closed Bus Line for Disabled Passengers, 2003), ve které autor hledá uzavřenou linku procházející všemi uzly s poptávkou, formulace úlohy v této práci poskytuje možnost některé zdroje poptávky vynechat. Naopak, v případě práce (Peško, On closed dial-a-bus line model, 2004) formulace problému připouští úplné odmítnutí části poptávky, zatímco formulace úlohy použitá v této práci tuto možnost nedává.

Součástí, minimálně některých, metod použitých v této práci pro řešení zadaných úloh jsou i obecně známé úlohy z operačního výzkumu, resp. z oblasti kombinatorické optimalizace. Některé z nich jsou méně výpočetně náročné a existují k jejich řešení polynomiálně složité algoritmy, které jsou obecně známé a jsou součástí všech standardních učebnic operačního výzkumu (např. Floydův algoritmus pro výpočet matice vzdáleností v grafu). Některé však patří mezi NP-těžké problémy a k jejich řešení je ve většině případů nutné použít heuristické metody. Především se jedná o známou „Úlohu obchodního cestujícího“ (TSP). Vzhledem k rozsahu sítí, na kterých probíhalo testování navržených metod, bylo v rámci této práce možné pro řešení tohoto problému využít s částečnými úpravami intuitivní kombinatorickou metodu „hrubé síly“. Pro větší rozsah úlohy by však bylo nutné použít některou heuristickou metodu. Ve světové literatuře lze samozřejmě nalézt řadu prací, které se řešením tohoto problému zabývají a není možné a ani potřebné zde uvádět jejich výčet. Na tomto místě bych rád uvedl jen zajímavou práci odborníka na umělou inteligenci Marca Doriga (Dorigo, 1997), který přinesl v roce 1997 heuristickou metodu pro řešení TSP založenou na simulaci mravenčí kolonie (Ant Colony System) včetně porovnání dosažených výsledků s jinými heuristickými metodami (genetické algoritmy, evoluční programování a simulované žíhání).

3 Příprava testovací množiny sítí

Vzhledem k tomu, že tato práce nemá jen teoretický charakter, ale je z velké části zaměřena na implementaci a hlavně ověření navržených modelů a algoritmů pro řešení vybraných dopravních manažerských úloh, je zřejmé, že bylo nutné získat dostatečné množství testovacích dat (zadání úloh). Zajistit větší množství dat z reálných dopravních sítí se jevílo jako komplikované. Bylo totiž potřebné přizpůsobit rozsah úloh možnostem exaktních kombinatorických metod řešení, jejichž výsledky byly důležité pro porovnání kvality řešení poskytovaných heuristickými metodami. Proto jsem se rozhodl testovat metody na vygenerovaných pokusných sítích. Pro vygenerování sítí jsem použil vlastní, k tomuto účelu vytvořenou a také postupně v průběhu řešení podle potřeby upravovanou a doplňovanou aplikaci. Moje snaha samozřejmě byla, aby byly pseudonáhodným způsobem vygenerovány sítě, které mají základní rysy reálných dopravních sítí.

Přestože je popis této problematiky uveden na tomto místě, je zřejmé, že příprava testovacích sítí a dat, které popisují jejich vlastnosti, probíhala až po detailní formulaci úloh. Ta je však v textu uvedena až v dalších kapitolách.

3.1 Stručný popis algoritmu pro generování sítě

K popisu sítě jsem standardně využil neorientovaný graf. Výstupem algoritmu je tedy především množina hran s ohodnocením, množina vrcholů a další data potřebná pro řešení úloh a také pro vizualizaci sítí (grafů).

Rozmístění zadaného počtu uzlů sítě (vrcholů grafu) se děje náhodně na předem zadané ploše ve tvaru čtverce, ale s tím omezením, že musí být dodržena předem nastavitelná minimální vzdálenost uzlů. Nedochozí tím k nadměrné kumulaci vrcholů na malé části plochy. Velikost plochy určuje v podstatě jen délky úseků (hran), protože ty se počítají jako euklidovské vzdálenosti s možným nastavením náhodné fluktuace. Při generování se vrcholy také označí jako vnější nebo vnitřní podle toho, zda leží v definovaném pásu při okraji základní plochy, nebo ne. To umožňuje posléze odlišně nastavit parametry pro generování hran incidentních s příslušným vrcholem v okrajových částech grafu. Dále se k vrcholům náhodně generuje hodnota v rozsahu 0 až 100, kterou jsem pracovně nazval „mohutnost“ vrcholu. Tento atribut vrcholu lze později využít pro vytvoření množiny dvojic důležitých vrcholů W (viz kapitola 4.1). Tato množina totiž vzniká výběrem požadovaného počtu dvojic vrcholů z množiny, která vznikne jako seřazený seznam dvojic, pro které je součin mohutností větší než zadaná mez. V případě úlohy na návrh autobusové

linky reprezentuje tato mohutnost počet pasažérů, pro které je daný uzel sítě vstupním či výstupním uzlem.

K připravené množině uzlů se pak generuje množina úseků (hran) následujícím způsobem:

- vytvoří se množina všech potenciálních hran (v podstatě kompletní síť)
- z této množiny se postupně vybírají do generované sítě hrany od nejkratších tak, aby
 - délka hrany nepřekročila nastavitelnou mez
 - výsledný graf byl planární
 - graf neobsahoval hrany, jejichž incidentní vrcholy jsou již spojeny polosledem s jen o málo větší délkou, než je délka předmětné hrany
- v takto vzniklém grafu je však ještě značné množství vrcholů s vysokým stupněm, proto se v dalších krocích postupně vyřazují hrany tak,
 - aby se snížil stupeň vrcholu s nejvyšším stupněm
 - aby odebíraná hrana byla incidentní se sousedním vrcholem s nejvyšším stupněm
 - aby graf neobsahoval mnoho hran mezi vnějšími vrcholy

Posledním krokem před uložením sítě je zpravidla ruční korekce množiny hran na základě automaticky vytvářené vizualizace sítě (grafu).

Tímto způsobem bylo původně vygenerováno 20 grafů. 10 z nich s 20 vrcholy a cca 30 hranami a 10 s 30 vrcholy a cca 45 až 50 hranami. Při testování se však ukázalo, že grafy s 30 vrcholy jsou již bohužel příliš velké pro exaktní kombinatorické algoritmy pro řešení obou typů úloh. Pro testování jsem tedy použil pouze grafy s 20-ti vrcholy. Pro účely testování řešení úlohy návrhu autobusové linky metodou celočíselného lineárního programování byly navíc vygenerovány ještě menší sítě s 11, 12, 13 a 15 uzly. Kromě vygenerovaných sítí jsem měl k dispozici i jednu reálnou síť popisující situaci ve slovenském městě Piešťany. Grafické znázornění všech sítí použitých pro testování je uvedeno v Příloze A.

4 Problém hledání podsítě

V této kapitole je popsáno řešení úlohy zaměřené na hledání podsítě, která splňuje zadaná kritéria. Jak již bylo zmíněno výše, problematika hledání podsítí je široká a její různé varianty jsou samozřejmě studovány a publikovány v odborné literatuře. Pro svou práci jsem si vybral problém, který byl podle mně dostupných informací prvně formulován v článku (Czimerman, Černá, Černý, & Peško, 2007), avšak v tomto článku a ani v jiné literatuře zatím není řešen. Jeho řešení je však potřebné pro podporu manažerského rozhodování například v těchto praktických situacích, které jsou rovněž popsány již ve výše uvedeném článku.

Městská autobusová síť

Předpokládejme, že existuje malé nebo středně velké město, ve kterém má systém autobusových linek městské dopravy extenzivní charakter. To znamená, že je provozováno velké množství linek, vedených po mnoha různých úsecích ulic, s dlouhými intervaly mezi jednotlivými spoji. V zájmu vedení města a úkolem pro management přepravní společnosti je nalézt nějaké efektivní postupy vedoucí k intenzifikaci služeb autobusové městské dopravy bez zvýšení nákladů. Přirozeným řešením je redukovat síť ulic, po kterých jsou autobusové linky provozovány, tak aby to umožnilo redukovat počet linek a umožnit tak zvýšení frekvence spojů na zbývajících úsecích. Je zřejmé, že je potřebné zajistit, aby zdroje a cíle významných toků cestujících zůstaly zachovány a délka trasy mezi nimi nebyla o mnoho větší, než v původní neredukované síti.

Městská trolejbusová síť

V případě středně velkých měst může nastat situace, kdy je městská doprava realizována sítí autobusových linek a v určité etapě rozvoje města je pak rozhodnuto o tom, že dojde k částečné elektrifikaci městské hromadné dopravy. Problém pak může být, jak vybrat úseky, které budou obsluhovány trolejbusy. Je samozřejmé, že trolejbusy by měly obsluhovat úseky s největšími toky cestujících a z mnoha důvodů nejde jen o prosté nahrazení některých autobusových linek trolejbusovými. Tato podsít' s trolejovým vedením pak převezme většinu dopravních výkonů a je zcela přirozené žádat, aby nedocházelo k výraznému prodloužení tras cestujících.

Údržba venkovské silniční sítě

V České republice a zřejmě i v jiných oblastech je řada oblastí, kde je hustá síť silnic přímo spojujících sousední obce a přitom vzdálenost mezi sousedními obcemi se často pohybuje jen okolo 2 až 3 km. Celková délka takovéto silniční sítě může být např. z hlediska pravidelné zimní údržby příliš velká. Problém je tedy najít takovou podsít' (redukovat původní síť), aby bylo zajištěno, že délka trasy pro významné dopravní toky nebude podstatně delší.

Jiné přepravní sítě

Podobné příklady lze nalézt i v jiných přepravních sítích, jako např. lokální železniční tratě, vnitrozemské vodní cesty, kabelové trasy aj. Důvodem pro redukcí může být zejména nízká poptávka v některých částech a z ní vyplývající neefektivní využívání prostředků, nebo potřeba nákladných modernizací.

Mimo tyto oblasti může být problém redukce sítě také teoretickou součástí řešení jiné komplexní úlohy.

4.1 Formulace optimalizačního problému

Hledáním podsítě bude pro účely následujícího textu chápána úloha, kterou budu nazývat „redukce sítě“ a jejíž matematický model je následující¹:

Je dán konečný, souvislý a neorientovaný graf $G=(V,E,d)$, kde $d(e)$ je délka hrany $e \in E$.

Dále $d(p) = d(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n) = d(e_1) + d(e_2) + \dots + d(e_n)$ je délka cesty v grafu procházející hranami e_1 až e_n . $d(v,w)$ kde $v,w \in V$ pak označuje vzdálenost vrcholů v grafu G , která je rovna nejkratší cestě z v do w .

Cílem je nalézt pro $q \geq 1$ a $\emptyset \neq W \subset V \times V$ takový graf $G'=(V,E',d')$, aby byla splněna následující podmínky:

CR1: $E' \subset E$, $d'(e) = d(e)$ pro každé $e \in E$

CR2: na grafu G' platí $d'(v,w) \leq qd(v,w)$ pro každou dvojici $(v,w) \in W$

CR3: Celková délka $d(E') = \sum_{e \in E'} d(e)$ je minimální

Množina W představuje páry uzlů sítě (vrcholů grafu), mezi kterými v síti existuje významný tok, případně je spojení těchto uzlů důležité z jiných důvodů. Mohou nastat dvě situace:

¹ převzato z článku (Czimerman, Černá, Černý, & Peško, 2007)

- $W = V \times V$. Spojení každé dvojice uzlů v síti je významné. Graf G' je určitě souvislý.
- $W \neq V \times V$ a $\emptyset \neq W \subset V \times V$. Tedy situace, kdy toky mezi některými uzly nejsou z hlediska řešení úlohy významné a jsou proto zanedbány. (V tomto případě však, teoreticky, graf G' již nemusí být souvislý). Je zřejmé, že v tomto případě lze dosáhnout většího poměru redukce sítě $d(E)/d(E')$. Při testování metod řešení úlohy redukce sítě jsem se zaměřil především na tento případ. V souvislosti s tím byly také při generování testovacích sítí vytvořeny seznamy důležitých dvojic uzlů.

4.2 Metody řešení

V následujícím textu jsou popsány tři metody řešení této úlohy. První z nich je založena na prohledávání do hloubky množiny všech možných řešení, tedy všech možných podmnožin E' množiny hran. Jedná se o prostou kombinatorickou metodu „hrubé síly“. Její význam je především v tom, že vždy poskytuje optimální řešení. Z hlediska mé práce jsou tedy její výsledky potřebným etalonem kvality výsledků poskytnutých dalšími testovanými metodami. Její praktické využití je však, díky její vysoké výpočetní náročnosti, omezeno na standardním hardwarovém vybavení jen na úlohy malého rozsahu, cca do 20 až 25 uzlů (vrcholů). V dalším textu bude tato metoda nazývána „exaktní metoda“ a označována zkratkou EM. Druhou metodou je formulace úlohy pro celočíselné lineární programování a využití standardního LP solveru. V (Czimerman, Černá, Černý, & Peško, 2007) je ukázáno, že úloha 4.1 je NP-těžký problém. Proto je důležité mít k dispozici pro praktické úlohy většího rozsahu také vhodnou heuristickou metodu. Proto také jako jednu z navrhovaných a testovaných metod uvádím heuristickou metodu. Přestože se v této práci dalšími metodami řešení úlohy 4.1 nezabývám, bylo by samozřejmě možné využít i některé jiné metody. Jako příklad bych rád uvedl alespoň možnost využití genetických algoritmů, tedy metodu evoluční optimalizace.

Pro všechny dále popsané metody jsou vstupními daty:

- seznam hran grafu G – množina E
- seznam vybraných dvojic vrcholů – množina W
- parametr q

4.2.1 Exaktní metoda

Tato metoda je algoritmicky velmi jednoduchá. Jak již bylo zmíněno výše, jedná se o kombinatorické prohledávání prostoru všech možných řešení. Výpočetní náročnost této metody je obecně velmi vysoká. Složitost je obecně nejméně $O(2^n)$, neboť je teoreticky

nutné prověřit všechny existující kombinace hran z množiny E , jejichž počet je roven 2^n , kde n je počet prvků množiny E , tedy počet hran grafu. Pro každou zkoumanou podmnožinu je navíc (z důvodu ověření splnění CR2) nutné najít nejkratší cesty v grafu. K řešení tohoto subproblému lze využít některou z obecně známých metod pro hledání nejkratších cest v grafu. Popis těchto metod lze nalézt např. v knize (Plesník, 1983). Pro svou práci jsem si vybral Floydův algoritmus (především proto, že jeho výsledkem je kompletní matice nejkratších vzdáleností), který je sám o sobě také nezanedbatelně výpočetně náročný ($O(n^3)$ – kde n je však počet prvků množiny vrcholů).

Algoritmus je implementován jako prohledávání do hloubky. Snahou samozřejmě bylo maximálně redukovat počet zkoumaných kombinací, tedy co nejdříve zjistit, že daná větev řešení nemůže přinést zlepšení výsledku a je možné ji opustit.

K implementaci algoritmu exaktní metody je možné přistoupit dvěma způsoby, které se od sebe liší principem práce s množinou E' .

Přidávání hran

V tomto případě je algoritmus zahájen ve stavu kdy $E' = \emptyset$. Podmínka CR2 (viz 4.1) samozřejmě nemůže být splněna. Postupně pak přidáváme do E' hrany z množiny E až do splnění CR2. Pokud $k =$ počet prvků množiny E' dosáhne při prvním splnění CR2 $n =$ počtu prvků množiny E , algoritmus končí, neboť $E' = E$. Pro $k < n$ se E' stane dosud nejlepším řešením s délkou sítě $d(E')$. V tomto případě je jasné, že není důvod pokračovat v přidávání dalších hran do E' . Proto je v dalším kroku vypuštěn z E' poslední prvek e_k (přejde se tím do jiné větve prohledávání prostoru řešení) a je nahrazen dalším prvkem e_{k+1} z množiny E a případně přidávány další prvky až do splnění CR2. Pokud je $k < n$ a $d(E') <$ délka dosavadního nejlepšího řešení, stane se E' novým nejlepším řešením. Algoritmus pokračuje prohledáváním dalších větví prostoru řešení až do jeho vyčerpání. Prohledává se tedy prostor všech přípustných podsítí. V zájmu urychlení algoritmu pak prohledávání každé větve končí, je-li $d(E') >$ délka dosavadního nejlepšího řešení a přitom ještě není splněno CR2.

Použití tohoto přístupu je výhodné v situaci, kdy předpokládáme, že $|E'| < |E - E'|$. Tedy v situaci, kdy prohledávání větví řešení bude končit dříve, než by tomu bylo v případě ubírání hran z kompletní sítě, a bude se tak prohledávat menší počet kombinací.

Ubírání hran

V tomto případě je algoritmus zahájen ve stavu kdy $E' = E$. Podmínka CR2 (viz 4.1) je samozřejmě splněna. Postupně odebíráme z E' hrany dokud je splněno CR2. Pokud je $k =$ počet prvků množiny E' před prvním porušením CR2 rovno $n =$ počet prvků množiny E , algoritmus končí, neboť $E' = E$. Pro $k < n$ se E' stane dosud nejlepším řešením s délkou sítě $d(E')$. V tomto je jasné, že není možné pokračovat v ubírání dalších hran z E' . Proto je v dalším kroku vrácen do E' poslední odebraný prvek při splnění CR2 (přejde se tím do jiné větve prohledávání prostoru řešení) a jsou odebírány další prvky následující za vráceným prvkem až do porušení CR2. Pokud je $k < 0$ a $d(E') <$ délka dosavadního nejlepšího řešení, stane se E' novým nejlepším řešením. Algoritmus pokračuje prohledáváním dalších větví prostoru řešení až do jeho vyčerpání. Prohledává se tedy prostor všech přípustných množin vyřazených hran. V zájmu urychlení algoritmu pak prohledávání každé větve končí, dojde-li k porušení CR2.

Použití tohoto přístupu je výhodné v situaci, kdy předpokládáme, že $|E'| > |E - E'|$.

V případě konkrétních reálných úloh není vždy jednoduché odhadnout, jaký charakter algoritmu bude výhodnější. V případě testovacích sítí a daných množin W jsem původně předpokládal situaci vedoucí k aplikaci algoritmu s ubíráním hran, a proto jsem se jej rozhodl implementovat. Při testování se však ukázalo, že to zdaleka ne ve všech případech bylo správně. Počet vyřazených hran byl totiž často větší, než polovina původního počtu hran.

Na rychlost výpočtu má u obou typů implementace algoritmu podstatný vliv pořadí výběru hran. Teoreticky je výhodné, aby byly při výběru seřazeny hrany tak, aby bylo co nejrychleji dosaženo kvalitního řešení, které zajistí včasné opouštění nezajímavých větví stromu řešení. Nepodařilo se mi ovšem najít takové pravidlo řazení, které by obecně přineslo urychlení ve všech testovaných případech. V případě některých sítí výrazně výpočet urychlilo např. seřazení hran podle délky. Do finální podoby algoritmu jsem nakonec žádný jednotný princip řazení neimplementoval a testoval jsem vliv řazení mimo algoritmus. Řazení jsem aplikoval na vstupní množinu hran předem, aby jej bylo možné měnit bez zásahu do algoritmu.

Metody dalšího urychlení algoritmu

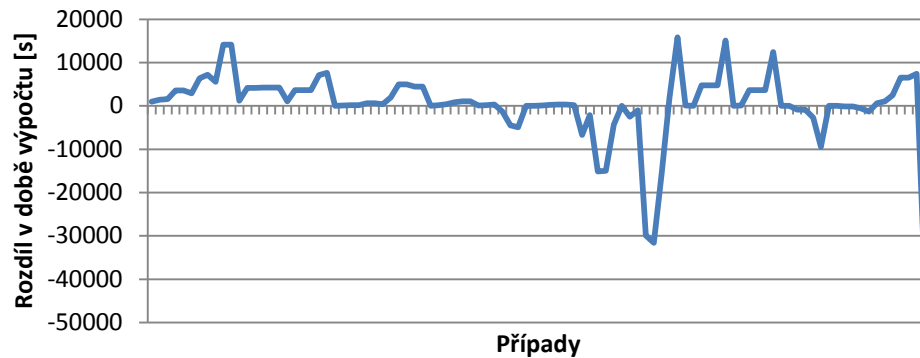
Výpočetní náročnost algoritmu implementovaného podle výše uvedených zásad však stále byla velmi vysoká. Výpočetní časy se nezdálo pohybovaly i kolem 10 hodin. Testovací

úlohy by sice byly tímto způsobem řešitelné, ale vzhledem k potřebě provést výpočty s různým nastavením parametrů a pro různé sítě jsem ještě v zájmu urychlení výpočtu aplikoval tyto úpravy:

- Podstatným přínosem (vzhledem k exponenciálnímu charakteru výpočetní náročnosti algoritmu na tomto parametru) bylo snížení počtu prvků množiny hran, se kterými algoritmus pracuje. Toho jsem dosáhl tím, že jsem v samostatném kroku našel nejdříve množinu významných hran, pro které platí, že vyřazení kterékoli z nich způsobí porušení podmínky CR2. Nalezení této množiny je polynomiálně složitě a z hlediska celkového času výpočtu představuje zanedbatelnou část. Vstupní množinu hran jsem pak přeradil tak, aby tyto hrany byly na začátku seznamu. Pokus o jejich vyřazení pak skončí porušením CR2 a celá větev začínající touto hranou je tím z prohledávání vyřazena.
- Další úvahy pak směřovaly k faktu, že po vyřazení hrany je nutné znovu ověřit splnění CR2, což vyžaduje výpočet matice vzdáleností. Zavedl jsem tedy do algoritmu reálný parametr $p \in (0;1)$, kterým se dá nastavit hranice, kdy dojde k otestování CR2. Myšlenka spočívala v tom, že by mohlo být výhodnější testovat CR2 až v situaci, kdy by množina E' mohla být novým nejlepším řešením. Realizace vypadá tak, že k testování dojde při splnění podmínky $d(E') < pd(E'_{min})$, kde E'_{min} je dosavadní nejlepší řešení. $p=0$ znamená testovat vždy a $p=1$ znamená testovat až při potenciálním zlepšení. Pro $p>0$ se sníží počet výpočtů matice vzdáleností, ale na druhou stranu se prohledávání zpravidla dostane hlouběji do stromu a k případnému odříznutí neproduktivní větve tak dojde později.

Při reálném testování takto implementovaného algoritmu exaktní metody se ukázalo, že v případě všech testovacích sítí došlo implementací úprav a vhodným výběrem hodnoty parametru p k podstatnému urychlení výpočtu. Především to bylo díky snížení počtu prohledávaných hran. Ve všech grafech se našly hrany, jejichž vyřazení nebylo možné. V případě odkladu testování však přínos není zdaleka jednoznačný. Potvrdilo se, že pozdější odříznutí neproduktivních větví v případě některých úloh vedlo nakonec (i přes úsporu při výpočtech matic vzdáleností) k celkovému nárůstu času výpočtu. V Některých případech i velmi podstatnému.

Situaci dokumentuje graf² na Obr. 4.1, který zobrazuje rozdíl času výpočtu pro $p=0$ a $p=1$ na množině mnoha různých testovacích sítí a různých hodnot další parametrů zadání. Záporná hodnota rozdílu znamená, že při $p=1$ trval výpočet déle.



Obr. 4.1: Rozdíl v době výpočtu exaktní metodou pro nastavení $p=0$ a $p=1$

Shrnutí výsledků implementace exaktní metody

Exaktní metodu se podařilo implementovat tak, že z pohledu potřeb mojí práce splnila své hlavní poslání. Bylo ji totiž možné úspěšně aplikovat při řešení všech testovacích úloh v přijatelném výpočetním čase, který se podle parametrů zadání a struktury sítě pohyboval v řádu minut až jednotek hodin. Vznikl tak soubor optimálních řešení, který byl velmi důležitý při hodnocení kvality a výsledků dalších metod, které budou popsány v dalším textu. Vlastní výsledky jednotlivých úloh hledání podsítí získané exaktní metodou jsou souhrnně uvedeny spolu s výsledky ostatních metod v kapitole 4.3. Praktické použití této metody je však významně omezeno vysokou výpočetní náročností.

4.2.2 Celočíselné lineární programování

Úlohu popsanou v kapitole 4.1 je možné při zachování všech označení formulovat také jako úlohu celočíselného lineárního programování. Pro testování jsem použil tuto formulaci:

Hledáme hodnoty těchto celočíselných proměnných

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \text{ pro } (i, j) \in E, i < j, \quad (4.1)$$

$$y_{vwij} \in \{0, 1\} \text{ pro } (v, w) \in W, (i, j) \in E, \quad (4.2)$$

které minimalizují hodnotu účelové funkce

² Přestože zobrazovaná data mají diskretní charakter, použil jsem z důvodu přehlednosti spojnicový charakter grafu. Cílem grafu je demonstrovat především variabilitu a znaménko rozdílu.

$$\sum_{(i,j) \in E} d(i,j)x_{ij} \rightarrow \min \quad (4.3)$$

a splňují následující omezující podmínky

$$\sum_{(i,j) \in E} d(i,j)y_{vwij} \leq qd(v,w) \text{ pro } (v,w) \in W, \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,v) \in E} y_{vwiw} + 1 = \sum_{(v,k) \in E} y_{vwvk} \text{ pro } (v,w) \in W, \quad (4.5)$$

$$\sum_{(i,w) \in E} y_{vwiw} = \sum_{(w,k) \in E} y_{vwvk} + 1 \text{ pro } (v,w) \in W, \quad (4.6)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} y_{vwij} = \sum_{(j,k) \in E} y_{vwjk} \text{ pro } (v,w) \in W, j \neq v, j \neq w, \quad (4.7)$$

$$y_{vwij} \leq x_{ij} \text{ pro } (v,w) \in W, (i,j) \in E, i < j$$

a

$$y_{vwij} \leq x_{ji} \text{ pro } (v,w) \in W, (i,j) \in E, j < i \quad (4.8)$$

Interpretace modelu

- Hodnota proměnné $x_{ij}=1$ znamená, že hrana (i,j) je prvkem množiny E' , tedy zůstává v redukovaném grafu a naopak $x_{ij}=0$ znamená, že je vyřazena.
- Hodnota $y_{vwij} = 1$ znamená, že v redukovaném grafu vede nejkratší cesta z v to w přes hranu (i,j) a $y_{vwij}=0$ znamená opak.
- Účelová funkce (4.3) vyjadřuje celkovou délku $d(E')$ podsítě.
- Omezující podmínka (4.4) zajišťuje splnění CR2, tedy že relativní prodloužení nejkratší cesty mezi uzly $(v,w) \in W$ nepřekročí q .
- Omezující podmínky (4.5), (4.6) a (4.7) zajišťují, že nejkratší cesta mezi vrcholy v a w začíná ve vrcholu v , končí ve vrcholu w a prochází dalšími vrcholy bez větvení a spojování.
- Omezující podmínka (4.8) zajišťuje, že nejkratší cesta mezi vrcholy v a w prochází jen hranami z množiny E' , tedy jen hranami podsítě.

Pro vytváření textového souboru se zadáním úlohy bylo nutné připravit a implementovat algoritmus. Pro testovací síť obsahoval textový zápis cca 1900 řádků. K řešení vlastní úlohy lineárního programování jsem použil freewarový solver LPSolve IDE 5.5.0.15.

Výsledky

Metodu jsem použil na řešení stejných testovacích úloh, jako v případě exaktní metody. S jednou výjimkou, kdy solver nenalezl řešení LP úlohy, proběhlo ve všech případech řešení úspěšně a vedlo ke stejnému výsledku, jako při použití exaktní metody. Konkrétní výsledky jsou uvedeny souhrnně v kapitole 4.3 na straně 42.

Srovnání časové náročnosti řešení některých testovacích úloh pro různé hodnoty parametru q a různý počet vybraných dvojic (PVD) z množiny W pomocí lineárního programování (LP) a exaktní metody (EM) je uvedeno v Tab. 4.1.

Testovací sít'	Počet hran sítě	q	PVD	Čas výpočtu EM [s]	Čas výpočtu LP [s]
1	30	1,2	13	1596	3,5
		1,2	20	1053	11,4
		1,5	13	12430	2,4
		1,5	20	8844	8,6
2	30	1,2	13	5205	7
		1,2	20	3658	10,8
		1,5	13	7757	9,5
		1,5	20	1194	9,8
3	32	1,2	13	3033	7,9
		1,2	20	142	27,6
		1,5	13	146	8,9
		1,5	20	2681	31,8
4	30	1,2	13	2735	4,2
		1,2	20	226	17,5
		1,5	13	7884	5,1
		1,5	20	1906	19,7
5	29	1,2	13	485	7,8
		1,2	20	41	11,5
		1,5	13	2479	8,6
		1,5	20	555	19,2
6	32	1,2	13	3168	13,6
		1,2	20	1611	46,7
		1,5	13	13856	790,6
		1,5	20	7237	nedokončeno
7	31	1,2	13	16672	10,5
		1,2	20	2491	41,5
		1,5	13	17912	8,1
		1,5	20	4818	44,8
8	28	1,2	13	900	4,3
		1,2	20	347	15,2
		1,5	13	1606	8,9
		1,5	20	730	17,9
9	30	1,2	13	11	6,8
		1,2	20	6	17,8
		1,5	13	2370	25,7
		1,5	20	240	64
10	47	1,2	13	nedokončeno	15,9
		1,2	20	nedokončeno	49
		1,5	13	nedokončeno	32,7
		1,5	20	nedokončeno	128,6

Tab. 4.1: Srovnání výpočetní náročnosti exaktní metody a lineárního programování

Ze srovnání je zřejmé, že řešení úloh pomocí lineárního programování bylo (pokud solver řešení nalezl) efektivnější než exaktní metoda. Testování na síti s větším rozsahem (sít' č.10 v Tab. 4.1) prokázalo, že je tato metoda použitelná i pro větší rozsahy úloh než v případě exaktní metody. Dále je z výsledku zřejmé, že řešení pomocí lineárního programování nemá kombinatorický charakter a výpočetní čas záleží více na struktuře úlohy než na jejím rozsahu. V Tab. 4.1 je vidět, že výpočetní čas pro síť č.10 s 30 vrcholy a 47 hranami je pro některé hodnoty parametrů zadání dokonce menší, než pro jiné sítě s menším rozsahem (markantní je to např. na síti č.6 s 20 vrcholy a 32 hranami).

4.2.3 Heuristická metoda

Implementovaná a testovaná heuristická metoda má charakter „hladového“ algoritmu a směřuje proto velmi rychle k řešení, které ale samozřejmě nemusí být optimální. Je nesrovnatelně méně výpočetně náročná.

Algoritmus heuristické metody

- 1) Inicializace algoritmu a proměnných
 - $j = 0, E_j = \emptyset, G_j = G.$
- 2) Nalezení matice nejkratších vzdáleností pro všechny dvojice vrcholů z množiny $V \times V$.
 - Tento krok je realizován výpočtem Floydova algoritmu.
- 3) Pro každou hranu, která nebyla dosud vybrána do množiny E' je spočteno číslo m , které vyjadřuje počet těch vybraných dvojic vrcholů z množiny W , pro které platí, že hrana je součástí cesty z jednoho vrcholu dvojice do druhého.
 - pro každé $e \in E - E_j$ spočteme $m_j(e) = \text{card}\{(v, w) \in V \times V : e \in p(v, w)\}$
- 4) Nalezení takové hrany e z množiny $E - E'$, pro kterou je $m(e)$ maximální
 - nalezneme $e^* \in E - E_j$ takové, že $m_j(e^*) = \max\{m_j(e) : e \in E - E_j\}.$
 - V případě rovnosti je vybrána první v pořadí
 - Pokud $m_j(e) = 0$ pro každé $e \in E - E_j$, pak algoritmus končí a množina E' je redukovanou množinou hran, jinak následuje krok 5).
- 5) Hrana, pro kterou je hodnota m maximální se přidá do množiny E' a její délka se pro účely dalšího výpočtu zkrátí.
 - $E_{j+1} = E_j \cup \{e^*\}, d_{j+1}(e^*) = d(e^*)/q, d_{j+1}(e) = d_j(e)$ pro každé $e \in E - \{e^*\},$
 - $G_{j+1} = (V, E, d_{j+1}),$
 - $j = j + 1$
 - návrat ke kroku 2)

Správnost algoritmu

Splnění podmínky CR2 není v rámci algoritmu heuristické metody explicitně testováno. Metoda tedy předpokládá, že řešení, které najde, je také přípustným řešením. Tuto skutečnost je ovšem potřebné dokázat. Důkaz správnosti, tedy faktu, že algoritmus poskytuje jen přípustná řešení, se opírá o následující lemma.

Lemma

V souladu s popisem použitého modelu (formulován v kapitole 4.1) je dán konečný, souvislý a neorientovaný graf $G=(V,E,d)$, kde $d(e)$ je délka hrany $e \in E$.

Dále necht' $d(p) = d(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n) = d(e_1) + d(e_2) + \dots + d(e_n)$ je délka cesty p v grafu procházející hranami e_1 až e_n . $d(v,w)$ kde $v,w \in V$ pak označuje vzdálenost vrcholů v grafu G , která je rovna nejkratší cestě z v do w .

Pro $E' \subset E$ a $q > 1$ necht':

$$d'(e) = d(e)/q \text{ pro } e \in E' \text{ a } d'(e) = d(e) \text{ pro } e \in E - E'$$

Je-li $p = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ nejkratší cesta spojující vrcholy v, w v grafu $G_o = (V, E, d')$, pak

$$d(p) \leq qd(v, w). \quad (4.9)$$

Důkaz:

Je zřejmé, že

$$q \cdot d'(p) = q(d'(e_1) + d'(e_2) + \dots + d'(e_n)) \geq d(e_1) + d(e_2) + \dots + d(e_n) = d(p)$$

Je-li r je nejkratší cesta spojující vrcholy v, w v grafu G , je jasné, že v grafu G_o to platit nemusí. Ale vzhledem k tomu, že $d'(e) \leq d(e)$ pro each $e \in E$, platí:

$$d'(p) \leq d'(r) \Rightarrow d(p) \leq q \cdot d'(p) \leq q \cdot d'(r) \leq q \cdot d(r) = q \cdot d(v, w)$$

Heuristický algoritmus končí v kroku 4) za stavu, kdy $m_j(e)=0$ pro každé $e \in E - E_j$. Pak pro každou dvojici $(v, w) \in W$ nejkratší cesta $p = (v, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, w)$ spojující vrcholy v a w v grafu $G_j=(V, E, d_j)$ prochází jen hranami z množiny $E' = E_j$. Tudiž je to také nejkratší cesta spojující vrcholy v a w v grafu $G' = (V, E', d')$, to znamená, že $d'(p) = d'(v, w)$. Z platnosti (4.9) pak vyplývá $d'(v, w) \leq q \cdot d(v, w)$, což znamená, že podmínky CR2 je splněna. Z toho vyplývá, že $G' = (V, E', d')$ představuje přípustné, nikoli však nutně optimální řešení.

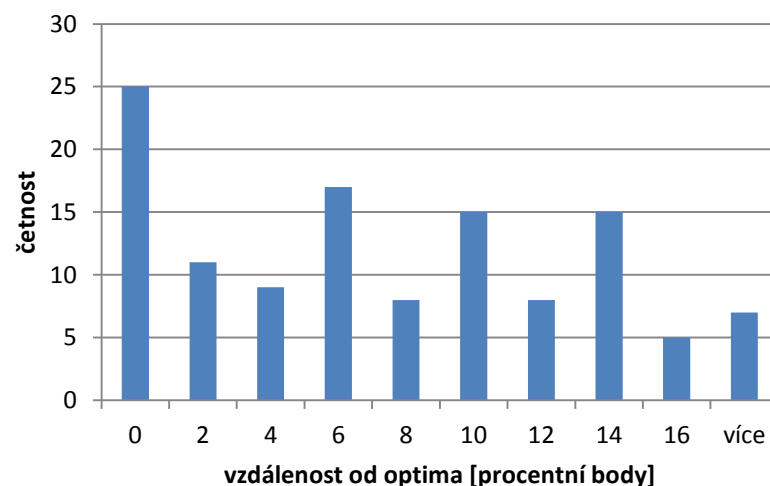
Kvalita řešení poskytovaných heuristickou metodou

Stejně jako v případě předchozích metod jsem po implementaci metody provedl testování na stejné množině sítí. Algoritmus vždy našel správné řešení. Tento fakt byl při testování

vždy ověřen explicitní kontrolou splnění kritéria CR2. Získané výsledky jsou souhrnně uvedeny v kapitole 4.3.

Výpočetní náročnost heuristického algoritmu je vzhledem k jeho charakteru samozřejmě podstatně nižší, než u ostatních metod. Má polynomiální charakter a výpočetně nejnáročnější částí algoritmu je hledání matice nejkratších vzdáleností v síti (Floydův algoritmus). Výpočetní časy se (na stejném hardwarovém vybavení jako u ostatních metod) pohybovaly v naprosté většině případů pod 1 sekundu.

Pro hodnocení kvality řešení získaných použitím heuristické metody jsem využil výsledky získané exaktní metodou. Optimálního řešení dosáhl heuristický algoritmus jen v některých případech. Ty jsou vyznačeny v tabulkách Tab. 4.2 a Tab. 4.3 s výsledky v kapitole 4.3 zelenou barvou. Histogram vzdálenosti řešení poskytnutých heuristickým algoritmem od optimálního řešení přináší graf na Obr. 4.2. Vzdálenost je vyjádřena rozdílem mezi mírou redukce dosaženou heuristickou metodou a exaktním metodou v procentních bodech.



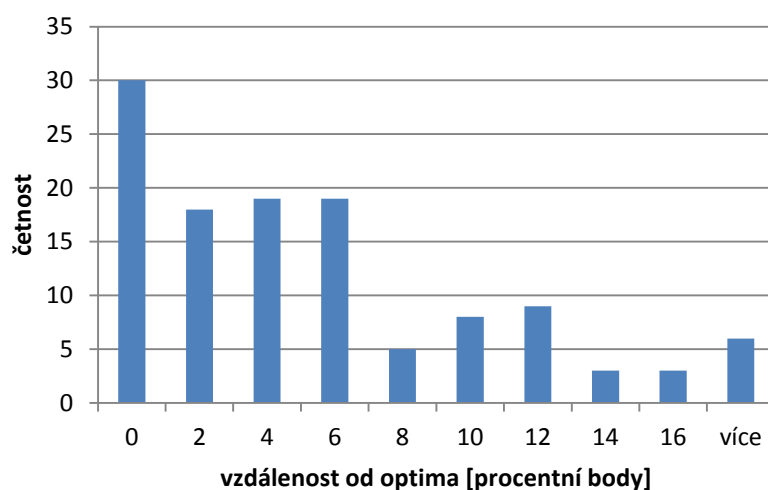
Obr. 4.2: Histogram vzdálenosti výsledku neupravené heuristické metody od optimálního řešení

Vzhledem k tomu, že ve 35 případech byl výsledek heuristické metody vzdálen od optimálního řešení o více než 10 procentních bodů, hledal jsem možnosti úpravy realizace algoritmu, které by přinesly zlepšení kvality poskytovaných řešení. Algoritmus bez provedených úprav je pro účely dalšího porovnání označen jako „neupravená heuristika“ ve zkratce „HN“

Úpravy realizace algoritmu heuristické metody

První dílčí úprava realizace heuristického algoritmu je inspirována situací u exaktní metody. Spočívá v tom, že v grafu většinou existují hrany, jejichž vyloučení způsobí porušení

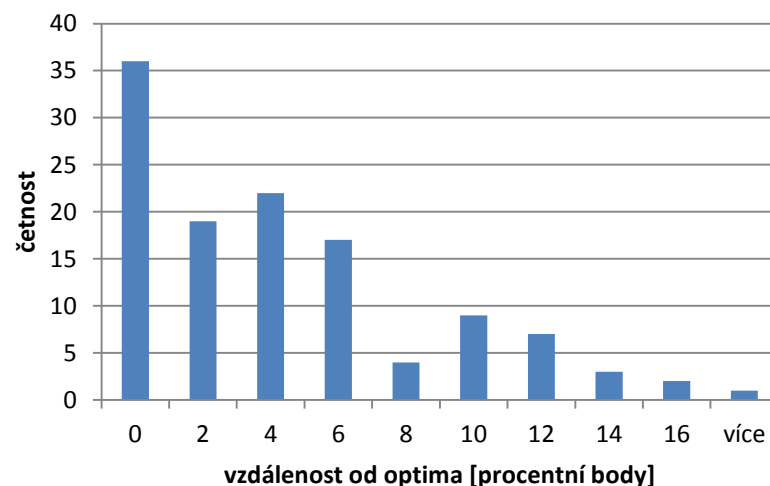
podmínky CR2 (viz kapitola 4.1). Pokud tedy heuristický algoritmus poskytuje správné řešení, musí tyto hrany být ve výsledné podsíti obsaženy. Testoval jsem tedy upravenou realizaci heuristického algoritmu, ve které jsem před zahájením vlastního, výše popsaného algoritmu, našel „nevylučitelné“ hrany a jejich množinu pak použil jako výchozí množinu E_0 . Takto upravený algoritmus je pro účely dalšího porovnání označen jako „upravená heuristika“, ve zkratce „HU“. Histogram vzdálenosti řešení poskytnutých takto upraveným heuristickým algoritmem od optimálního řešení přináší graf na Obr. 4.3. Způsob vyjádření vzdálenosti je samozřejmě stejný, jako v případě neupraveného algoritmu.



Obr. 4.3: Histogram vzdálenosti výsledku upravené heuristické metody od optimálního řešení

Z histogramu vyplývá, že tato úprava přinesla dílčí zlepšení. Zvýšil se počet případů, kdy heuristický algoritmus dosáhl optimálního řešení a zároveň poklesl počet případů, kdy byl výsledek heuristické metody vzdálen od optimálního řešení o více než 10 procentních bodů z 35 na 21. Dále nedošlo u žádné z testovacích úloh použitím upraveného algoritmu ke zhoršení kvality výsledku. Proto jsem tuto realizaci ponechal jako základ pro další úpravu. Ta vychází z faktu, že výše popsaný heuristický algoritmus má charakter „hladového algoritmu“. To znamená, že postupuje k výslednému řešení přímočaře a v každém kroku vybírá řešení, které v danou chvíli „maximalizuje zisk“. To však může zbytečně zafixovat cestu k řešení do větve, která nevede k optimálnímu řešení. V řadě v praxi používaných metod, jako jsou simulované žíhání, floating search methods, genetické algoritmy aj. se tomuto nepříjemnému faktu částečně předchází zavedením náhodných prvků ve formě zpětného vyřazování již jednou vybraných řešení, náhodnými změnami (mutace v případě genetických algoritmů) apod. Rozhodl jsem se proto tuto myšlenku alespoň částečně implementovat do realizace heuristického algoritmu. To vedlo k iterativní realizaci

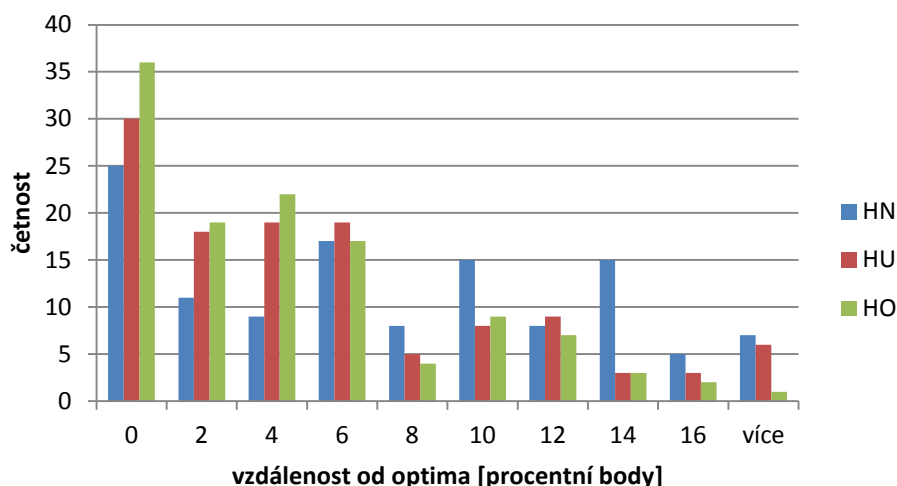
algoritmu, kdy je upravený heuristický algoritmus prováděn opakovaně s tím, že je k množině předvybraných hran E_0 vždy nuceně přidávána další hrana z množiny $E-E_0$ a jednou je algoritmus proveden bez tohoto přidání. Jako výsledné řešení je pak vybrán nejlepší výsledek. Toto provedení nemůže zhoršit výsledek upraveného algoritmu, ale může vést algoritmus jinými cestami, které mohou vést k lepším řešením. To se nakonec potvrdilo i testováním. Výpočetní náročnost heuristického algoritmu se tímto postupem sice zvýší, ale stále je zachován její polynomiální charakter. Takto upravený algoritmus je pro účely dalšího porovnání označen jako „opakovaná heuristika“, ve zkratce „HO“. Histogram vzdálenosti řešení poskytnutých takto upraveným heuristickým algoritmem od optimálního řešení přináší graf na Obr. 4.3. Způsob vyjádření vzdálenosti je opět stejný, jako v případě neupraveného algoritmu.



Obr. 4.4: Histogram vzdálenosti výsledku opakované upravené heuristické metody od optimálního řešení

Z histogramu vyplývá, že tato úprava přinesla další dílčí zlepšení. Opět se zvýšil počet případů, kdy heuristický algoritmus dosáhl optimálního řešení a zároveň poklesl počet případů, kdy byl výsledek heuristické metody vzdálen od optimálního řešení o více než 10 procentních bodů z původních 35 na 13.

Na Obr. 4.5 je pro srovnání uvedena ještě kompilace předchozích grafů.



Obr. 4.5: Histogramy vzdálenosti výsledku různých realizací heuristické metody od optimálního řešení

4.3 Přehled experimentálních výsledků

V této kapitole jsou souhrnně uvedeny výsledky všech výše popsaných metod získané na množině 10 náhodně generovaných testovacích sítí (viz síť č. 1 až 10 v Příloze A). Pro každou z těchto sítí byla daná metoda testována pro počet vybraných dvojic PD (prvků množiny W) 13 a 20 a pro hodnotu parametru $q \in \{1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6\}$

Označení metod v tabulkách Tab. 4.2 a Tab. 4.3 je v souladu s předchozím textem, tedy:

HN	původní neupravený heuristický algoritmus
HU	upravený heuristický algoritmus (předvýběr hran)
HO	upravený heuristický algoritmus s opakováním
EM	exaktní metoda
LP	celočíslné lineární programování

Délky podsítí (redukovaných sítí) jsou v tabulkách Tab. 4.2 a Tab. 4.3 uvedeny v % původní délky neredukované sítě. Tedy menší hodnota znamená lepší výsledek. Výsledky exaktní metody a celočíselného lineárního programování byly ve všech případech shodné a jsou proto uvedeny společně v jednom sloupci. Zeleným pozadím buněk jsou označeny případy, kdy nejlepší výsledek získaný heuristickou metodou byl zároveň optimálním řešením. Naopak červeným pozadím buněk jsou označeny případy, kdy i nejlepší výsledek heuristiky byl o více než 10 procentních bodů horší než optimální řešení. Modrou barvou písma jsou pak označeny buňky s nejlepším výsledkem heuristiky. Tedy v těch případech, kdy některý výsledek heuristiky není modrým písmem, došlo aplikací úprav v heuristickém algoritmu ke zlepšení výsledku.

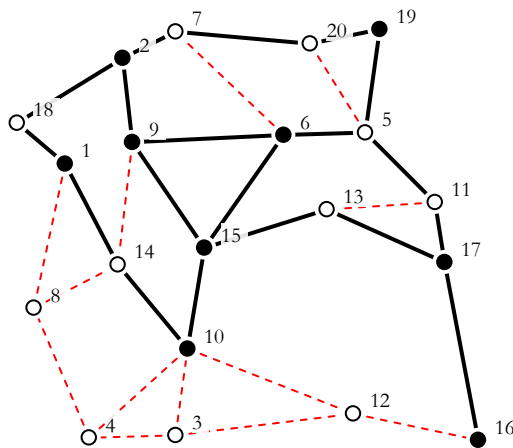
Tab. 4.2: Výsledky testovaných metod pro síť č. 1 až 5

Testovací síť	PD	q	Délka redukované podsítě [% původní délky]			
			HN	HU	HO	EM a LP
1	13	1,1	42,77%	42,77%	42,77%	42,77%
	13	1,2	42,77%	42,77%	41,49%	41,49%
	13	1,3	42,77%	42,77%	41,49%	38,21%
	13	1,4	42,77%	38,71%	37,43%	34,15%
	13	1,5	38,71%	38,71%	37,43%	34,15%
	13	1,6	38,71%	38,71%	35,39%	34,11%
	20	1,1	47,46%	47,46%	47,46%	47,46%
	20	1,2	47,46%	41,49%	41,49%	41,49%
	20	1,3	47,46%	41,49%	41,49%	38,21%
	20	1,4	37,43%	37,43%	37,43%	34,15%
	20	1,5	37,43%	37,43%	37,43%	34,15%
2	13	1,1	32,23%	32,23%	32,23%	32,23%
	13	1,2	32,23%	32,23%	32,23%	32,23%
	13	1,3	32,23%	32,23%	32,23%	32,23%
	13	1,4	32,23%	32,23%	32,23%	32,23%
	13	1,5	32,23%	32,23%	32,23%	26,93%
	13	1,6	32,23%	32,23%	32,23%	26,93%
	20	1,1	46,91%	46,91%	46,91%	40,81%
	20	1,2	40,81%	40,81%	40,81%	32,23%
	20	1,3	32,23%	32,23%	32,23%	32,23%
	20	1,4	32,23%	32,23%	32,23%	32,23%
	20	1,5	32,23%	32,23%	32,23%	32,23%
3	13	1,1	38,43%	38,43%	38,43%	38,43%
	13	1,2	38,43%	38,43%	38,43%	36,44%
	13	1,3	38,43%	38,43%	36,97%	36,44%
	13	1,4	38,43%	38,43%	36,97%	36,44%
	13	1,5	38,43%	38,43%	35,26%	33,80%
	13	1,6	36,97%	36,97%	33,80%	33,80%
	20	1,1	55,36%	55,36%	55,36%	55,36%
	20	1,2	55,36%	55,36%	55,36%	54,84%
	20	1,3	55,36%	55,36%	55,36%	54,83%
	20	1,4	55,36%	55,36%	54,84%	54,83%
	20	1,5	55,36%	52,59%	48,58%	42,92%
4	13	1,1	43,86%	43,86%	43,86%	43,86%
	13	1,2	43,86%	36,48%	36,48%	36,22%
	13	1,3	43,86%	36,48%	36,48%	35,85%
	13	1,4	43,86%	36,48%	36,48%	35,85%
	13	1,5	43,86%	36,48%	36,48%	35,85%
	13	1,6	43,86%	36,48%	36,48%	34,56%
	20	1,1	58,81%	58,81%	58,81%	58,81%
	20	1,2	58,81%	51,43%	51,43%	50,33%
	20	1,3	58,81%	51,43%	51,43%	42,73%
	20	1,4	50,11%	50,11%	50,11%	42,73%
	20	1,5	50,11%	42,73%	42,73%	41,63%
5	13	1,1	41,01%	41,01%	41,01%	41,01%
	13	1,2	34,39%	34,39%	34,39%	34,39%
	13	1,3	34,39%	34,39%	34,39%	34,39%
	13	1,4	34,39%	34,39%	34,39%	34,39%
	13	1,5	34,39%	34,39%	34,39%	34,39%
	13	1,6	34,39%	34,39%	34,39%	34,39%
	20	1,1	50,01%	50,01%	50,01%	50,01%
	20	1,2	50,01%	50,01%	50,01%	46,63%
	20	1,3	37,63%	37,63%	37,63%	37,63%
	20	1,4	37,63%	37,63%	37,63%	37,63%
	20	1,5	37,63%	37,63%	37,63%	37,63%
	20	1,6	37,63%	37,63%	37,63%	37,63%

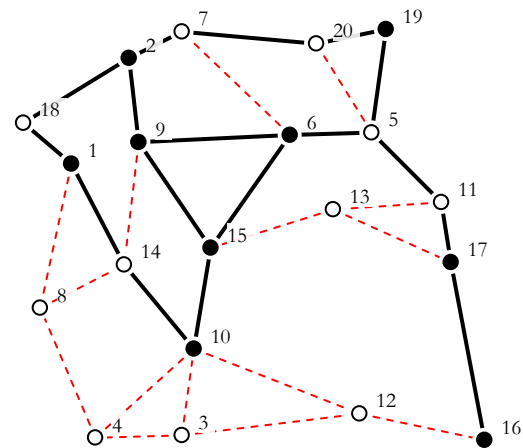
Tab. 4.3: Výsledky testovaných metod pro síť č. 6 až 10

Testovací síť	PD	q	Délka redukované podsítě [% původní délky]			
			HN	HU	HO	EM a LP
6	13	1,1	47,55%	47,55%	47,55%	43,72%
	13	1,2	47,55%	47,55%	47,55%	41,84%
	13	1,3	47,55%	47,55%	47,55%	38,82%
	13	1,4	47,55%	47,55%	47,03%	38,31%
	13	1,5	47,55%	47,55%	42,36%	38,31%
	13	1,6	38,82%	44,01%	38,82%	38,31%
	20	1,1	57,35%	53,72%	53,72%	49,89%
	20	1,2	57,35%	53,72%	53,72%	49,38%
	20	1,3	57,35%	57,35%	53,72%	47,19%
	20	1,4	57,35%	57,35%	56,83%	43,14%
	20	1,5	57,35%	57,35%	52,15%	43,14%
	20	1,6	57,35%	48,62%	48,62%	43,14%
7	13	1,1	71,61%	71,61%	67,46%	56,66%
	13	1,2	60,13%	60,13%	58,44%	43,45%
	13	1,3	48,85%	48,85%	48,85%	43,45%
	13	1,4	48,85%	48,85%	46,52%	38,25%
	13	1,5	45,78%	45,78%	43,45%	38,25%
	13	1,6	45,78%	45,78%	43,45%	33,95%
	20	1,1	79,19%	79,19%	77,94%	60,44%
	20	1,2	65,05%	65,05%	50,79%	45,39%
	20	1,3	50,79%	50,79%	50,79%	45,39%
	20	1,4	50,79%	50,79%	48,46%	45,39%
	20	1,5	50,81%	50,81%	48,48%	45,39%
	20	1,6	47,72%	47,72%	38,81%	38,81%
8	13	1,1	40,59%	38,51%	38,51%	38,51%
	13	1,2	40,59%	30,64%	30,64%	27,38%
	13	1,3	40,59%	30,64%	30,64%	27,38%
	13	1,4	40,59%	30,64%	30,64%	27,38%
	13	1,5	40,59%	30,64%	30,64%	27,38%
	13	1,6	40,59%	30,64%	30,64%	27,38%
	20	1,1	47,15%	45,07%	45,07%	45,07%
	20	1,2	47,15%	37,20%	37,20%	33,94%
	20	1,3	47,15%	37,20%	37,20%	33,94%
	20	1,4	47,15%	37,20%	37,20%	33,94%
	20	1,5	47,15%	37,20%	37,20%	33,94%
	20	1,6	47,15%	37,20%	37,20%	33,94%
9	13	1,1	52,12%	52,12%	52,12%	48,38%
	13	1,2	48,38%	48,38%	48,38%	41,37%
	13	1,3	35,37%	35,37%	35,37%	33,54%
	13	1,4	35,37%	35,37%	33,54%	33,54%
	13	1,5	35,37%	35,37%	33,54%	33,54%
	13	1,6	35,37%	35,37%	33,54%	29,31%
	20	1,1	62,01%	62,01%	62,01%	51,61%
	20	1,2	58,27%	58,27%	58,27%	46,44%
	20	1,3	38,61%	38,61%	38,61%	33,54%
	20	1,4	38,61%	33,54%	33,54%	33,54%
	20	1,5	38,61%	33,54%	33,54%	33,54%
	20	1,6	38,61%	33,54%	33,54%	29,31%
10	13	1,1	72,01%	72,01%	72,01%	67,89%
	13	1,2	72,01%	72,01%	72,01%	60,12%
	13	1,3	52,99%	52,99%	52,99%	40,59%
	13	1,4	52,99%	50,93%	50,93%	40,59%
	13	1,5	52,99%	52,99%	52,99%	39,30%
	13	1,6	52,99%	52,99%	48,64%	39,30%
	20	1,1	76,07%	76,07%	76,07%	71,95%
	20	1,2	76,07%	76,07%	76,07%	64,18%
	20	1,3	71,95%	71,95%	65,51%	60,43%
	20	1,4	71,95%	71,95%	60,43%	54,37%
	20	1,5	65,51%	65,51%	64,18%	48,69%
	20	1,6	65,51%	65,51%	60,43%	48,69%

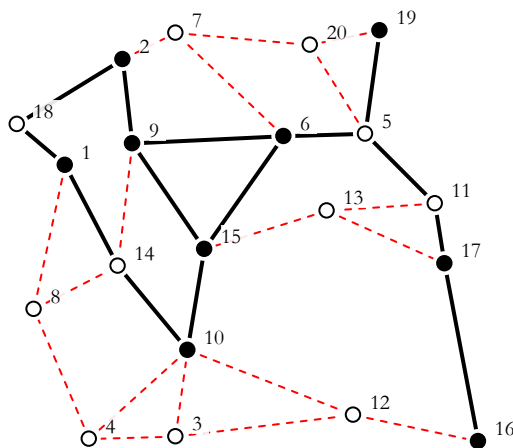
Výsledky pro všechny testovací sítě uvedené Tab. 4.2 a Tab. 4.3 jsou graficky znázorněny v Příloze B. Na tomto místě je na Obr. 4.6, Obr. 4.7, Obr. 4.8 a Obr. 4.9 pro ukázkou vybrán případ pro síť č. 3, $PD = 20$ a $q = 1,6$, kdy je patrný vliv různých realizací heuristického algoritmu a zároveň nejlepší výsledek heuristické metody dosáhl optimálního řešení.



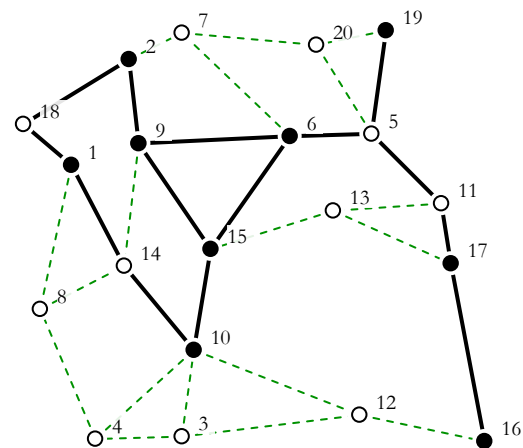
Obr. 4.6: Neupravená heuristika
(sít' č. 3, PD=20 a q=1,6)



Obr. 4.7: Upravená heuristika
(sít' č. 3, PD=20 a q=1,6)

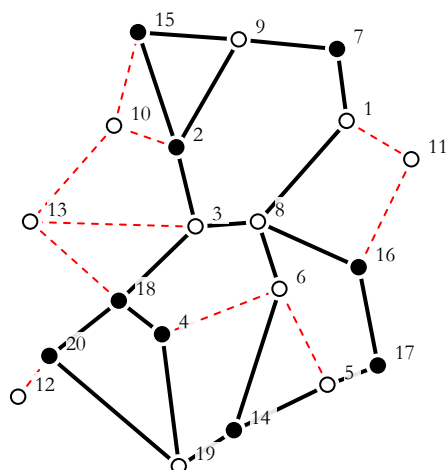


Obr. 4.8: Heuristika s opakováním
(sít' č. 3, PD=20 a q=1,6)

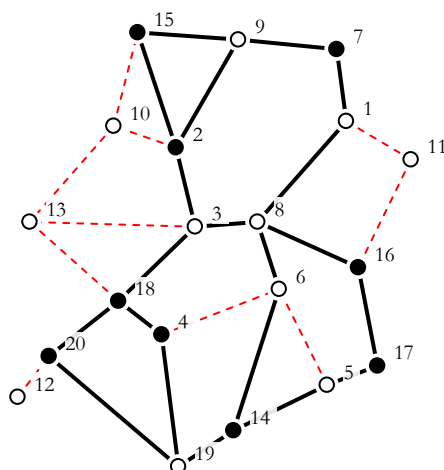


Obr. 4.9: Optimální řešení – EM a LP
(sít' č. 3, PD=20 a q=1,6)

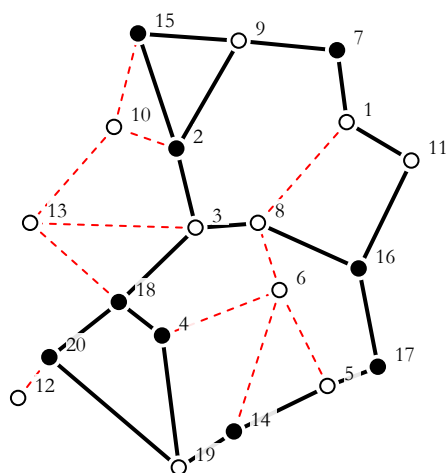
Na Obr. 4.10, Obr. 4.11, Obr. 4.12 a Obr. 4.13 je naopak vybrán případ pro síť č. 10, PD=20 a $q=1,6$, kdy úpravy realizace heuristického algoritmu sice přinesly dílčí zlepšení, ale i tak je nejlepší výsledek heuristické metody o více než 11 procentních bodů horší, než optimální řešení.



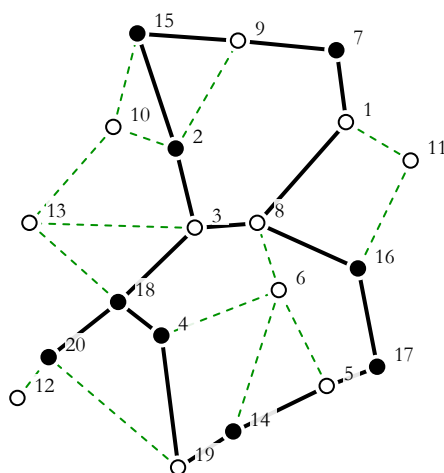
Obr. 4.10: Neupravená heuristika
(sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$)



Obr. 4.11: Upravená heuristika
(sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$)



Obr. 4.12: Heuristika s opakováním
(sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$)



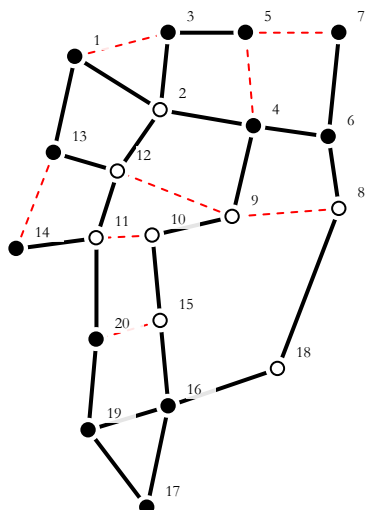
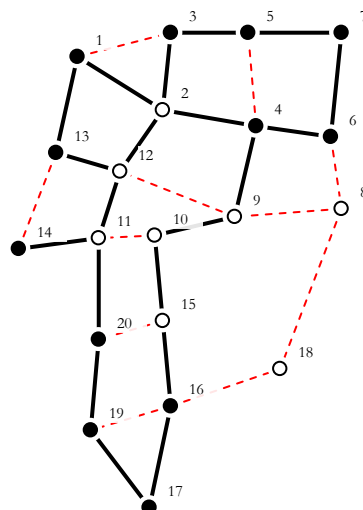
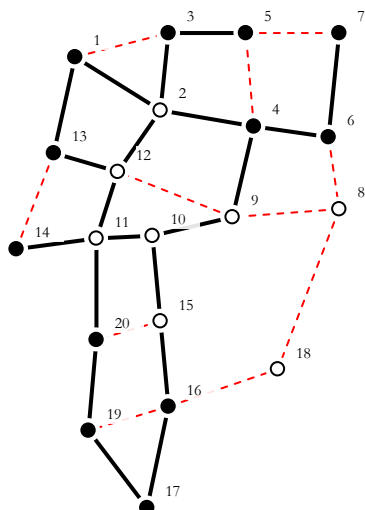
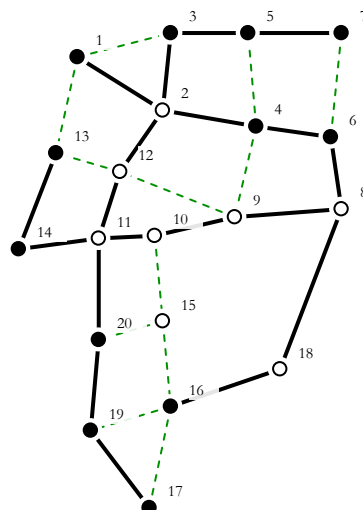
Obr. 4.13: Optimální řešení – EM a LP
(sít' č. 10, PD=20 a $q=1,6$)

Kromě náhodně generovaných tetovacích sítí jsem využil k testování i jednu reálnou sít', která popisuje situaci ve městě Piešťany. Popis sítě a seznam důležitých dvojic vrcholů je uveden v Příloze A pod číslem 15. Výsledky dosažené jednotlivými metodami pro různé hodnoty q jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 4.4: Výsledky redukce sítě č. 15 (Piešťany)

Testovací sít'	PD	q	Délka redukované podsítě [% původní délky]			
			HN	HU	HO	EM a LP
Piešťany (č. 15)	20	1,1	71,83%	71,83%	71,83%	62,63%
	20	1,2	71,83%	60,14%	58,61%	55,68%
	20	1,3	60,60%	60,60%	60,42%	48,17%
	20	1,4	60,60%	60,60%	58,61%	48,17%
	20	1,5	57,67%	57,67%	55,28%	47,73%
	20	1,6	54,22%	54,22%	53,74%	47,54%

Z tabulky výsledků je zřejmé, že mezi heuristikami bylo dosaženo nejlepších výsledků heuristickým algoritmem s opakováním HO, stejně jako v případě testovacích sítí č. 1 až 10. Bohužel však ani v jednom případě nebylo pomocí heuristické metody dosaženo optimálního řešení. Graficky zpracované výsledky jsou uvedeny v Příloze B. Na tomto místě je na Obr. 4.14, Obr. 4.15, Obr. 4.16 a Obr. 4.17 pro ukázkou vybrán případ pro $q=1,2$, kdy je opět patrný vliv různých realizací heuristického algoritmu.

Obr. 4.14: Neupravená heuristika $q=1,2$ Obr. 4.15: Upravená heuristika $q=1,2$ Obr. 4.16: Heuristika s opakováním $q=1,2$ Obr. 4.17: Optimální řešení (EM a LP) $q=1,2$

5 Návrh autobusové linky

Způsob formulace optimalizačního problému při návrhu autobusové linky, jehož řešení je popsáno v této kapitole, vychází z předpokladu, že existuje relativně řídká osídlená oblast, která potřebuje být nově obsloužena autobusovou linkou. Může se jednat např. o residenční čtvrti rodinných domů a další zdroje poptávky cestujících jako jsou obchody, úřady či kulturní centra. Místa, kde vzniká poptávka cestujících, mohou být reprezentována jako množina vrcholů grafu $G = (V, E, q, d)$, kde množina hran E reprezentuje pěší úseky mezi sousedními vrcholy, $d(e)$ je délka úseku $e \in E$ a $q(v)$ je velikost poptávky ve vrcholu $v \in V$ za jednotku času. Některá místa (reprezentovaná vrcholy z množiny V) jsou vhodná pro autobusovou zastávku. Ty představují množinu $W \subset V$. Úseky ulic a silnice mezi těmito místy odpovídají hranám z množiny F s délkou $\delta(e)$. Graf $G_W = (W, F, \delta)$ představuje síť vhodnou pro provoz autobusových linek. Je zřejmé, že není z ekonomických důvodů možné zřídit zastávku v každém potenciálním místě $w \in W$. Problém je tedy najít takovou autobusovou linku $r = (s_1, \dots, s_n)$ $s_i \in W$, uspokojivě pokryje poptávku cestujících a zároveň bude ekonomicky přijatelná pro přepravní společnost. Z hlediska cestujících se jedná o požadavek dostupnosti. Ta může být definována jako:

- 1) Každý cestující musí mít zajištěno, že vzdálenost nejbližší autobusové zastávky nepřekročí daný limit λ .
- 2) Je zajištěno, že počet procent cestujících, pro něž vzdálenost nejbližší autobusové zastávky překročí limit λ , nepřekročí limit η .
- 3) Střední hodnota vzdálenosti nejbližší zastávky pro všechny cestující nepřekročí limit λ .

Výsledky některých výzkumů např. (Černá, Intenzifikácia MHD a jej možných rozpor s dochádzkovým limitom, 2003) a (Černá, Poznámka k podmienke dostupnosti zastávok hromadnej dopravy, 2003) ukazují, že použití definice podle 1) často vede na neefektivní řešení jak pro přepravce, tak i nakonec pro cestující. Ve formulaci optimalizační úlohy pro účely této práce je využito definice podle 3). Použité metody by ovšem bylo možné snadno upravit pro využití definic 1) nebo 2).

Z hlediska přepravní společnosti se jedná především o ekonomická kritéria. Ta mohou být vyjádřena dvěma způsoby.

- a) Minimální délka linky
- b) Minimální frekvence spojů

V této práci se zabývám optimalizací vzhledem ke kritériu a), které (na rozdíl od kritéria b), které může být řešeno nezávisle) úzce souvisí s návrhem linky.

5.1 Formulace optimalizačního problému

V souladu s podmínkami uvedenými v předchozím textu je možné pro úlohu formulovat následující matematický model:

Nechť $G = (V, E, q, d)$ je konečný neorientovaný graf s poptávkovou funkcí $q: V \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$ a délkami hran $d: E \rightarrow (0; \infty)$. $d(u, v)$ označuje vzdálenost vrcholů $u, v \in V$. $d(u, S)$ označuje vzdálenost vrcholu u od množiny vrcholů $S \subset W$, která je rovna $\min\{d(u, v) : v \in S\}$. Dále existuje množina $W \subset V$ a $G_W = (W, F, \delta)$ je konečný neorientovaný graf s délkami hran $\delta(e)$, které nemusí být rovny $d(e)$ ani pro $e \in E \cap F$. $\delta(S)$ pak označuje délku nejkratší cesty spojující vrcholy patřící do S v grafu G_W pro každé $S \subset W$. Dále $\lambda \in (0; \infty)$ a $Q = \sum_{v \in V} q(v)$.

Cílem je nalézt takovou množinu $S \subset W$, že platí

$$\text{CL1: } \mu(S) = \frac{1}{Q} \sum_{v \in V} q(v) d(v, S) \leq \lambda,$$

$$\text{CL2: } \delta(S) \rightarrow \min$$

Pokud by měla úloha více řešení, pak budeme za konečné řešení považovat tu množinu S , jejíž počet prvků je minimální.

5.2 Metody řešení

Z formulace optimalizační úlohy vyplývá, že se jedná o NP-těžký problém, neboť úloha obsahuje jako podproblém hledání nejkratší cesty spojující množinu vrcholů v grafu. Ta je známá jako úloha obchodního cestujícího. V tomto případě se jedná o otevřenou variantu, protože cesta neobsahuje návrat do výchozího bodu. Pro řešení tohoto problému je známa řada exaktních a hlavně heuristických metod. Pro účely této práce bylo, podobně jako v případě úlohy 4.1, velmi důležité získat optimální řešení testovacích úloh, aby bylo možné je použít pro hodnocení kvality další (hlavně heuristických) metod. To ovšem znamená, že nebylo možné použít pro řešení problému obchodního cestujícího žádný heuristický algoritmus, neboť tyto zpravidla neposkytují optimální řešení. Celkový výsledek by pak samozřejmě nebylo možné s jistotou považovat za optimální. Proto byly pro testování

využity úlohy takového rozsahu, aby bylo možné najít řešení exaktní metodou v přijatelném čase.

Potřeba heuristických metod jednoznačně vyplývá z praktické nepoužitelnosti exaktních metod pro větší rozsah úloh. V následujícím textu jsou tedy, kromě exaktní metody a lineárního programování, popsány tři typy heuristických algoritmů a výsledky jejich implementace a testování.

5.2.1 Exaktní metoda

Podobně jako v případě problému hledání podsítě jsem se i v případě této úlohy snažil implementovat exaktní metodu řešení, která by přinesla optimální řešení testovacích úloh, použitelná pro hodnocení ostatních metod. Vzhledem k předpokládané mimořádné výpočetní náročnosti exaktní metody jsem metodu implementoval po částech, abych mohl prověřit jednotlivé části samostatně.

Exaktní metoda je algoritmicky velmi jednoduchá, má kombinatorický charakter a znamená postupné prověření všech smysluplných kombinací vrcholů z množiny W , tedy potenciálních množin S . Pro každou kombinaci vrcholů je nutné prověřit splnění podmínky CL1. Tato část úlohy má analogický charakter, jako výběr a testování potenciálních podsítí (podmnožin množiny hran) v úloze 4.1.

Algoritmus využívá metodu prohledávání do hloubky. Teoretický počet všech kombinací vrcholů z množiny W je 2^n , kde n je počet prvků množiny W . Tomu odpovídá i teoretický exponenciální charakter výpočetní složitosti této části algoritmu. Pro množinu W s 20 prvky se teoreticky jedná o více než 10^6 kombinací. Neproduktivní větve výběrového stromu však lze opouštět v případě, že dosud vybraná množina S již splňuje CL1 (viz kapitola 5.1). Každé další rozšíření takové množiny již nemůže přinést zlepšení a je tedy možné takovou větev opustit. Takto lze velkou část potenciálních kombinací vyřadit. Míra redukce počtu kombinací zásadně závisí na parametru λ . S jeho klesající hodnotou samozřejmě roste počet prvků množiny S , při kterém dojde ke splnění podmínky CL1 a tím také roste hloubka, do které je strom kombinací vrcholů prohledáván. Pro 20-ti prvkovou množinu W se pro nastavení parametru $\lambda=4$ (což na testovacích sítích odpovídalo cca 1/5 průměru sítě) počet prověřovaných kombinací reálně pohyboval kolem 300000. To je velmi podstatné, protože pro každou kombinaci vrcholů S splňující CL1 je nutné nalézt nejkratší cestu v grafu spojující tyto vrcholy. Aby celkový výsledek exaktní metody byl skutečně optimálním řešením, není samozřejmě ani pro řešení této dílčí části úlohy použít heuristický algoritmus. Výpočetní náročnost exaktních algoritmů pro hledání nejkratší cesty je však

velmi vysoká. Nejjednodušší z nich je prověření všech permutací vybrané množiny vrcholů S . Výpočetní náročnost tohoto algoritmu je však $O(n!)$. Experimentálně jsem ověřil, že pro 10-ti prvkovou množinu se výpočetní čas na dostupném hardwarovém vybavení pohybuje okolo 3 sekund. Pro 20-ti prvkovou množinu W a pro nastavení parametru $\lambda=4$ se však počet kombinací, které splňují CL1 pohyboval kolem 150000. Z nich cca 5000 mělo počet prvků $n \in \{11;12;13\}$. Výpočetní čas jsem přibližně odhadl na cca 100 hodin. Vzhledem k tomu, že hlavním účelem implementace exaktní metody bylo získat optimální řešení pro řadu testovacích úloh, byl takovýto výpočetní čas naprosto nepřijatelný. Proto jsem hledal cesty, jak výpočetní čas zkrátit. Implementoval a otestoval jsem dvě potenciální cesty.

- První byla zaměřena na snížení počtu kombinací, pro které je nutné najít nejkratší cestu v síti. Lze totiž využít faktu, že může nastat situace, kdy pro existující množinu S splňující CL1 existuje alespoň jedna množina S' , která také splňuje CL1 a zároveň platí $S' \subset S$. Množinu S je pak možné vypustit, neboť nemůže poskytnout lepší řešení. Experimentální ověření ukázalo, že aplikace tohoto postupu přinese snížení počtu potenciálních množin S na cca polovinu, avšak jeho výpočetní čas se pohyboval pro testovací úlohy okolo 2 hodin. Při zachování metody pro hledání nejkratší cesty v síti by celkový výpočetní čas exaktní metody sice snížil, ale stále by zůstal řádově v desítkách hodin, což bylo nepřijatelné. Do výsledné podoby algoritmu jsem proto tento krok nezařadil.
- Podstatné zkrácení výpočetního času (na maximálně jednotky hodin) přineslo zefektivnění algoritmu pro hledání nejkratší cesty v síti. Je založeno na rekurzivním charakteru algoritmu pro vytváření permutací. Ten umožňuje po výběru každého prvku spočítat aktuální délku takto vytvořené části cesty. Pokud je tato větší, než délka dosud nejkratší cesty (a to nejen v rámci permutací právě zkoumané množiny S , ale i globálně v rámci všech dosud zkoumaných množin S), pak všechny permutace, které začínají stejně jako testovaná část, jistě nebudou poskytovat lepší výsledky a je tedy možné je vynechat. Samozřejmě, že čím dříve je nalezeno dobré řešení, tím víc permutací je vynecháno. Proto ke zvýšení rychlosti významně přispělo hledání prvního odhadu délky nejkratší cesty pomocí klasického hladového heuristického algoritmu založeného na výběru nejbližšího souseda a postupné procházení množin S od těch s nejnižším počtem prvků, kde je vyšší pravděpodobnost, že povedou ke kratším cestám.

Zavedení této úpravy algoritmu zkrátilo výpočetní čas natolik, že bylo možné v přijatelné době provést potřebné výpočty na všech testovacích sítích a získat tak množinu optimálních řešení.

Experimentální výsledky jsou uvedeny společně s výsledky ostatních metod souhrnně v kapitole 0.

5.2.2 Celočíselné lineární programování

Optimalizační úloha může být podobně jako v případě redukce sítě formulována jako úloha celočíselného lineárního programování, která v souladu s formulací optimalizačního problému v kapitole 5.1. vychází z následujících předpokladů a označení:

$m \leq n$ jsou kladná celá čísla, $V = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina všech vrcholů a $W = \{1, 2, \dots, m\} \subset V$. Pro každý pár vrcholů $i \in V$ a $j \in V$, představuje nezáporné reálné číslo d_{ij} pěší vzdálenost mezi uzly i a j . Podobně, nezáporné reálné číslo δ_{ij} představuje jízdní vzdálenost mezi uzly i a j odpovídajícími vrcholů z množiny W . Samozřejmě $d_{ii} = 0$ a $\delta_{jj} = 0$ pro $i \in V$ a $j \in W$. Dále $F' \subset W \times W$ představuje množinu orientovaných hran v orientovaném grafu $DG_W = (W, F', \delta)$ odvozeném z grafu $G_W = (W, F, \delta)$ tak, že orientované hrany $(u, v) \in F'$ a $(v, u) \in F'$ tehdy, když neorientovaná hrana $(u, v) \in F$. Délky δ zůstávají nezměněné.

Formulace úlohy lineárního programování

Nechť

$$D = \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} d_{ij} + \sum_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \delta_{ij} \quad \text{a} \quad Q = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} q_i \quad (5.1)$$

Hledáme hodnoty těchto celočíselných proměnných:

$$u_j \in \{0, 1\}, j \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$v_{ij} \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, m\}, (j, k) \in F'$$

$$y_j,$$

které minimalizují účelovou funkci

$$z = \sum_{j,k \in \{1, \dots, m\}; (j,k) \in F'} \delta_{jk} x_{jk} \quad (5.2)$$

a splňují tyto podmínky

$$\frac{1}{Q} \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} q_i d_{ij} v_{ij} \leq \lambda, \quad (5.3)$$

$$v_{ij} \leq u_j \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5.4)$$

$$\sum_{j \in \{1, \dots, m\}} v_{ij} = 1 \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.5)$$

$$\sum_{j \in \{1, \dots, m\}} d_{ij} v_{ij} \leq d_{ik} u_k + D(1 - u_k) \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \dots, n\}, k \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5.6)$$

$$x_{jk} \leq \frac{u_j + u_k}{2} \quad \text{pro } j \in \{1, 2, \dots, n\}, k \in \{1, 2, \dots, m\}, (j, k) \in F', \quad (5.7)$$

$$\sum_{k \in \{1, \dots, m\}; (k, j) \in F'} x_{jk} \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{k \in \{1, \dots, m\}} u_k - y_j \right) + D(u_j - 1) \quad \text{pro } j \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5.8)$$

$$\sum_{j \in \{1, \dots, m\}; (k, j) \in F'} x_{jk} \geq \frac{1}{m} (y_k - 1) \quad \text{pro } k \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5.9)$$

$$y_k \geq y_j + 1 + D(x_{jk} - 1) \quad \text{pro } j, k \in \{1, 2, \dots, m\}, (j, k) \in F', \quad (5.10)$$

$$y_k \leq y_j + 1 + D(1 - x_{jk}) \quad \text{pro } j, k \in \{1, 2, \dots, m\}, (j, k) \in F', \quad (5.11)$$

$$y_k \leq n u_k \quad \text{pro } k \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5.12)$$

Interpretace modelu

- Hodnota D v (5.1) představuje dostatečně velké číslo, které nahrazuje „nekonečno“. Q je celkový počet pasažérů.
- Hodnota $u_j = 1$ vyjadřuje fakt, že j -tý vrchol je vybrán do linky a $u_j = 0$ znamená opak.
- Hodnota $v_{ij} = 1$ znamená, že j -tý vrchol je nejbližší vrchol linky i -tému vrcholu.

- $x_{jk} = 1 \Leftrightarrow k$ -tý vrchol je přímý následník j -tého vrcholu linky.
- y_j je pořadí j -tého vrcholu na lince.
- Hodnota z v (5.2) představuje celkovou délku výsledné linky.
- (5.3) vyjadřuje podmínku dostupnosti (CL1) .
- (5.4) zajišťuje, že k dosud nevybranému vrcholu je vybrán nejbližší vrchol z vybraných vrcholů linky.
- (5.5) a (5.6) zajišťují výběr nejbližšího vrcholu linky k i -tému vrcholu..
- (5.7) zajišťuje, že k -tý vrchol je následníkem i -tého jen v případě, že jsou oba vybrány do linky.
- (5.8) zajišťuje, že linka nepokračuje za posledním vrcholem a (5.9) zajišťuje, že linka nepokračuje před prvním vrcholem.
- (5.10) a (5.11) zajišťuje, že přímý následník vrcholu s pořadím na lince y_j má přiřazeno pořadí $y_j + 1$.
- (5.12) zajišťuje, že nevybrané vrcholy nemají přiřazeno pořadí.

Výsledky

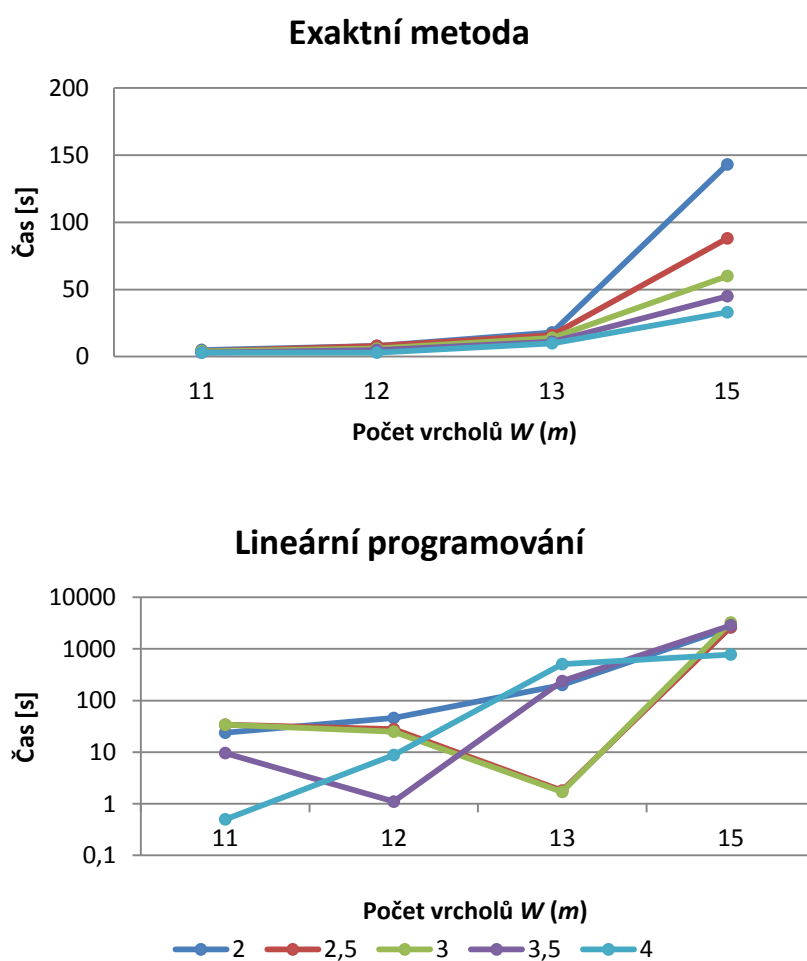
K řešení úlohy lineárního programování jsem podobně jako v případě redukce sítě použil freewarový solver LPSolve IDE 5.5.0.15. Díky tomu, že formulace úlohy je poměrně složitá a hlavně v sobě samozřejmě zahrnuje problém hledání nejkratší cesty spojující vybrané vrcholy, je výpočetní náročnost této metody vysoká. Pro testovací sítě s 20 prvkovou množinou W nedošlo k ukončení výpočtu v použitém solveru ani po desítkách hodin. Metodu jsem tedy spolu s exaktní metodou otestoval na menších, k tomuto účelu samostatně náhodně generovaných, sítích. V příloze jsou to sítě označené čísly 11,12,13 a 14 s počty vrcholů 11,12,13 a 15. Testování probíhalo za zjednodušujícího předpokladu, že $m = n$ a tedy $V = W$. Tento předpoklad zjednodušuje zadání úloh. K testování lze využít stejné, nebo alespoň stejným způsobem připravené sítě jako v případě úlohy na redukci sítě.

Testování probíhalo na 4 sítích a pro hodnoty parametru $\lambda \in \{2; 2,5; 3; 3,5; 4\}$. Ve všech případech byl výsledek lineárního programování (LP) a exaktní metody (EM) stejný. Výsledky, včetně porovnání časů výpočtu, shrnuje následující tabulka. Grafické porovnání výpočetních časů přináší Obr. 5.1. Z grafů je zřejmý kombinatorický charakter exaktní metody, jejíž výpočetní náročnost narůstá dle předpokladu s rostoucí složitostí úlohy

(rostoucí m , resp. klesající λ). V případě lineárního programování je zřejmé, že výpočetní čas kolísá nepravidelně.

Sít' č.	$m=n$	λ	Délka výsledné linky EM i LP	čas výpočtu EM [s]	čas výpočtu LP [s]
11	11	2	32,25386	5	23,8
		2,5	30,34976	4	33,9
		3	23,57246	4	33,9
		3,5	20,3548	3	9,6
		4	17,76992	3	0,5
12	12	2	27,79021	8	45,8
		2,5	27,36636	8	27,9
		3	22,84683	6	24,9
		3,5	21,20402	5	1,1
		4	19,63951	3	8,8
13	13	2	37,89413	18	200,5
		2,5	31,66139	16	1,8
		3	31,01886	14	1,7
		3,5	26,72501	11	238
		4	26,72501	10	507,5
14	15	2	37,56043	143	1844
		2,5	32,40365	88	2637
		3	27,87758	60	3237
		3,5	24,81202	45	2862
		4	19,5572	33	778,6

Tab. 5.1: Přehled výsledků testování metod LP a EM



Obr. 5.1: Porovnání výpočetních časů EM a LP pro $\lambda=2$ až 4

5.2.3 Heuristické metody

Z výpočetních časů exaktní metody a lineárního programování je zřejmé, že pro praktické úlohy většího rozsahu bude nutné navrhnout heuristickou metodu. V této kapitole je uveden popis tří navržených a testovaných variant heuristické metody. Ve všech případech je však výsledkem algoritmu jen množina vrcholů (neseřazená), kterými prochází navrhovaná linka. V případě exaktní metody i lineárního programování je podproblém hledání nejkratší cesty sítí pro vybrané vrcholy přímou součástí algoritmu. U navrhovaných heuristických metod tomu tak není. Výpočetní čas je tak velice krátký. Přestože podle formulace optimalizační úlohy je nalezením množiny S naplněn cíl, je důležité i v případě heuristických metod pro výslednou množinu S zjistit nejkratší cestu spojující její prvky v síti. Pro výsledky této práce je to důležité především pro porovnání výsledku heuristiky s optimálním řešením. Pro praktické úlohy je také důležité znát trasu linky.

Pro malé testovací síť hledání nejkratší cesty spojující vybrané vrcholy nepředstavuje zásadní časovou komplikaci. Především se, na rozdíl od exaktní metody a lineárního programování, provádí jen jednou a navíc ještě pro sub-optimální množinu S , u které lze předpokládat nízký počet prvků. Proto jsem použil kombinatorické testování všech důležitých permutací, tak jak bylo popsáno v případě exaktní metody. Pro účely testování a hodnocení kvality výsledků heuristických metod by navíc použití další heuristiky pro hledání nejkratší cesty pro S zpravidla zbytečně zhoršovalo výsledek. V praktických úlohách, kde rozsah úlohy použití exaktní metody vyloučí, je možné heuristiku použít.

Navrhované heuristické algoritmy mají všechny charakter „hladových algoritmů“. Pro takové algoritmy může volba výchozího bodu řešení podstatným způsobem ovlivnit kvalitu výsledku. V navrhovaných heuristických algoritmech je jako výchozí bod řešení (vrchol, který je jako první vybrán do množiny S) zvolen vrchol m , který bude v dalším textu nazýván medián sítě $m(G)$ a pro který platí

$$\sum_{v \in V} q(v) d(v, m) \rightarrow \min$$

Pro označení jednotlivých typů heuristického algoritmu jsem použil anglické termíny, protože se mi nepodařilo najít krátké a přitom výstižné české názvy a je to výhodnější pro návrh zkratk použitý později v přehledu výsledků.

General Greedy Heuristics (GGH)

Tento algoritmus je nejjednodušší variantou heuristiky. V každém kroku hledá další vrchol do množiny S , který přinese maximální zlepšení střední hodnoty vzdáleností zdrojů a cílů

poptávky cestujících od nejbližších autobusových zastávek $\mu(S)$. Vzhledem k tomu, že na výběr vrcholu nejsou kladeny žádné další podmínky, je teoreticky možné, že budou vybrány vrcholy do množiny S tak, že pro ně nebude možné najít souvislou cestu, která by procházela jen těmito vrcholy. To znamená, že by při závěrečné konstrukci linky pak bylo nutné množinu S o některé další vrcholy doplnit. Buď by zůstaly jen průjezdními uzly, nebo by případně dodatečně snížily hodnotu $\mu(S)$. Dokonce by mohla vzniknout situace, kdy je vybrán vrchol, který se nachází v takové části grafu, která je spojena se zbylou částí jen hranami, které vychází z jediného vrcholu, který je také vybrán do trasy linky. Pak by cesta spojující tyto vrcholy musela nutně tímto „spojovacím“ vrcholem vést dvakrát. Viz např. situace v síti č. 5, která je dobře vidět na obr. P-C 53 v příloze C.

Popis algoritmu

Inicializace:

$S = \{m\}$ kde m je výše pospaný medián grafu G_W .

Iterace:

Pokud S splňuje CL1, pak algoritmus končí a S je považováno za řešení. Pokud ne, tak hledáme takový vrchol $w \in W - S$, pro který platí, že $\mu(S \cup \{w\})$ je minimální. Pokud existuje, tak proběhne další iterace. Pokud takový neexistuje, platí že $S = W$ a vzhledem k tomu, že není splněno CL1, není možné nalézt řešení.

Neighbor Greedy Heuristics (NGH)

Tento typ heuristického algoritmu oproti předchozímu omezuje množinu vrcholů, ze kterých je vybírán další do množiny S jen na vrcholy sousední s koncovými vrcholy dosud vytvořené části linky. Platí následující označení pro množinu sousedních vrcholů k množině koncových vrcholů $S' \subset S$ dosud vybrané množiny vrcholů linky S' :

$$N(S') = \{w \in W: w \notin S', \exists s \in S', (w, s) \in F\} \text{ v grafu } G_W.$$

Popis algoritmu

Inicializace:

$S = S' = \{m\}$ kde m je výše pospaný medián grafu G_W .

Iterace:

Pokud S splňuje CL1, pak algoritmus končí a S je považováno za řešení. Pokud ne, tak hledáme takový vrchol $s' \in (W - S) \cap N(S')$, pro který platí:

$$\sum_{v \in V} q(v)d(v, S \cup \{s'\}) = \min_{s' \in (W-S) \cap N(S')} \left\{ \sum_{v \in V} q(v)d(v, S \cup \{s'\}) \right\}$$

Pokud takový vrchol neexistuje, heuristický algoritmus není schopen najít řešení úlohy a končí. Pokud ano, tak položíme $S = S \cup \{s'\}$ a dále upravíme množinu S' takto:

Pokud $S' = \{m\}$, pak položíme $S' = \{m, s'\}$. Pokud S' již obsahuje dva vrcholy, pak položíme $S' = (S' - \{s''\}) \cup \{s'\}$, kde $s'' \in S'$ a $d(s', s'') = \min_{s \in S'} d(s', s)$. Poté proběhne další iterace.

Combined Heuristics (CH)

Tento typ heuristiky se podobá předchozímu (NGH) tím, že další potenciální prvek množiny S vybírá mezi vrcholy sousedícími s koncovými vrcholy S . Liší se ale tím, že do kritéria pro výběr, kromě minimalizace $\mu(S)$, zavádí také s vahou k vzdálenost vybíraného vrcholu od S' . Je zřejmé, že různé hodnoty k mohou vést k různým výsledným množinám S .

Opět platí následující označení pro množinu sousedních vrcholů k množině koncových vrcholů $S' \subset S$ dosud vybrané množiny vrcholů linky S' :

$$N(S') = \{w \in W: w \notin S', \exists s \in S', (w, s) \in F\} \text{ v grafu } G_W.$$

Popis algoritmu

Inicializace:

$S = S' = \{m\}$ kde m je výše pospaný medián grafu G_W .

Iterace:

Pokud S splňuje CL1, pak algoritmus končí a S je považováno za řešení. Pokud ne, tak hledáme takový vrchol $s' \in (W - S) \cap N(S')$, pro který platí:

$$kd(s', S') + \sum_{v \in V} q(v)d(v, S \cup \{s'\}) = \min_{s' \in (W-S) \cap N(S')} \left\{ kd(s, S') + \sum_{v \in V} q(v)d(v, S \cup \{s'\}) \right\}$$

Pokud takový vrchol neexistuje, heuristický algoritmus není schopen najít řešení úlohy a končí. Pokud ano, tak položíme $S = S \cup \{s'\}$ a dále upravíme množinu S' takto:

Pokud $S' = \{m\}$, pak položíme $S' = \{m, s\}$. Pokud S' již obsahuje dva vrcholy, pak položíme $S' = (S' - \{s''\}) \cup \{s\}$, kde $s'' \in S'$ a $d(s', s'') = \min_{s \in S'} d(s', s)$. Poté proběhne další iterace.

Správnost výsledků heuristických metod

Algoritmus každé z navrhovaných heuristik končí ve chvíli, kdy je splněna podmínky CL1 z formulace optimalizačního problému (viz kapitola 5.1). Není proto nutné dokazovat, že řešení poskytované heuristickými metodami je řešením správným ve smyslu podmínky CL1, pokud je nalezeno. Samozřejmě, že nutně nemusí být řešením optimálním. To znamená, že podmínka CL2 splněna být nemusí.

Možnosti zlepšení kvality výsledků heuristických metod

Výsledky aplikace heuristických metod na testovacích úlohách jsou, stejně jako v případě ostatních metod, uvedeny souhrnně v kapitole 0 na straně 61. Veškeré testování probíhalo na stejných testovacích sítích (č. 1 až 10 viz Příloha A) jako v případě úloh na redukci sítě. Aby je bylo možné využít bez nutnosti dalších doplnění, bylo nutné testování provádět za zjednodušujících (z hlediska zadání úloh) předpokladů, že $\mathbf{G} = \mathbf{G}_W$ a tedy $\mathbf{V} = \mathbf{W}$. Z hlediska metod řešení to neznamenal žádné změny. K modelování poptávkové funkce jsem využil čísla v rozsahu 0 až 100, náhodně generovaná pro každý vrchol v rámci přípravy testovacích sítí. (viz kapitola 3 na straně 25). Výpočetní náročnost heuristik byla podle očekávání velmi nízká. V naprosté většině případů byl výpočetní čas kratší než 1s.

Při porovnání výsledků s optimálními jsem se vedle porovnání celkové délky linky zabýval také kontrolou toho, zda medián m (výchozí bod heuristik) příslušné sítě leží na optimálně konstruované lince nalezené pomocí exaktní metody. Zjistil jsem, že ve dvou případech testovacích úloh z deseti tomu tak není. Znamená to tedy, že medián sítě není obecně nejlepším výchozím bodem pro heuristiku. Zřejmě nejjednodušší metodou, jak předejít špatnému výběru výchozího bodu, bylo postupně vyzkoušet všechny možné výchozí body (celou množinu W). Vzhledem k nízké výpočetní náročnosti heuristik to neznamenal zásadní problém při samotném algoritmu heuristiky. Aby bylo možné porovnat řešení dosažená pro různé výchozí body, je však samozřejmě nutné zjistit délku linky, tedy najít nejkratší cestu v síti pro danou kombinaci vybraných vrcholů. V případě testovacích úloh

to nepřineslo zásadní problém, ale v případě úloh většího rozsahu by to mohl být důvod nepoužitelnosti této úpravy heuristik. Heuristiky s opakováním algoritmu pro různé výchozí body jsem pro účely přehledu výsledků a porovnání označil sufixem „O“ ve zkratce metody, tedy GGHO, NGHO, CHO.

Tabulky Tab. 5.2, Tab. 5.3 a Tab. 5.4 uvádějí pro příslušný typ heuristiky a případně parametr k srovnání výsledné délky linky při opakování algoritmu a bez něj. Případy, kdy je opakováním dosaženo zlepšení výsledku jsou označeny zeleným pozadím buněk. Je zřejmé, že v naprosté většině případů došlo ke zlepšení, pouze v 7 případech se výsledek nezměnil. Zajímavé je, že i v případech, kdy medián je součástí optimální linky, neznamenal jeho výběr za výchozí bod automaticky lepší výsledek heuristiky. Naopak, pokud medián součástí optimální linky není, pak jím ani výsledek heuristiky s opakováním algoritmu pro různé výchozí body neprochází. Vyplývá z toho, že volba výchozího bodu je velmi důležitý krok heuristického algoritmu, který podstatně ovlivňuje způsob budování linky. Důležité je, že vhodným výběrem výchozího vrcholu došlo ke zlepšení výsledků heuristik i v případech, kdy medián je součástí optimálně navržené linky. Obrázky Obr. 5.2 až Obr. 5.8 na straně 62 podávají přehled o situaci v případě testovací sítě č. 7, kdy medián (vrchol č. 18) je součástí optimální trasy linky a přesto, že pro každou z heuristik GGO, NGHO a CHO byl nakonec algoritmem vybrán jiný nejlepší výchozí vrchol, všechny trasy navržených linek přes medián nakonec prochází. Použití heuristik s opakováním přineslo v případě sítě č. 7 vždy zlepšení výsledku heuristiky a metoda CHO pro $k=0,1$ dosáhla optimálního řešení. Obrázky Obr. 5.9 až Obr. 5.15 na straně 63 zobrazují situaci v případě sítě č. 3, kdy medián na optimální trase linky neleží. Použití heuristik s opakováním opět nepřineslo zhoršení výsledku, optimálního řešení dosáhla heuristika CHO pro $k=0,4$. Na všech obrázcích je medián sítě označen zeleným okolím vrcholu. Hodnota q je uvedena v závorce u čísla vrcholu a naznačena sytostí výplně vrcholu.

Sít' č.	medián	použitý výchozí vrchol GGHO	délka linky	
			GGH	GGHO
1	12	20	52,00	49,84
2	9	19	66,66	53,82
3	15	12	64,63	55,31
4	2	14	59,46	47,75
5	1	9	56,57	40,10
6	8	13	68,92	50,95
7	18	20	66,24	49,94
8	18	12	52,03	45,43
9	20	20	55,97	55,97
10	3	1	64,82	51,53

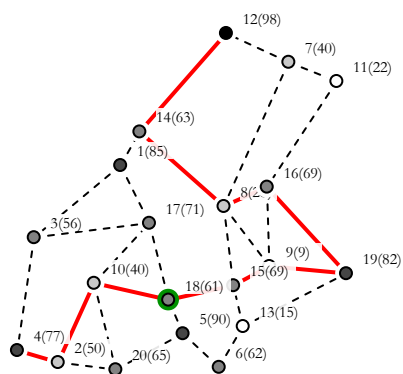
Tab. 5.2: Porovnání výsledků heuristik GGH a GGHO

Sít' č.	medián	použitý výchozí vrchol NGHO	délka linky	
			NGH	NGHO
1	12	3	41,52	41,52
2	9	1	52,52	43,44
3	15	5	74,84	54,48
4	2	4	48,57	46,68
5	1	6	29,79	27,38
6	8	4	53,02	43,39
7	18	8	55,99	45,92
8	18	4	36,16	36,16
9	20	15	51,58	42,87
10	3	2	45,98	45,89

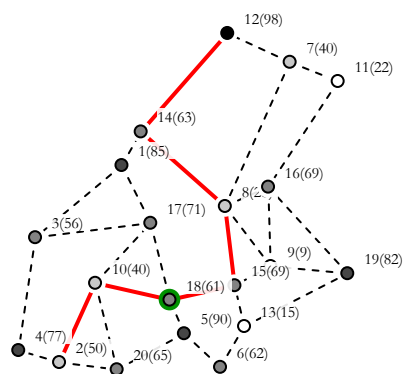
Tab. 5.3: Porovnání výsledků heuristik NGH a NGHO

Sít' č.	k	medián	použitý výchozí vrchol CHO	délka linky	
				CH	CHO
1	0,1	12	3	41,52	41,52
	0,2		15	46,03	41,52
	0,3		18	46,03	45,06
	0,4		11	53,20	41,91
2	0,1	9	11	46,66	43,44
	0,2		13	nenalezeno	46,66
	0,3		13	nenalezeno	46,66
	0,4		13	nenalezeno	46,66
3	0,1	15	5	49,92	44,76
	0,2		5	44,76	44,76
	0,3		10	44,76	44,76
	0,4		7	48,03	47,96
4	0,1	2	4	47,01	46,68
	0,2		4	47,01	46,68
	0,3		13	55,70	44,84
	0,4		13	60,88	46,67
5	0,1	1	6	29,79	27,38
	0,2		13	27,38	27,06
	0,3		13	27,38	27,06
	0,4		1	27,06	27,06
6	0,1	8	4	62,00	40,31
	0,2		4	47,73	40,31
	0,3		4	47,73	42,64
	0,4		1	47,73	47,73
7	0,1	18	8	60,75	41,66
	0,2		12	nenalezeno	41,66
	0,3		8	nenalezeno	42,44
	0,4		12	54,42	44,30
8	0,1	18	3	40,62	33,14
	0,2		3	36,17	33,14
	0,3		15	37,84	34,62
	0,4		15	40,16	34,62
9	0,1	20	15	51,58	42,87
	0,2		15	46,83	41,91
	0,3		15	46,83	41,91
	0,4		10	46,83	44,58
10	0,1	3	2	46,08	43,05
	0,2		3	47,23	47,23
	0,3		19	52,36	45,53
	0,4		4	52,36	50,14

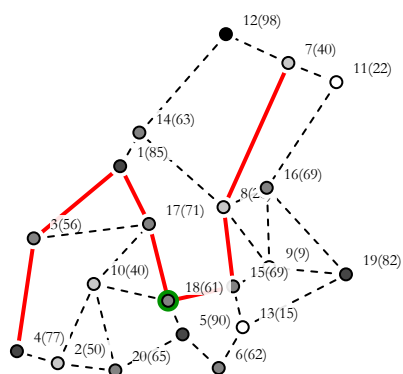
Tab. 5.4: Porovnání výsledků heuristik CH a CHO



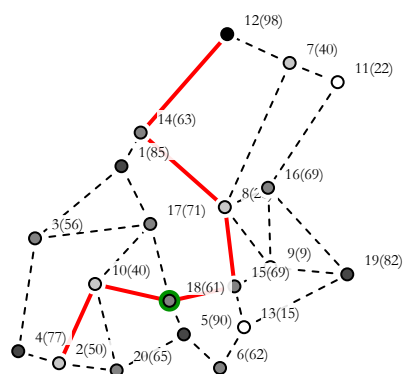
Obr. 5.2: Výsledek GGH (sit' č. 7)



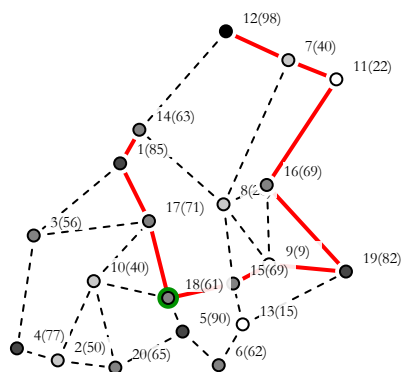
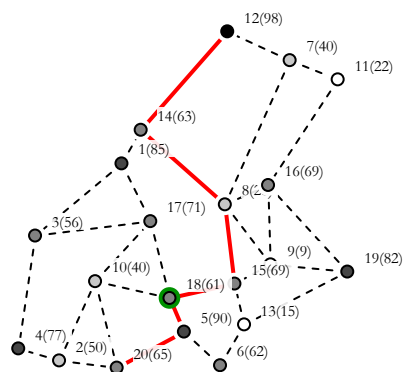
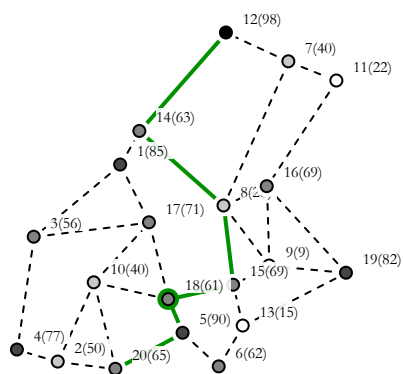
Obr. 5.3: Výsledek GGHO (sit' č. 7)



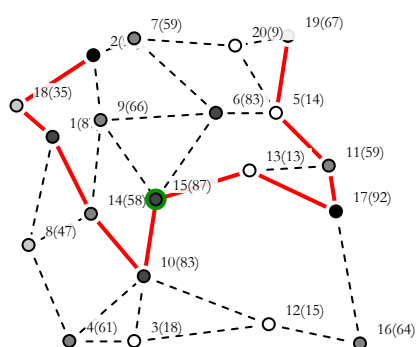
Obr. 5.4: Výsledek NGH (sit' č. 7)



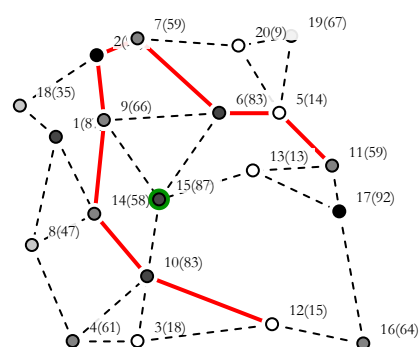
Obr. 5.5: Výsledek NGH (sit' č. 7)

Obr. 5.6: Výsledek CH pro $k = 0,1$ (sit' č. 7)Obr. 5.7: Výsledek CHO pro $k = 0,1$ (sit' č. 7)

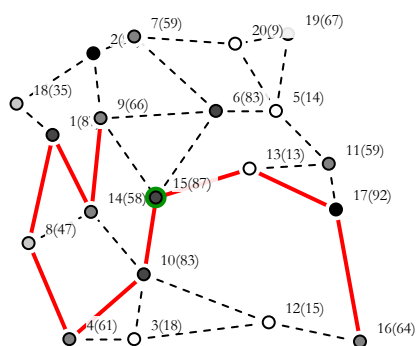
Obr. 5.8: Optimální vedení linky - EM (sit' č. 7)



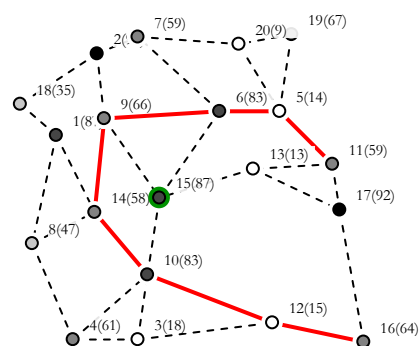
Obr. 5.9: Výsledek GGH (síť č. 3)



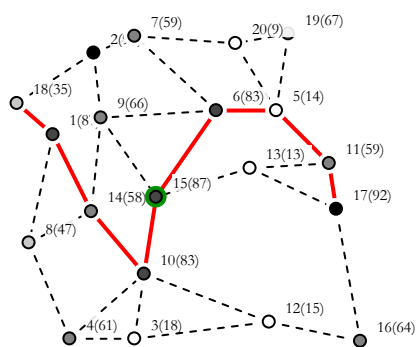
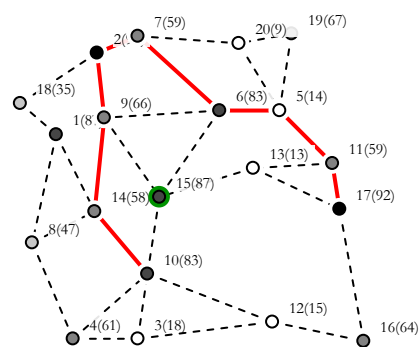
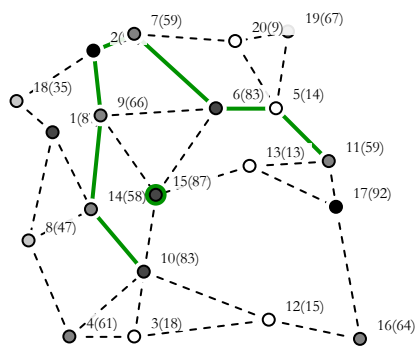
Obr. 5.10: Výsledek GGHO (síť č. 3)



Obr. 5.11: Výsledek NGH (síť č. 3)



Obr. 5.12: Výsledek NGHO (síť č. 3)

Obr. 5.13: Výsledek CH pro $k = 0,4$ (síť č. 3)Obr. 5.14: Výsledek CHO pro $k = 0,4$ (síť č. 3)

Obr. 5.15: Optimální vedení linky (síť č. 3)

5.3 Přehled experimentálních výsledků

V následujících tabulkách Tab. 5.5 a Tab. 5.6 je uveden přehled výsledků exaktní metody a heuristických metod. Jak již bylo uvedeno výše, testování probíhalo na stejných testovacích sítích (č. 1 až 10 viz Příloha A) jako v případě úlohy na redukci sítě. Aby je bylo možné využít bez nutnosti dalších doplnění, bylo nutné testování provádět za zjednodušujících (z hlediska zadání úloh) předpokladů, že $\mathbf{G}=\mathbf{G}_W$ a tedy $\mathbf{V} = \mathbf{W}$. Lineární programování nebylo možné použít pro sítě tohoto obsahu. Tato metoda byla testována na menších sítích. Výsledky jsou uvedeny v kapitole 5.2.2. Veškeré experimentální výpočty probíhaly pro parametr $\lambda=4$. V testovacích sítích to představuje cca 1/5 průměru testovací sítě

Sít' č.	Metoda	k	Délka linky		Medián součástí optimální linky
			median výchozím vrcholem	opakovaný výběr výchozího vrcholu (metoda xxO)	
1	NGH	-	41,52	41,52	ANO
	CH	0,1	41,52	41,52	
	CH	0,2	46,03	41,52	
	CH	0,3	46,03	45,06	
	CH	0,4	53,20	41,91	
	GGH	-	52,00	49,84	
	EM	-	41,52	-	
2	NGH	-	52,52	43,44	ANO
	CH	0,1	46,66	43,44	
	CH	0,2	Nenalezeno	46,66	
	CH	0,3	Nenalezeno	46,66	
	CH	0,4	Nenalezeno	46,66	
	GGH	-	66,66	53,82	
	EM	-	43,44	-	
3	NGH	-	74,84	54,48	NE
	CH	0,1	49,92	44,76	
	CH	0,2	44,76	44,76	
	CH	0,3	44,76	44,76	
	CH	0,4	48,03	47,96	
	GGH	-	64,63	55,31	
	EM	-	44,14	-	
4	NGH	-	48,57	46,68	ANO
	CH	0,1	47,01	46,68	
	CH	0,2	47,01	46,68	
	CH	0,3	55,70	44,84	
	CH	0,4	60,88	46,67	
	GGH	-	59,46	47,75	
	EM	-	42,82	-	
5	NGH	-	29,79	27,38	ANO
	CH	0,1	29,79	27,38	
	CH	0,2	27,38	27,06	
	CH	0,3	27,38	27,06	
	CH	0,4	27,06	27,06	
	GGH	-	56,57	40,10	
	EM	-	27,06	-	

Tab. 5.5: Přehled výsledků návrhu linky pro testovací sítě č.1 - 5

Sít' č.	Metoda	k	Délka linky		Medián součástí optimální linky
			median výchozím vrcholem	opakovaný výběr výchozího vrcholu (metoda xxO)	
6	NGH	-	53,02	43,39	NE
	CH	0,1	62,00	40,31	
	CH	0,2	47,73	40,31	
	CH	0,3	47,73	42,64	
	CH	0,4	47,73	47,73	
	GGH	-	68,92	50,95	
	EM	-	40,31	-	
7	NGH	-	55,99	45,92	ANO
	CH	0,1	60,75	41,66	
	CH	0,2	Nenalezeno	41,66	
	CH	0,3	Nenalezeno	42,44	
	CH	0,4	54,42	44,30	
	GGH	-	66,24	49,94	
	EM	-	41,66	-	
8	NGH	-	36,16	36,16	ANO
	CH	0,1	40,62	33,14	
	CH	0,2	36,17	33,14	
	CH	0,3	37,84	34,62	
	CH	0,4	40,16	34,62	
	GGH	-	52,03	45,43	
	EM	-	33,14	-	
9	NGH	-	51,58	42,87	ANO
	CH	0,1	51,58	42,87	
	CH	0,2	46,83	41,91	
	CH	0,3	46,83	41,91	
	CH	0,4	46,83	44,58	
	GGH	-	55,97	55,97	
	EM	-	41,91	-	
10	NGH	-	45,98	45,89	ANO
	CH	0,1	46,08	43,05	
	CH	0,2	47,23	47,23	
	CH	0,3	52,36	45,53	
	CH	0,4	52,36	50,14	
	GGH	-	64,82	51,53	
	EM	-	43,05	-	

Tab. 5.6: Přehled výsledků návrhu linky pro testovací sítě č.6 - 10

Šedým pozadím buněk jsou označeny optimální řešení, získaná exaktní metodou (EM). Modrou barvou písma jsou označeny nejlepší výsledky mezi heuristickými metodami. Zeleným pozadím buněk jsou označeny případy, kdy některá z heuristických metod dosáhla optimálního řešení. Z výsledků je patrné, že opakování heuristik s různými výchozími vrcholy přineslo (na úkor zvýšené výpočetní náročnosti) v naprosté většině případů zlepšení výsledku heuristiky. Díky tomu je nejlepší výsledek získaný heuristickými metodami pro danou síť roven optimálnímu řešení v 8 případech z 10 testovacích sítí. Neupravené heuristiky dosáhly optima jen v případě dvou sítí. Mezi typy heuristických

metod je jednoznačně nejúspěšnější Combined heuristics (CHO) s optimalizací výběru výchozího vrcholu. Většinou s koeficientem $k = 0,1$ nebo $0,2$. Veškeré výsledky jsou také graficky zpracovány v Příloze C.

6 Technologická koncepce implementace metod

Pro implementaci všech metod jsem navrhl a vytvořil aplikaci, která umožňuje především testovat vliv různých parametrů a úprav vstupních dat na rychlost výpočtu a v případě heuristických algoritmů i na kvalitu nalezeného řešení. Aplikace je postavena na databázovém systému MS Access. Jistě se nejedná o platformu, na které by bylo možné dosáhnout maximální rychlosti a efektivity výpočtu vlastního algoritmu. Po zvážení všech aspektů souvisejících s obsahem a způsobem zpracování tématu jsem se rozhodl pro toto řešení. Především se jednalo o tyto důvody:

- Prostředí databázového systému nabízí řadu standardních prostředků pro zpracování dat, jako jsou:
 - možnosti exportu a hlavně importu dat z jiných formátů,
 - grafické zpracování a tisk dat ve formě výstupních sestav,
 - prostředky pro zobrazování, filtrování a editaci dat v tabulkách,
 - jednoduché propojování dat v různých tabulkách.
- V databázovém prostředí jsou již implementovány efektivní algoritmy pro řazení a vyhledávání v datech
- Jednoduché ukládání všech výsledků (včetně mezivýsledků) do přehledných tabulek.
- Možnost využití jazyka SQL pro práci s daty.
- Přístup ke všem výše zmíněným možnostem z prostředí programovacího jazyka Visual Basic for Applications.
- Možnost práce s jinými aplikacemi z balíku MS Office z prostředí programovacího jazyka Visual Basic for Applications.

Vzhledem k tomu, že systém je koncipován jako prostředek pro podporu výzkumu, nikoli jako komerční produkt, převážily výše zmíněné výhody a s nimi spojená jednoduchost realizace nad některými nevýhodami této koncepce. Zkušenosti získané při implementaci potvrdily, že pro daný rozsah testovacích úloh byla zvolená implementační platforma výkonově dostatečná a výše popsané výhody podstatně přispěly k úspěšnému testování a k efektivnímu zpracování získaných výsledků.

7 Závěr

Práce představila několik metod (exaktních i heuristických) pro řešení dvou významných a v této formulaci dosud neřešených úloh:

- Volba podsítě s limitovaným prodloužením délky tras mezi významnými vrcholy.
- Návrh autobusové linky v oblasti s malou poptávkou při dodržení podmínky dostupnosti.

Všechny navrhované metody řešení uvedených úloh byly v rámci práce implementovány, testovány a dosažené výsledky jsou nedílnou součástí práce. Dále práce přinesla také originální, pro účely této práce vyvinutý a implementovaný, algoritmus pro pseudonáhodné generování testovacích sítí potřebných pro ověření správnosti (v případě heuristických metod i kvality) navrhovaných metod řešení výše uvedených úloh.

Práce tak ukázala, že manažeři dopravců a veřejné správy se mohou při svém rozhodování v řadě praktických situací (některé z nich byly popsány v rámci kapitol 4 a 5) opřít o reálné nástroje, které jim pomohou najít efektivní řešení daných problémů. Ukázala tak, že kromě přínosů pro rozvoj vědního oboru uvedených v rámci kapitoly 1.3 v úvodní části práce, má i praktický dopad v oblasti manažerského rozhodování.

Za významný aspekt této práce považuji také fakt, že veškerá implementace metod řešení využívala prostředí databázového systému MS Access a Visual Basic for Application. Ukázalo se, že využití tohoto prostředí skutečně přineslo výhody, které jsou podrobně uvedeny v kapitole 6, a které vedly k jeho výběru. Nejen že toto prostředí vyhovělo pro účely výzkumu, ale jsem přesvědčen, že by se mohlo stát i prostředím pro vývoj prakticky použitelných aplikací pro podporu manažerského rozhodování.

Do budoucna lze očekávat další rozvoj problematiky především v těchto směrech:

- V případě výběru podsítí použití jiných podmínek, než je limitované prodloužení tras.
- V případě návrhu linek zejména přechod od úlohy s jednou linkou k úlohám vedoucím na dvě, případně i více linek v oblastech s nízkou poptávkou, jejichž geografická podoba není pro řešení s pouze jednou linkou vhodná.

Z hlediska metodologie lze očekávat výzkum v oblasti zdokonalování heuristických metod a použití jiných metod, případně meta-heuristického charakteru, jako například již i v této práci zmiňovaných genetických algoritmů, simulovaného žíhání nebo simulace pomoci mravenčí kolonie, které by mohly přinést další zlepšení kvality poskytovaných řešení, nebo nové možnosti z hlediska použitelnosti metod.

Dále lze také očekávat, že by se také některé z navržených metod mohly stát součástí řešení komplexnějších úloh.

Bibliografie

- Amini, O., Peleg, D., Pérennes, S., Sau, I., & Saurabh, S. (2009). Degree-Constrained Subgraph Problems: Hardness and Approximation Results. In E. Bampis, & M. Skutella (Eds.), *WAOA 2008, LNCS 5426* (pp. 29-42). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Berger, B., & Shor, P. (1990). Approximation Algorithms for the Maximum Acyclic Subgraph Problem. In: *SODA '90 Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (pp. 236-243). PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.
- Borůvka, O. (1926). O jistém problému minimálním (About a certain minimal problem). *Práce moravského přírodovědného spolku v Brně*, III 3, stránky 37 - 58.
- Cai, L., & Corneil, D. (1995). Tree Spanners. *SIAM J. Discrete Mathematics*, Vol. 8, No.3, pp. 236-387.
- Carr, R., & Ravi, R. (1998). A New Bound for the 2-Edge Connected Subgraph Problem. (R. E. Bixby, E. A. Boyd, & R. Z. Rios-Mercado, Eds.)
- Cipriani, E., Fusco, G., Gori, S., & Petrelli, M. (2005). A procedure for the solution of the urban bus network design problem with elastic demand. *E-Proc. of 10th EWGT Meeting and 16th Mini-EURO Conference*. Poznan, Poland.
- Czimerman, P., Černá, A., Černý, J., & Peško, Š. (2007). Network Reduction Problems. *Journal of information, Control and Management Systems*, 5 (No.2).
- Černá, A. (2003). Intenzifikácia MHD a jej možných rozpor s dochádzkovým limitom. *Zborník 6. medzinárodnej konferencie o verejnej osobnej doprave* (stránky 43-47). Bratislava: .
- Černá, A. (2003). Poznámka k podmienke dostupnosti zastávok hromadnej dopravy. *Horizonty dopravy*, 11(2), stránky 23-24.
- Dorigo, M. (1997). Ant Colonies for the Traveling Salesman Problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1), pp. 53-66.
- Eades, P., Foulds, L., & Giffin, J. (1982). An Efficient Heuristic for Identifying a maximum Weight Planar Subgraph. *Combinatorial Mathematics*, IX.
- Erlander, S., & Scheele, S. (1974). A Mathematical Programming Model for Bus Traffic in a Network. (Buckley, Ed.) *Transportation and Traffic Theory*.

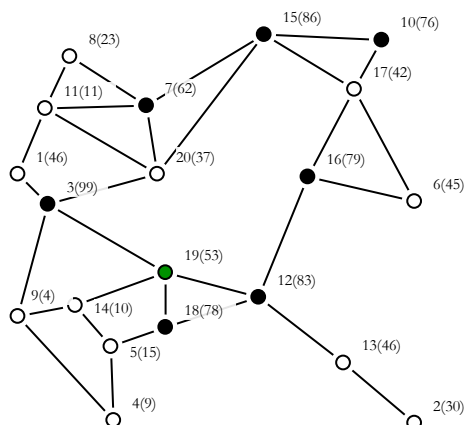
- Fernandes, C. (1998). A Better Approximation Ratio for the Minimum Size k-Edge-Connected Spanning Subgraph Problem. *J. Algorithms* , 28, 1, pp. 105-124.
- Ferrer, M., Serratos, F., & Valveny, E. (2007). On the Relation Between the Median and the Maximum Common Subgraph of a Set of Graphs. In F. Escolano, & M. Vento (Ed.), *GbRPR 2007, LNCS 4538* (pp. 351-360). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Gabow, H., Goemans, M., Tardos, E., & Williamson, D. (2005). Approximating the Smallest k-edge Connected Spanning Subgraph by LP-Rounding. *SODA '05 Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. (pp. 562-571). Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA.
- Hintsanen, P. (2007). The Most Reliable Subgraph Problem. In J. e. Kok (Ed.), *PKDD 2007, LNAI 4702* (pp. 471-478). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Chen, C., & Zeng, Q. (2010). Designing container shipping network under changing demand and freight rates. *Transport. Vilnius: Technika*, 25(1) , pp. 46-57.
- Cheriyán, J., & Thurimella, R. (2000). Approximating Minimum Size k-Connected Spanning Subgraphs via Matching. *SIAM J. Computing* , 30 (2), pp. 528-560.
- Jakimavičius, M., & Burinskienė, M. (2010). Route planning methodology of an advanced traveller information system in Vilnius city. *Transport. Vilnius: Technika*, 25(2) , pp. 171-177.
- Janáček, J., & Gábrišová, L. (2009). A two-phase method for the capacitated facility problem of compact customer sub-sets. *Transport. Vilnius: Technika*, 24(4) , pp. 274-282.
- Jarník, V. (1930). O jistém problému minimálním. *Práce Moravské Přírodovědecké společnosti* , 6, stránky 57 - 63.
- Kruskal, J. B. (1956, February). On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. *Proceedings of the American Mathematical Society* , Vol. 7, No. 1, pp. 48-50.
- Matis, P. (2010). Finding a solution for a complex street routing problem using the mixed transportation mode. *Transport. Vilnius: Technika*, 25(1) , pp. 29-35.
- Matuška, J. (2010). The methodology for designing accessible public transportation: the Czech experience. *Transport. Vilnius: Technika*, 25(2) , pp. 222-228.
- Peško, Š. (2003). On Closed Bus Line for Disabled Passengers. *Journal of Information, Control and Management Systems*, 1(2) , pp. 65-70.

- Peško, Š. (2004). On closed dial-a-bus line model. *3rd Int. Conference APLIMAT 2004* (pp. 783-788). Bratislava: Slovak University of Technology.
- Plesník, J. (1983). *Grafové algoritmy*. Bratislava: VEDA.
- Safari, M., & Salavatipour, M. (2008). A Constant Factor Approximation for Minimum λ -Edge-Connected k -Subgraph with Metric Costs. In A. e. Goel (Ed.), *APPROX and RANDOM 2008* (pp. 233-246). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Sollin, M. (1965). Le Tracé de canalisation. *Programming, Games and Transportation Networks*.
- Suzuki, A., & Tokuyama, T. (2005). Dense Subgraph Problem Revisited. *Proc. Joint workshop "New Horizons in Computing" and "Statistical Mechanical Approach to Probabilistic Information Processing" (18-21 July, 2005, Sendai, Japan)*.
- Szűcs, G. (2009). Developing co-operative transport system and route planning. *Transport. Vilnius: Technika*, 24(1), stránky 21-25.
- Vassilevska, V., Williams, R., & Yuster, R. (2006). Finding the Smallest H -Subgraph in Real Weighted Graphs and Related Problems. In M. e. Bugliesi (Ed.), *ICALP 2006, Part I, LNCS 4051* (pp. 262-273). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

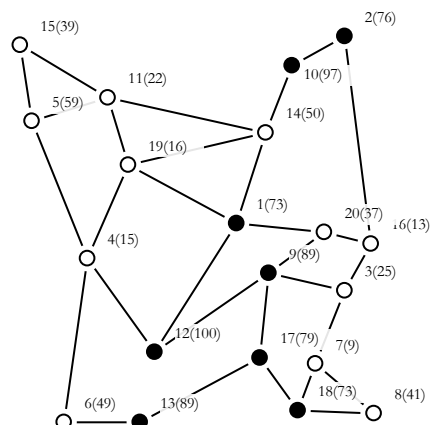
Přílohy

Příloha A: Testovací síť

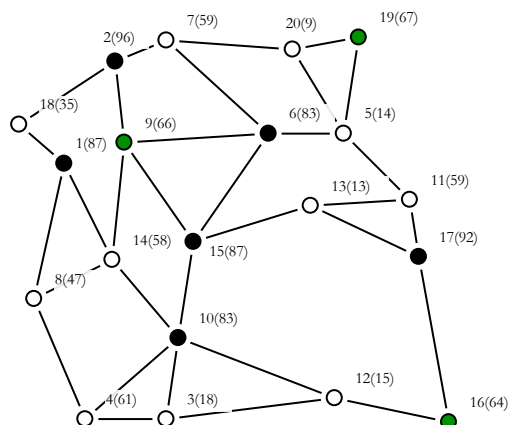
V této příloze je uveden graficky zpracovaný přehled sítí, které byly použity pro testování algoritmů popisovaných úloh. Hlavní testovací množinu tvoří 10 náhodně vygenerovaných sítí s dvaceti vrcholy (sít' č. 1 až 10), které byly použity jak při testování algoritmů pro hledání podsítě, tak při testování algoritmů pro návrh autobusové linky. Dále jde o jednu reálnou síť odpovídající situaci ve městě Piešťany (sít' č. 15) a 4 menší náhodně generované sítě s 11,12,13 a 14 vrcholy (sít' č. 11 až 14), které byly použity pro testování úloh celočíselného lineárního programování v případě návrhu autobusové linky. Dále je u těch sítí, které byly použity pro testování algoritmů pro redukci sítě, uveden v tabulce P-A 16 ještě seznam důležitých dvojic uzlů, který tvořil nedílnou součást zadání úloh. Pro všechny sítě se jedná o 20 dvojic. Optimalizace byla prováděna i se 13 dvojicemi. V těchto případech se jednalo o prvních 13 z uvedeného seznamu. Uzly sítí zahrnuté do dvojic jsou v obrázku příslušné sítě vyznačeny černou (v případě, že se jedná o uzel patřící do některé z prvních 13 dvojic), resp. zelenou (v případě, že se jedná o uzel patřící jen do některé ze 14. až 20. dvojice) výplní. Čísla uvedená v závorkách u jednotlivých uzlů, jsou náhodně generované počty pasažérů (v rozsahu 0 až 100) použité v úloze návrhu autobusové linky.



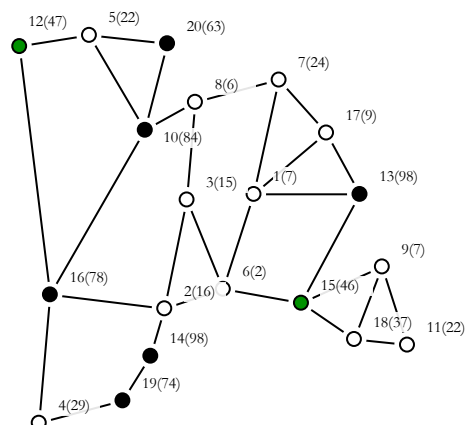
P-A 1: Testovací síť č. 1



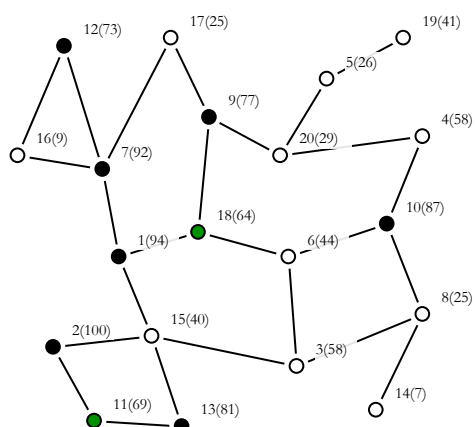
P-A 2: Testovací síť č. 2



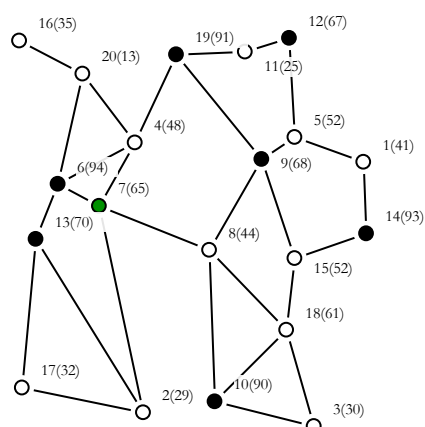
P-A 3: Testovací síť č. 3



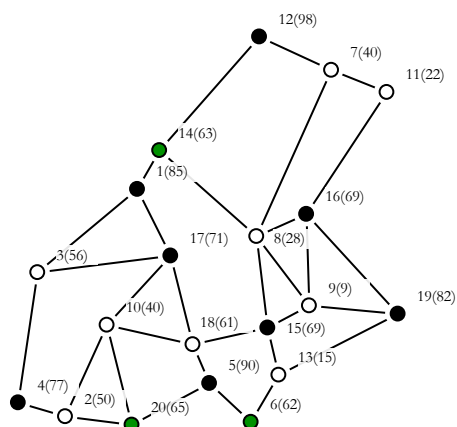
P-A 4: Testovací síť č. 4



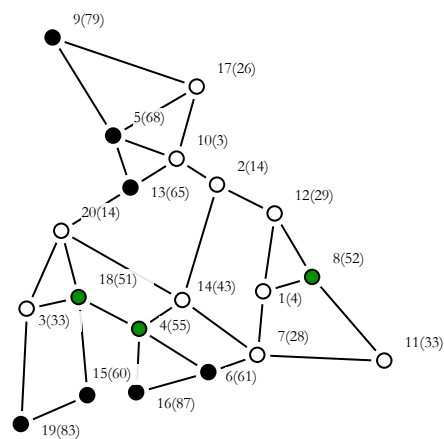
P-A 5: Testovací síť č. 5



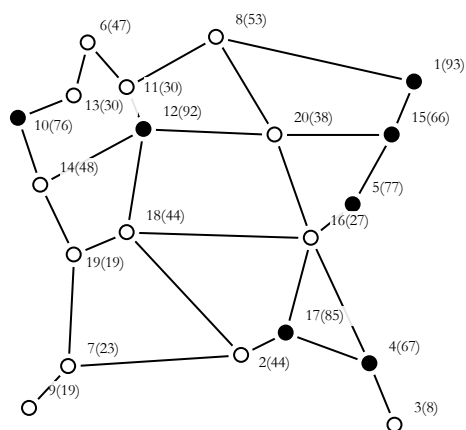
P-A 6: Testovací síť č. 6



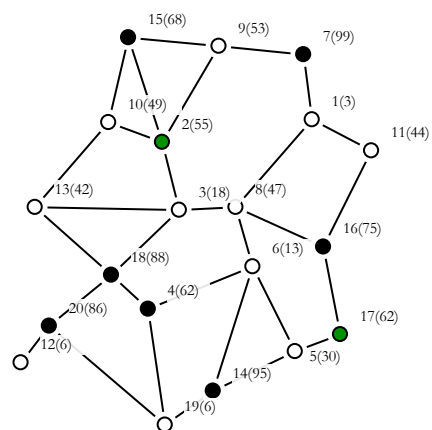
P-A 7: Testovací síť č. 7



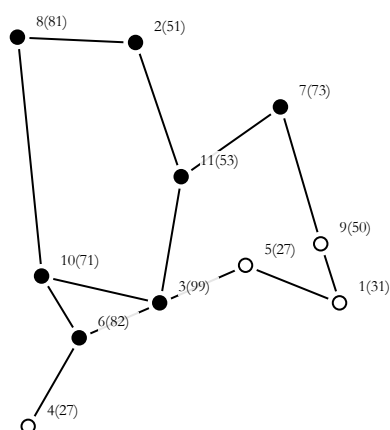
P-A 8: Testovací síť č. 8



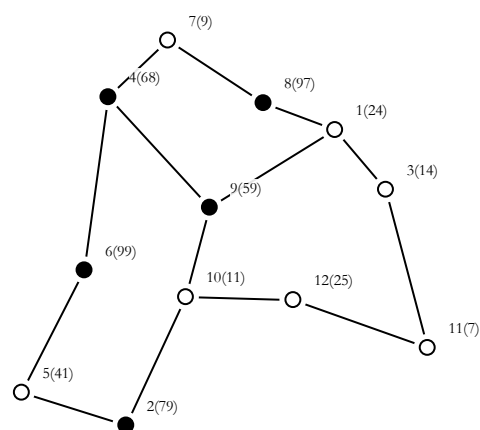
P-A 9: Testovací síť č. 9



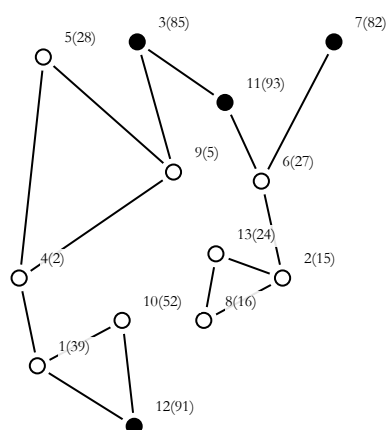
P-A 10: Testovací síť č. 10



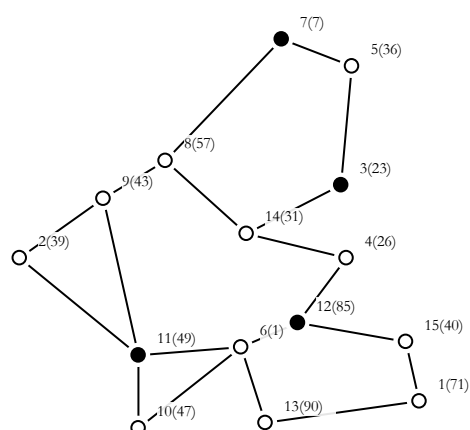
P-A 11: Testovací síť č. 11



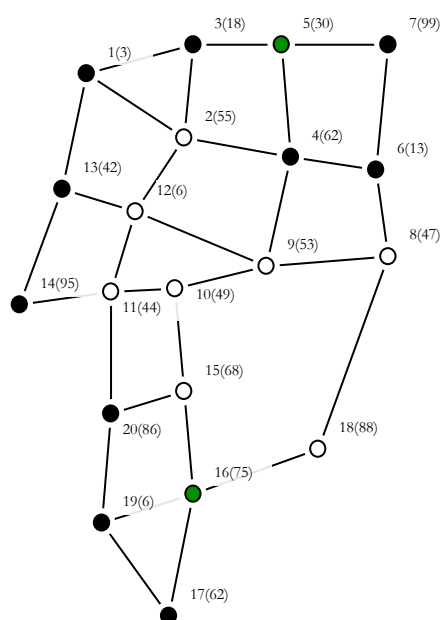
P-A 12: Testovací síť č. 12



P-A 13: Testovací síť č. 13



P-A 14: Testovací síť č. 14



P-A 15: Testovací síť č. 15

Seznam důležitých dvojic uzlů						
	Sít' č. 1	Sít' č.2	Sít' č.3	Sít' č.4	Sít' č.5	Sít' č.6
1	15 - 3	12 - 10	17 - 2	17 - 2	2 - 1	14 - 6
2	12 - 3	12 - 9	2 - 1	2 - 1	7 - 2	19 - 6
3	16 - 3	13 - 12	15 - 2	15 - 2	10 - 2	19 - 14
4	18 - 3	10 - 9	17 - 1	17 - 1	7 - 1	10 - 6
5	10 - 3	13 - 10	17 - 15	17 - 15	10 - 1	14 - 10
6	15 - 12	13 - 9	10 - 2	10 - 2	13 - 2	19 - 10
7	16 - 15	17 - 12	6 - 2	6 - 2	10 - 7	13 - 6
8	18 - 15	17 - 10	17 - 10	17 - 10	9 - 2	14 - 13
9	15 - 10	12 - 2	17 - 6	17 - 6	13 - 1	9 - 6
10	16 - 12	10 - 2	15 - 1	15 - 1	13 - 7	19 - 13
11	18 - 12	18 - 12	10 - 1	10 - 1	12 - 2	14 - 9
12	12 - 10	12 - 1	15 - 10	15 - 10	9 - 1	12 - 6
13	7 - 3	18 - 10	6 - 1	6 - 1	13 - 10	13 - 10
14	18 - 16	17 - 9	15 - 6	15 - 6	9 - 7	14 - 12
15	16 - 10	10 - 1	10 - 6	10 - 6	12 - 1	19 - 9
16	18 - 10	17 - 13	19 - 2	19 - 2	11 - 2	7 - 6
17	15 - 7	9 - 2	9 - 2	9 - 2	12 - 7	10 - 9
18	19 - 3	13 - 2	19 - 17	19 - 17	10 - 9	19 - 12
19	12 - 7	18 - 9	17 - 9	17 - 9	11 - 1	14 - 7
20	16 - 7	9 - 1	16 - 2	16 - 2	18 - 2	12 - 10
Seznam důležitých dvojic uzlů						
	Sít' č.7	Sít' č.8	Sít' č.9	Sít' č.10	Sít' č.15	
1	12 - 5	19 - 16	12 - 1	14 - 7	1 - 19	
2	12 - 1	16 - 9	17 - 1	18 - 7	6 - 19	
3	19 - 12	19 - 9	17 - 12	20 - 7	1 - 6	
4	5 - 1	16 - 5	5 - 1	18 - 14	4 - 19	
5	12 - 4	16 - 13	12 - 5	20 - 14	7 - 19	
6	19 - 5	19 - 5	10 - 1	20 - 18	3 - 6	
7	19 - 1	19 - 13	12 - 10	16 - 7	3 - 19	
8	17 - 12	9 - 5	17 - 5	16 - 14	1 - 4	
9	5 - 4	16 - 6	17 - 10	15 - 7	1 - 17	
10	15 - 12	16 - 15	4 - 1	18 - 16	17 - 13	
11	16 - 12	13 - 9	12 - 4	15 - 14	6 - 20	
12	4 - 1	19 - 6	15 - 1	20 - 16	6 - 14	
13	17 - 5	19 - 15	15 - 12	7 - 4	6 - 17	
14	20 - 12	16 - 4	10 - 5	17 - 7	6 - 16	
15	19 - 4	9 - 6	17 - 4	18 - 15	5 - 19	
16	15 - 5	15 - 9	17 - 15	14 - 4	7 - 17	
17	16 - 5	19 - 4	5 - 4	17 - 14	3 - 14	
18	14 - 12	16 - 8	15 - 5	20 - 15	1 - 20	
19	12 - 6	13 - 5	10 - 4	7 - 2	4 - 17	
20	17 - 1	18 - 16	15 - 10	18 - 4	3 - 4	

P-A 16: Seznam důležitých dvojic uzlů

Příloha B: Výsledky hledání podsítí (redukce sítí)

V této příloze jsou uvedeny graficky zpracované výsledky redukce všech testovacích sítí.

V titulcích obrázků jsou použity následující symboly a zkratky:

qkoeficient prodloužení trasy (1,1 až 1,6 pro každou z testovacích sítí)

PD.....počet použitých významných dvojic ze seznamu uvedeného v rámci přílohy A

HN.....neupravený heuristický algoritmus

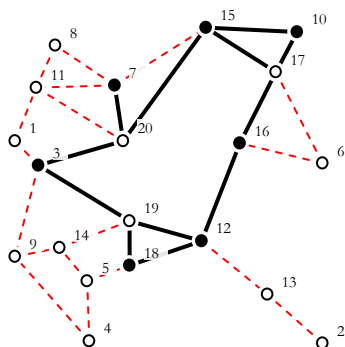
HUupravený heuristický algoritmus s předvýběrem nevylučitelných hran

HO.....upravený heuristický algoritmus doplněný o nucený výběr jedné hrany

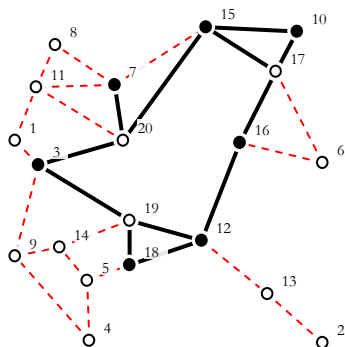
EM.....exaktní metoda řešení

Výsledky celočíselného lineárního programování byly vždy shodné s EM, a proto nejsou v rámci přílohy samostatně uváděny.

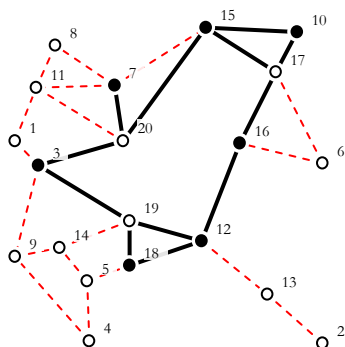
Hrany výsledné podsítě jsou vyznačeny plnou tučnou čarou. Vřazené hrany jsou vyznačeny červenou (v případě výsledků heuristických metod), resp. zelenou (v případě EM) přerušovanou čarou.



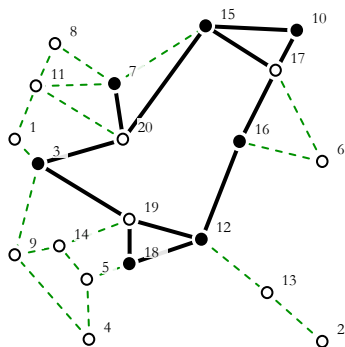
P-B 1: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 13 metoda:HN



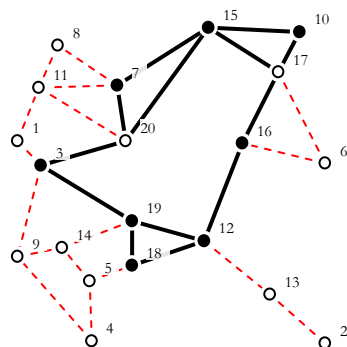
P-B 3: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 13 metoda:HU



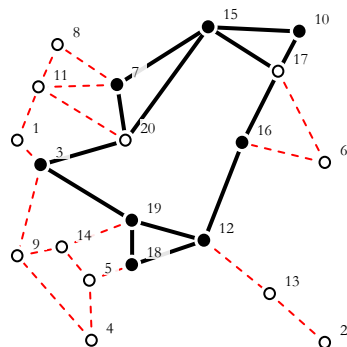
P-B 5: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 13 metoda:HO



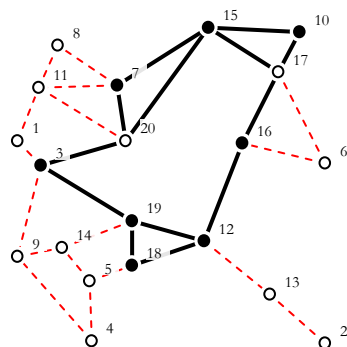
P-B 7: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 13 metoda:EM



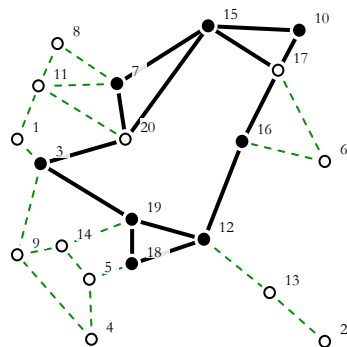
P-B 2: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 20 metoda:HN



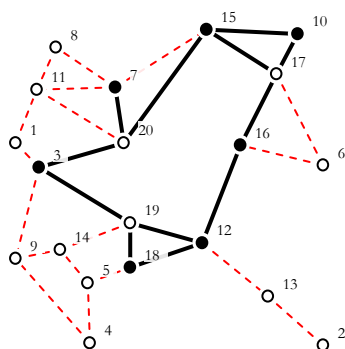
P-B 4: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 20 metoda:HU



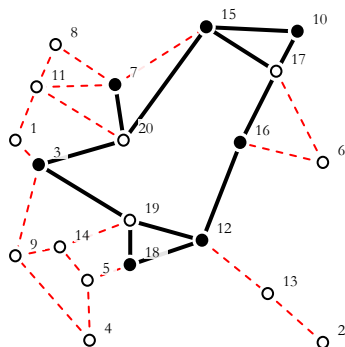
P-B 6: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 20 metoda:HO



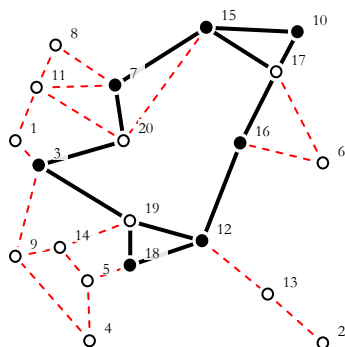
P-B 8: Síť č. 1 pro $q = 1,1$ a PD
= 20 metoda:EM



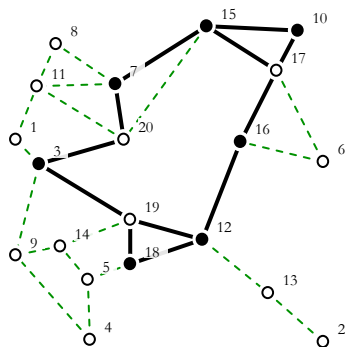
P-B 9: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 13 metoda:HN



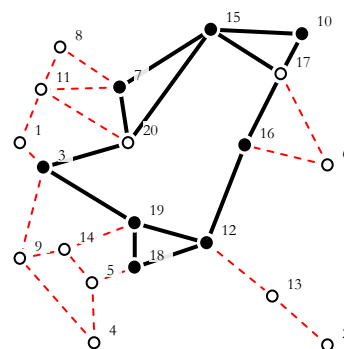
P-B 11: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 13 metoda:HU



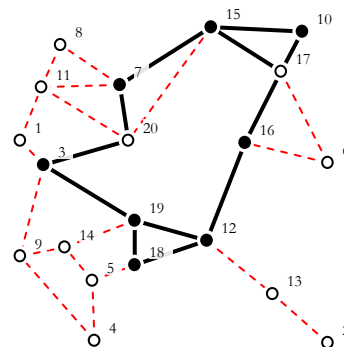
P-B 13: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 13 metoda:HO



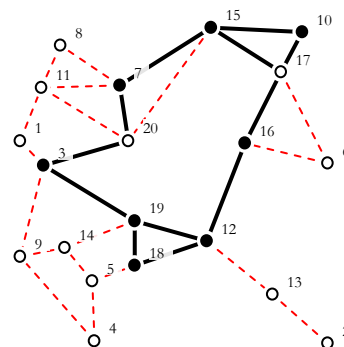
P-B 15: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 13 metoda:EM



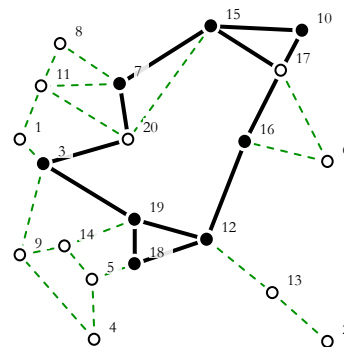
P-B 10: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 20 metoda:HN



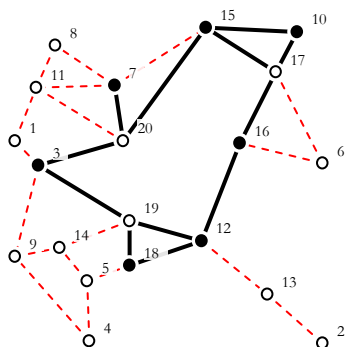
P-B 12: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 20 metoda:HU



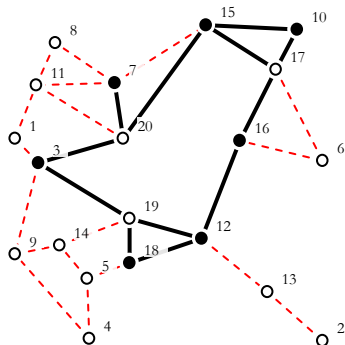
P-B 14: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 20 metoda:HO



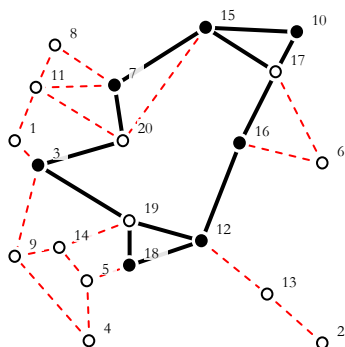
P-B 16: Sít' č. 1 pro $q = 1,2$ a PD = 20 metoda:EM



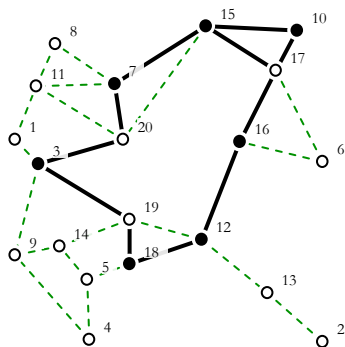
P-B 17: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HN



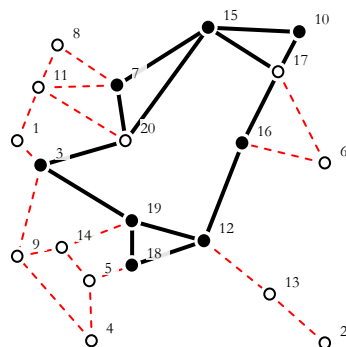
P-B 19: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HU



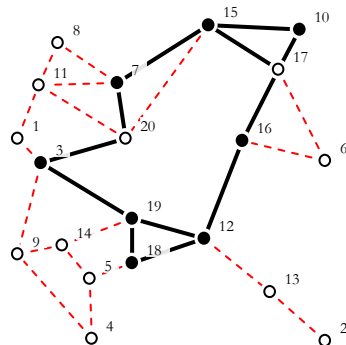
P-B 21: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HO



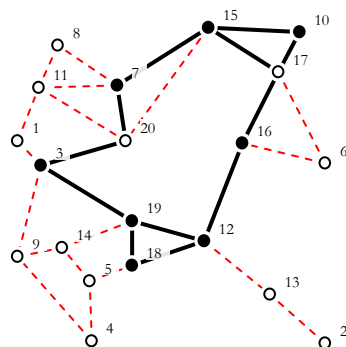
P-B 23: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:EM



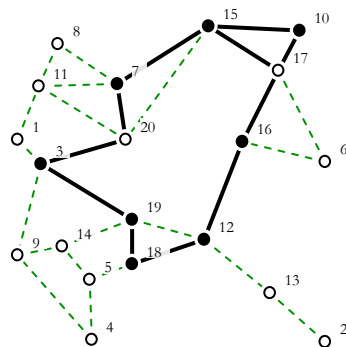
P-B 18: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HN



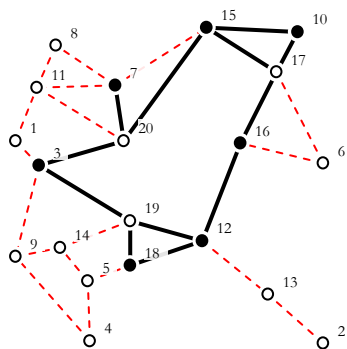
P-B 20: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HU



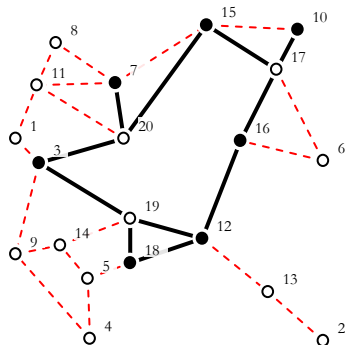
P-B 22: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HO



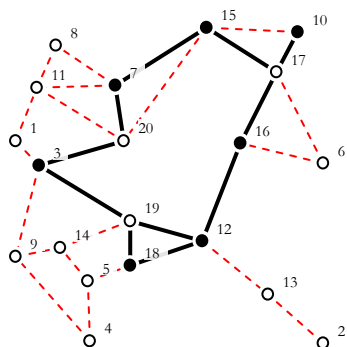
P-B 24: Sít' č. 1 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:EM



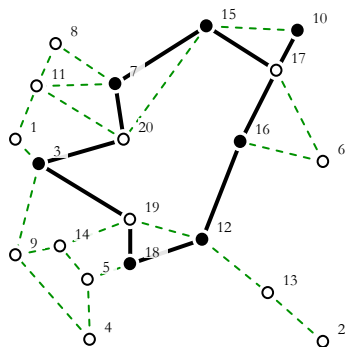
P-B 25: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



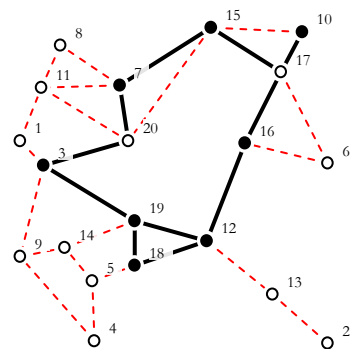
P-B 27: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HU



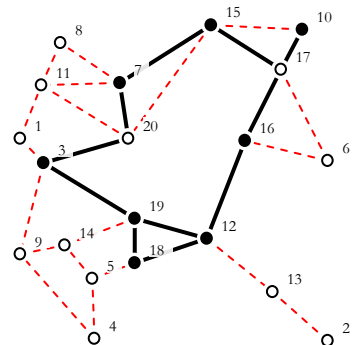
P-B 29: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



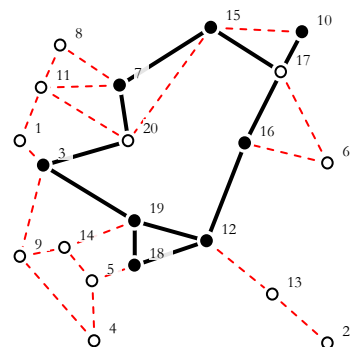
P-B 31: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



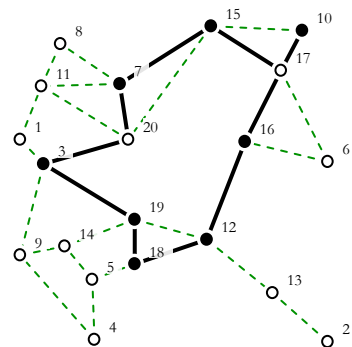
P-B 26: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



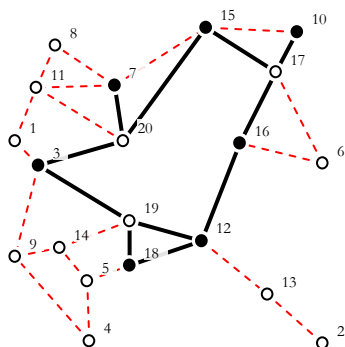
P-B 28: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU



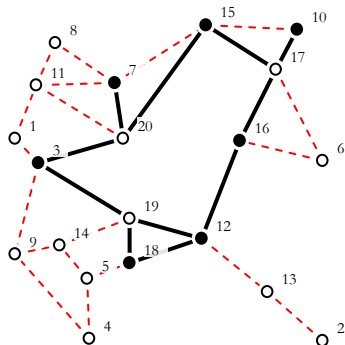
P-B 30: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO



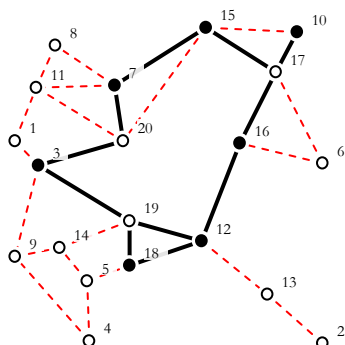
P-B 32: Sít' č. 1 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



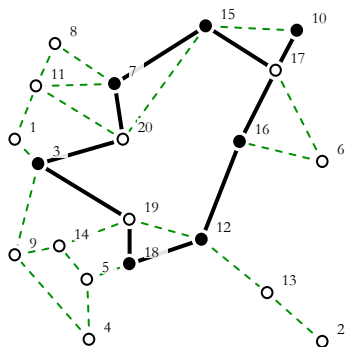
P-B 33: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:HN



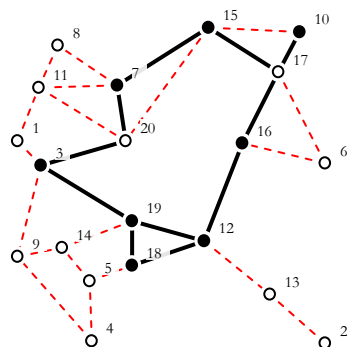
P-B 35: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:HU



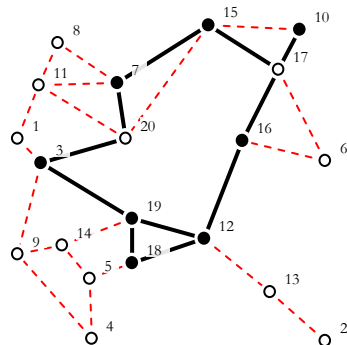
P-B 37: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:HO



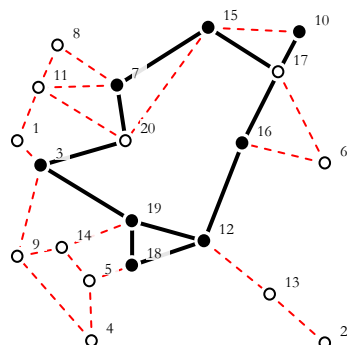
P-B 39: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:EM



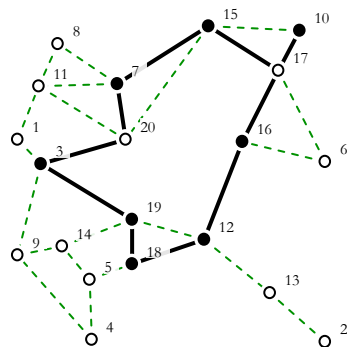
P-B 34: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:HN



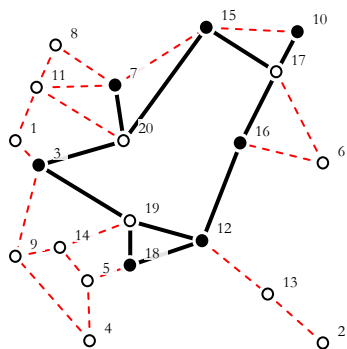
P-B 36: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:HU



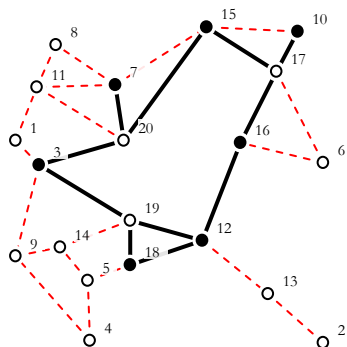
P-B 38: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:HO



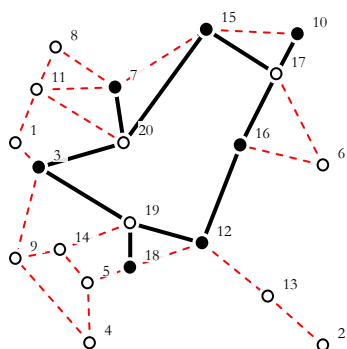
P-B 40: Sít' č. 1 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:EM



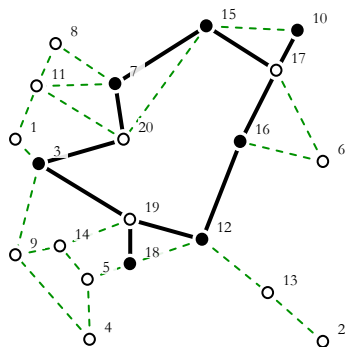
P-B 41: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



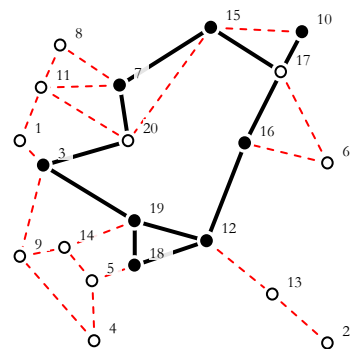
P-B 43: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



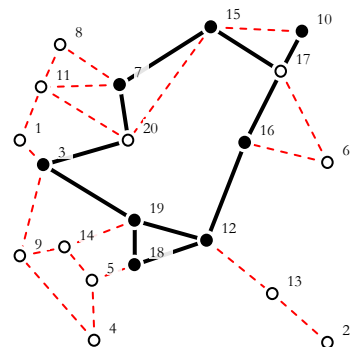
P-B 45: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO



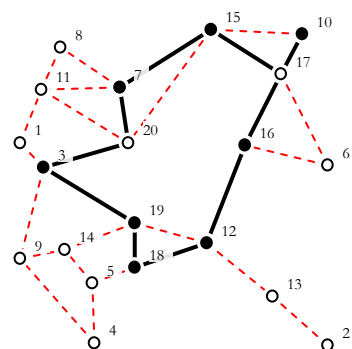
P-B 47: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM



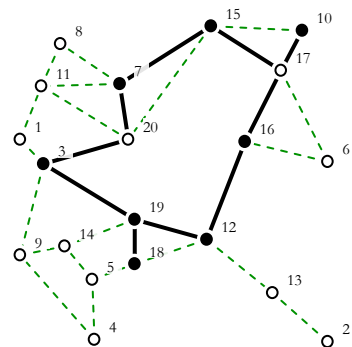
P-B 42: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



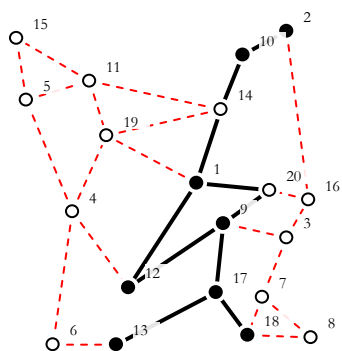
P-B 44: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



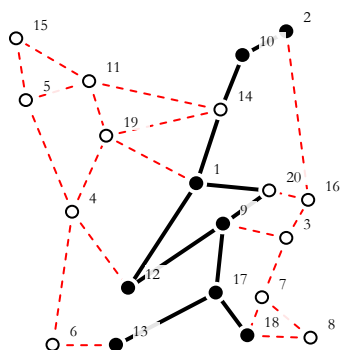
P-B 46: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HO



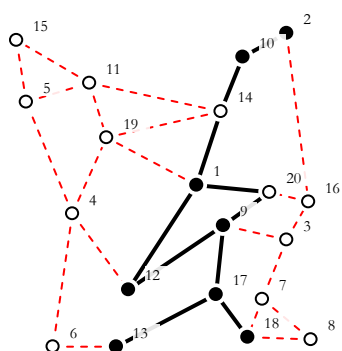
P-B 48: Sít' č. 1 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



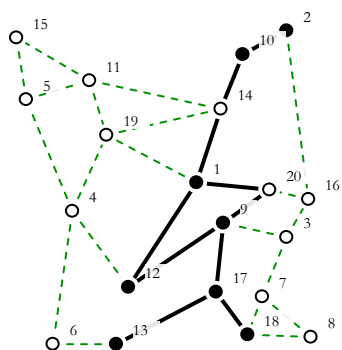
P-B 49: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:HN



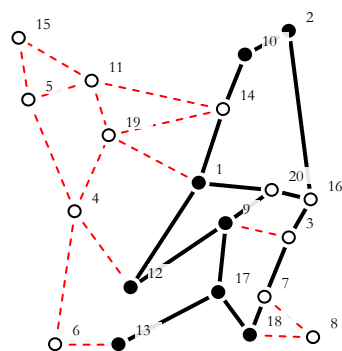
P-B 51: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:HU



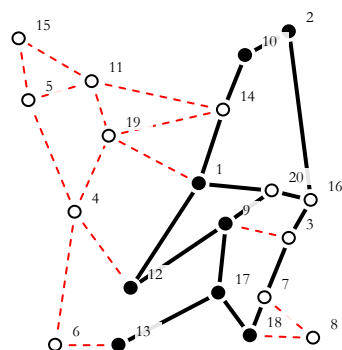
P-B 53: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:HO



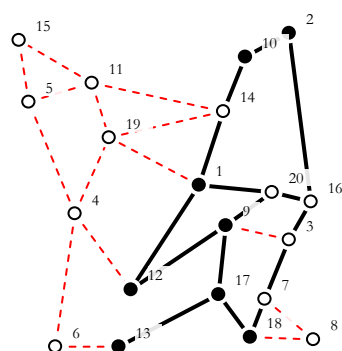
P-B 55: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:EM



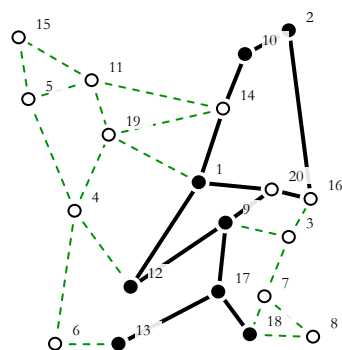
P-B 50: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HN



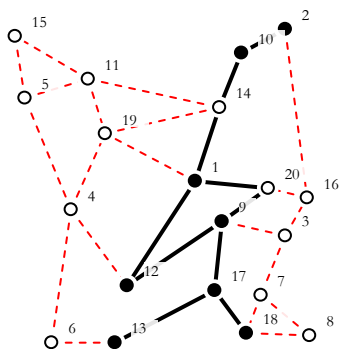
P-B 52: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HU



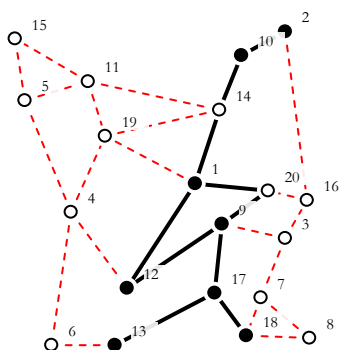
P-B 54: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HO



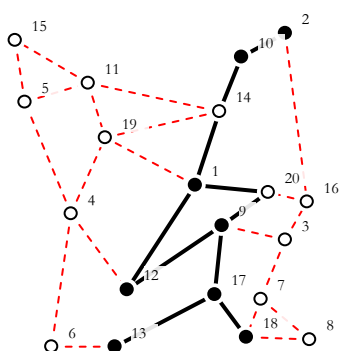
P-B 56: Sít' č. 2 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:EM



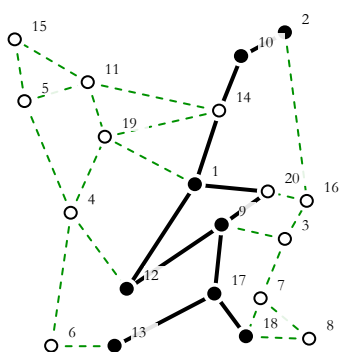
P-B 57: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



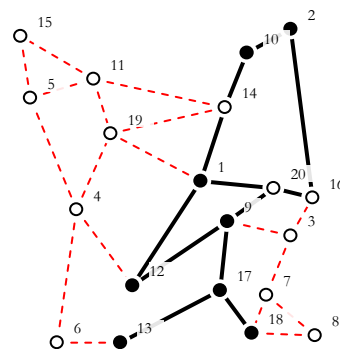
P-B 59: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



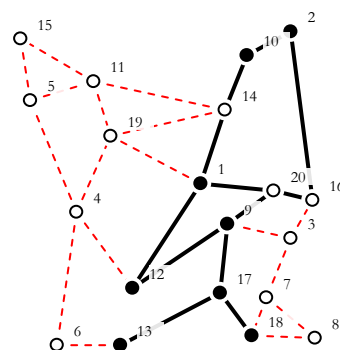
P-B 61: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



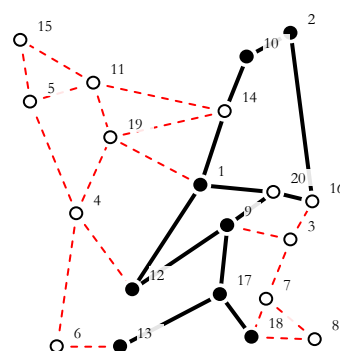
P-B 63: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



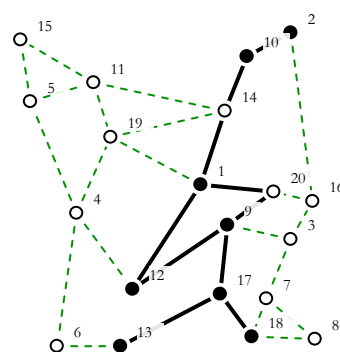
P-B 58: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



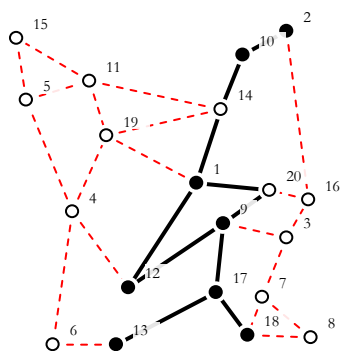
P-B 60: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



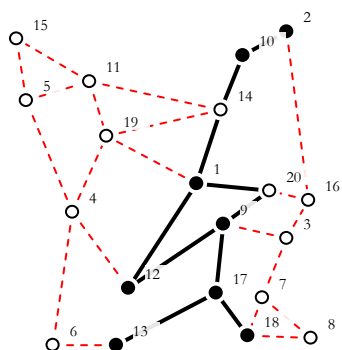
P-B 62: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO



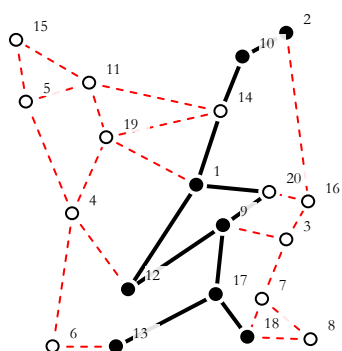
P-B 64: Sít' č. 2 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



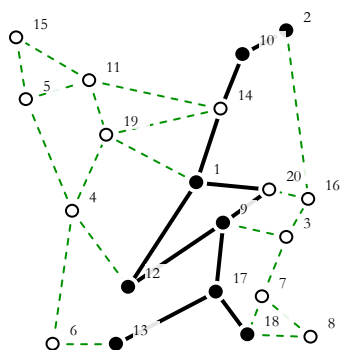
P-B 65: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HN



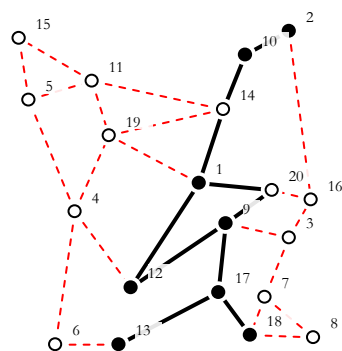
P-B 67: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HU



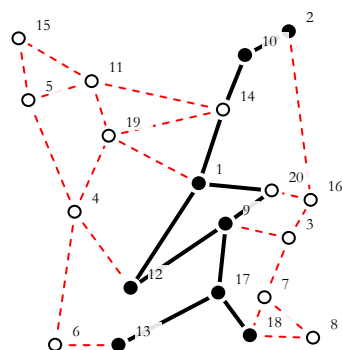
P-B 69: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HO



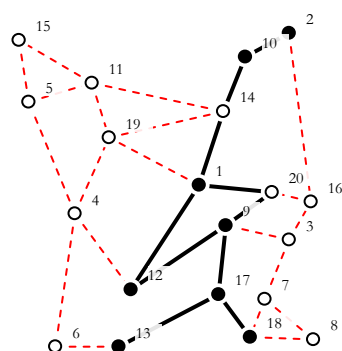
P-B 71: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:EM



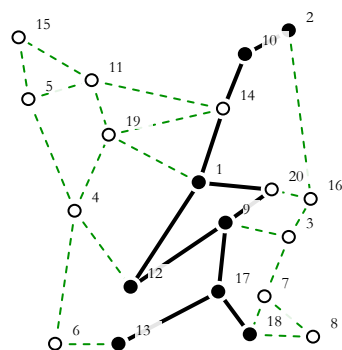
P-B 66: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HN



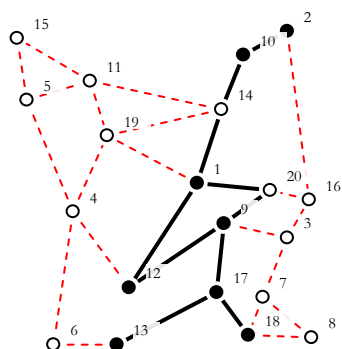
P-B 68: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HU



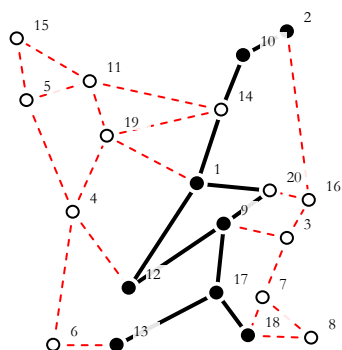
P-B 70: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HO



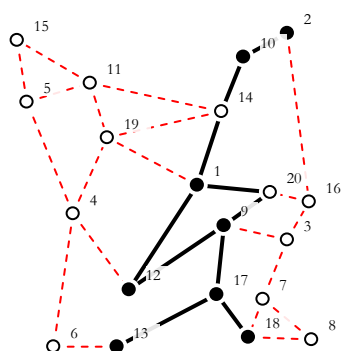
P-B 72: Sít' č. 2 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:EM



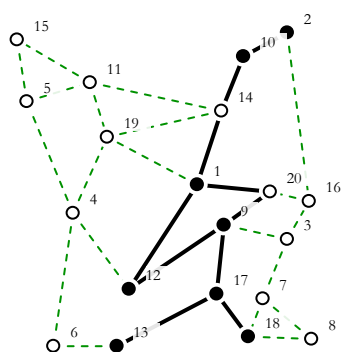
P-B 73: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



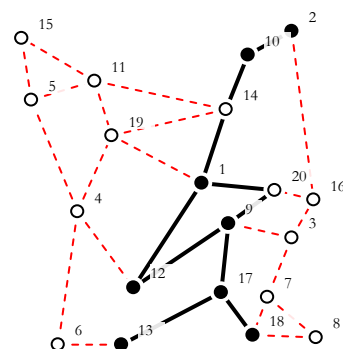
P-B 75: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HU



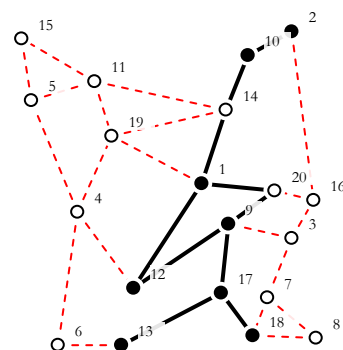
P-B 77: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



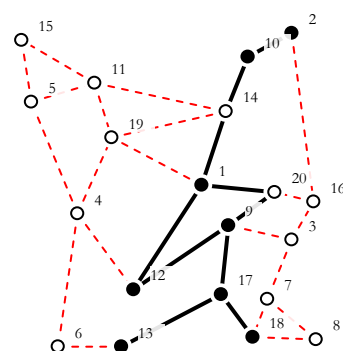
P-B 79: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



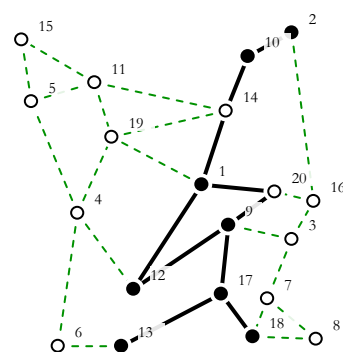
P-B 74: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



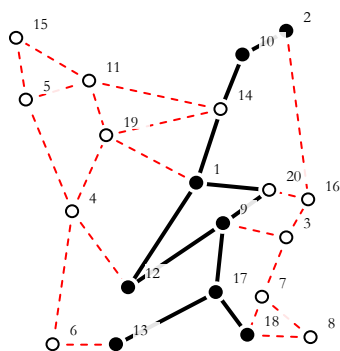
P-B 76: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 78: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO

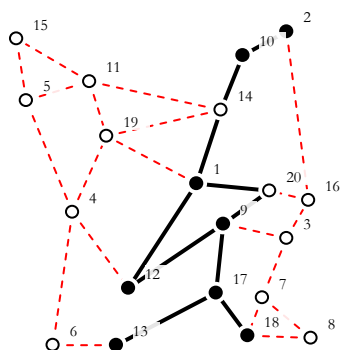


P-B 80: Sít' č. 2 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



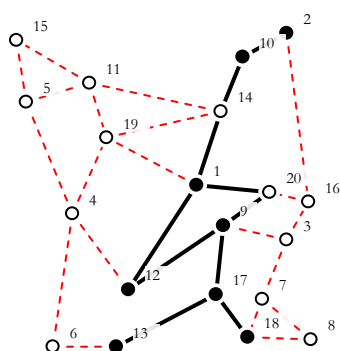
P-B 81: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



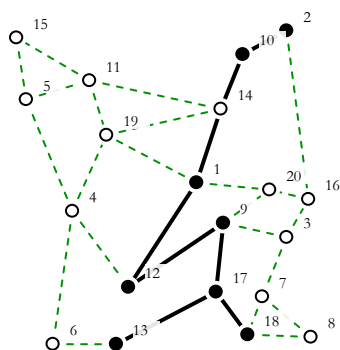
P-B 83: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



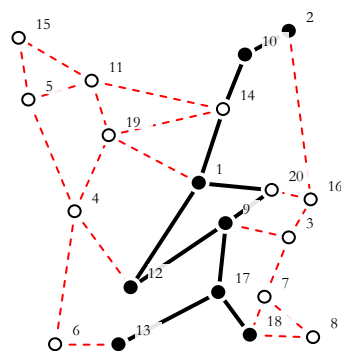
P-B 85: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



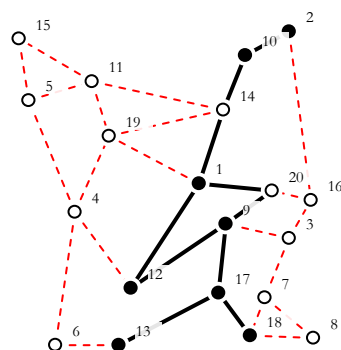
P-B 87: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



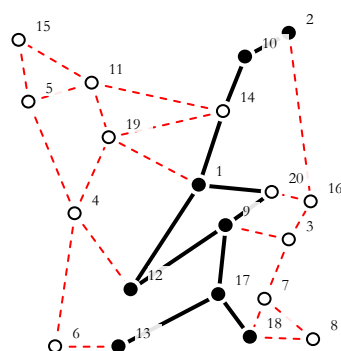
P-B 82: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



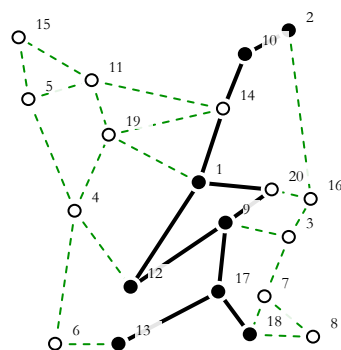
P-B 84: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



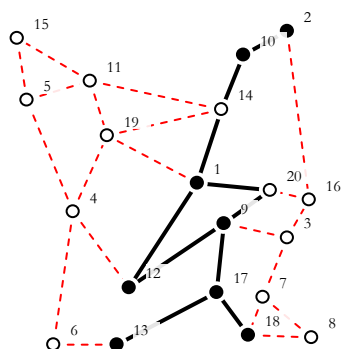
P-B 86: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO

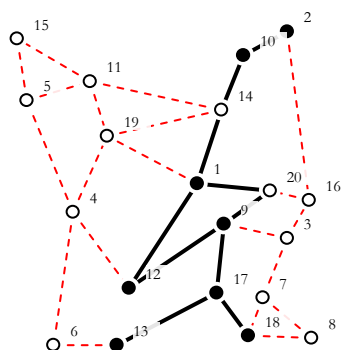


P-B 88: Sít' č. 2 pro $q = 1,5$ a

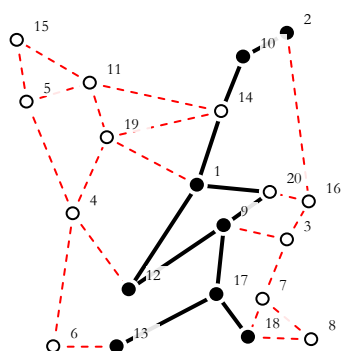
PD = 20 metoda:EM



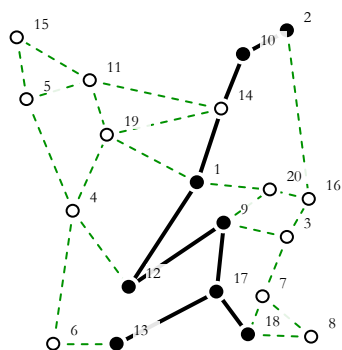
P-B 89: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



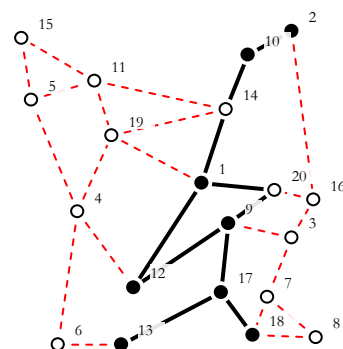
P-B 91: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



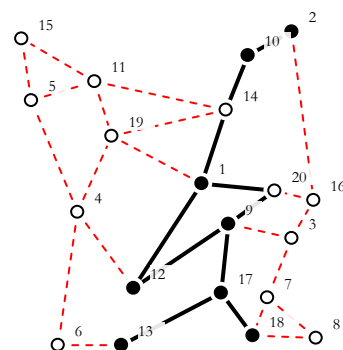
P-B 93: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO



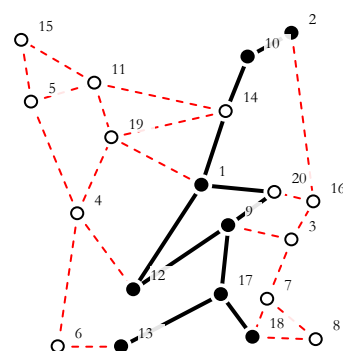
P-B 95: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM



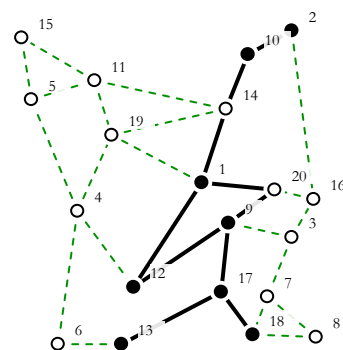
P-B 90: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



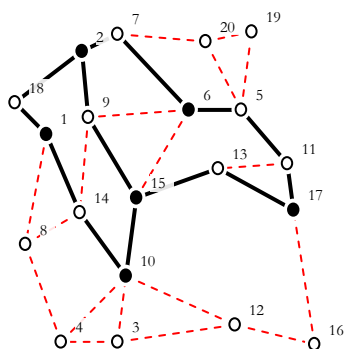
P-B 92: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 94: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HO

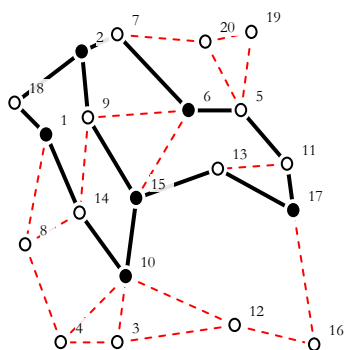


P-B 96: Síť č. 2 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



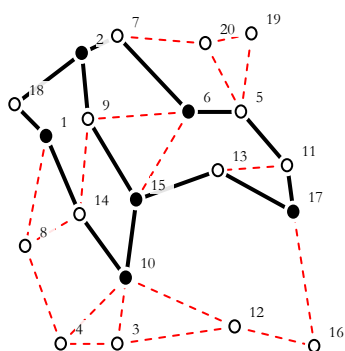
P-B 97: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HN



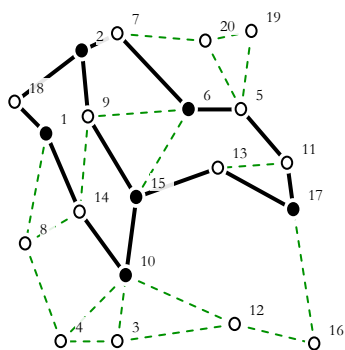
P-B 99: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HU



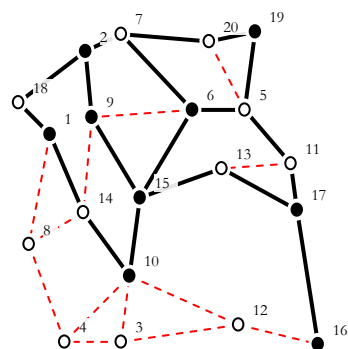
P-B 101: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HO



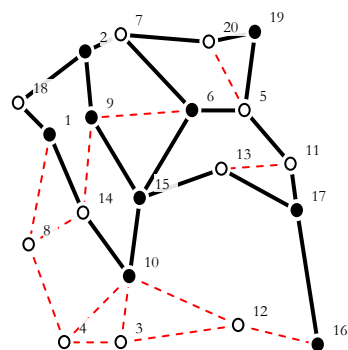
P-B 103: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:EM



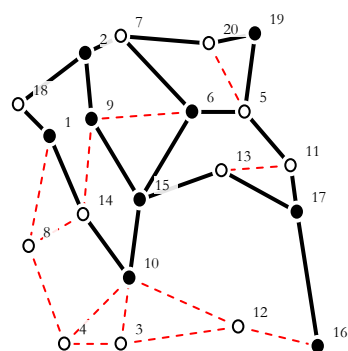
P-B 98: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HN



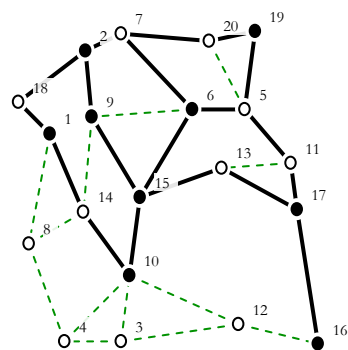
P-B 100: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HU



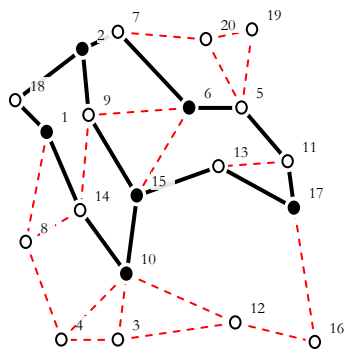
P-B 102: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HO

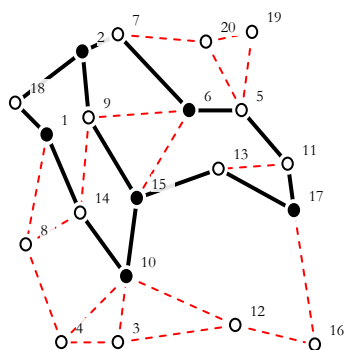


P-B 104: Sít' č. 3 pro $q = 1,1$ a

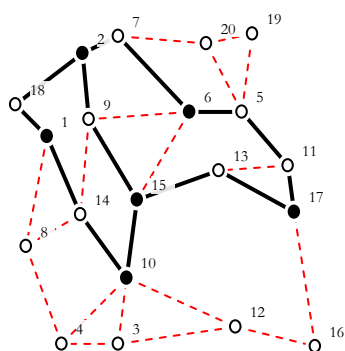
PD = 20 metoda:EM



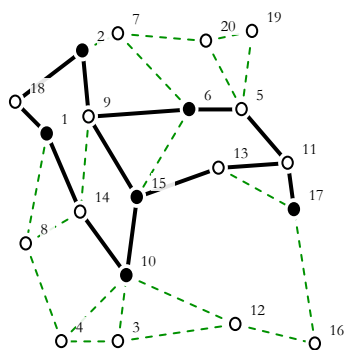
P-B 105: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



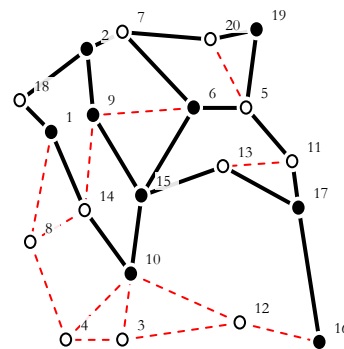
P-B 107: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



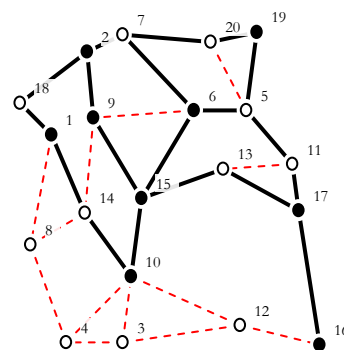
P-B 109: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



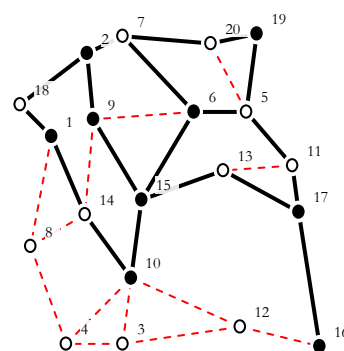
P-B 111: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



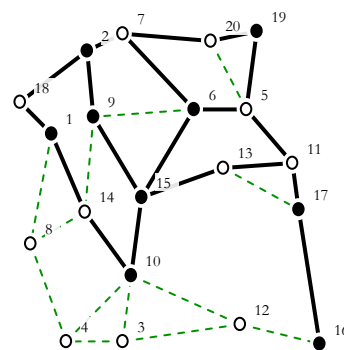
P-B 106: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



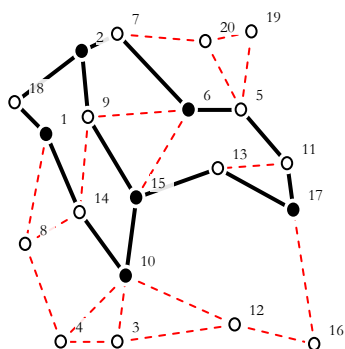
P-B 108: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 110: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO

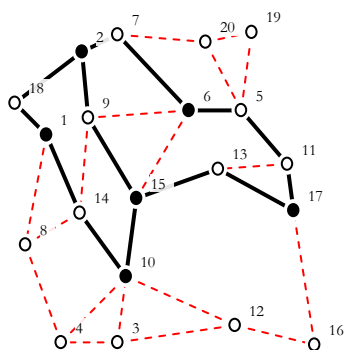


P-B 112: Sít' č. 3 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



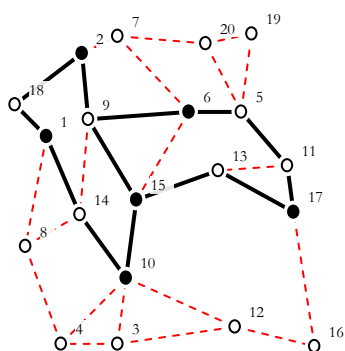
P-B 113: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HN



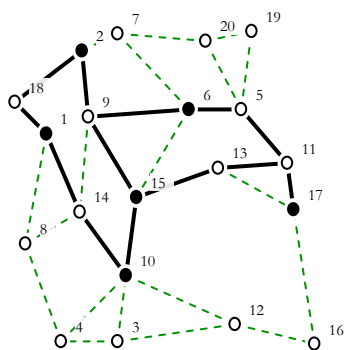
P-B 115: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HU



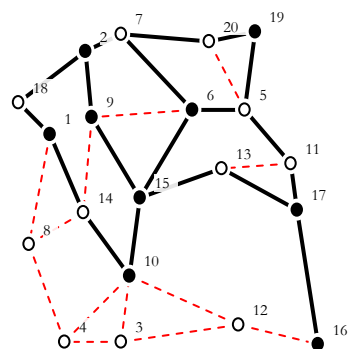
P-B 117: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HO



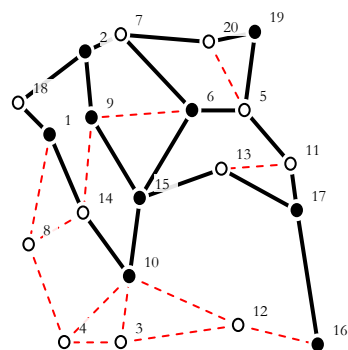
P-B 119: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:EM



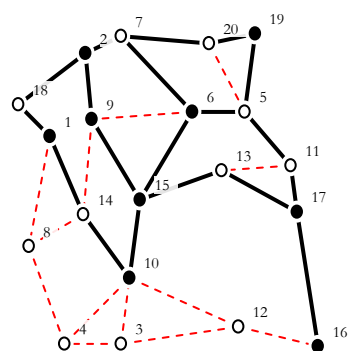
P-B 114: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HN



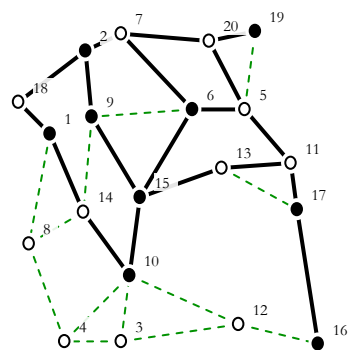
P-B 116: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HU



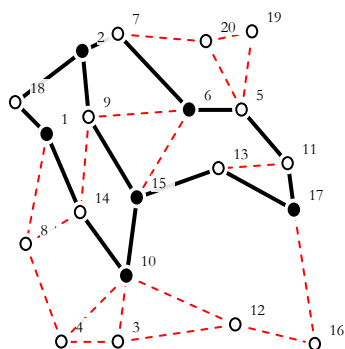
P-B 118: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HO

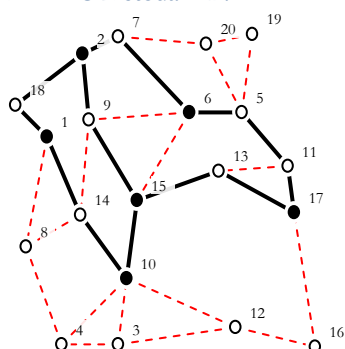


P-B 120: Sít' č. 3 pro $q = 1,3$ a

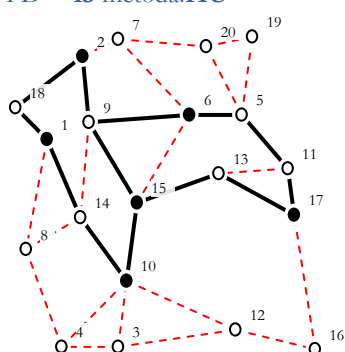
PD = 20 metoda:EM



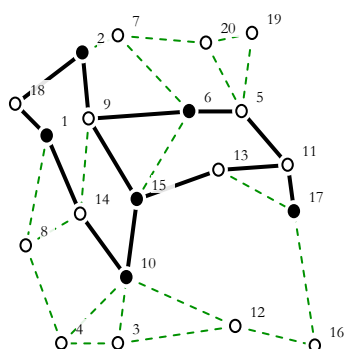
P-B 121: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



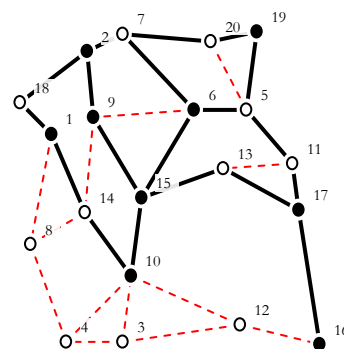
P-B 123: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HU



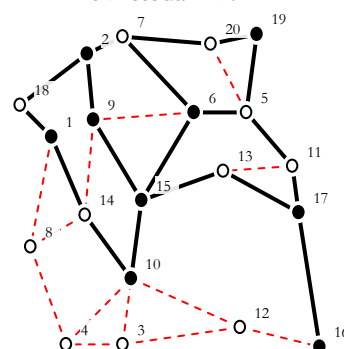
P-B 125: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



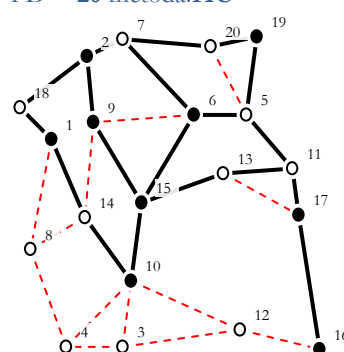
P-B 127: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



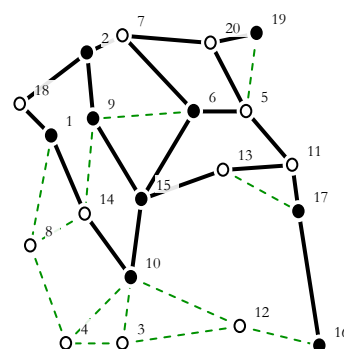
P-B 122: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



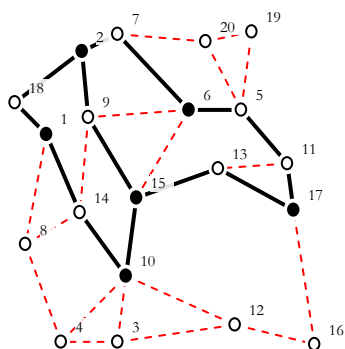
P-B 124: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 126: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO

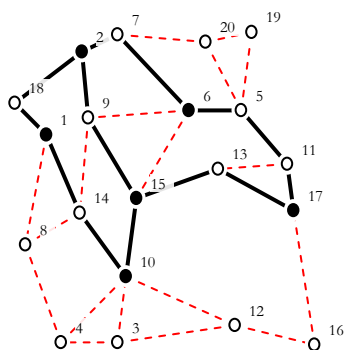


P-B 128: Síť č. 3 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



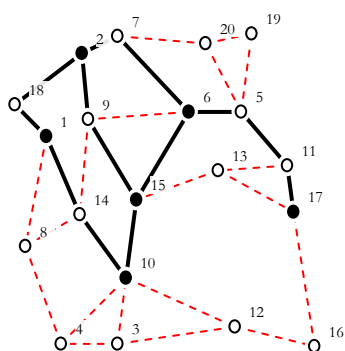
P-B 129: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



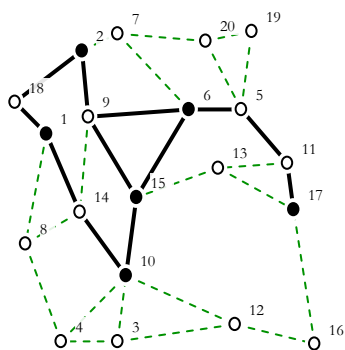
P-B 131: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



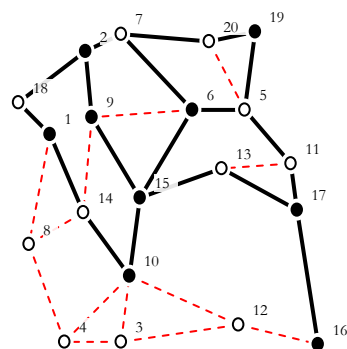
P-B 133: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



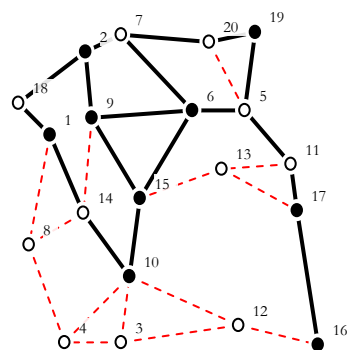
P-B 135: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



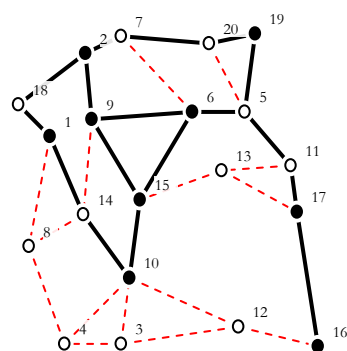
P-B 130: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



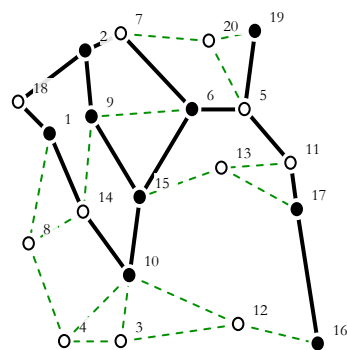
P-B 132: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



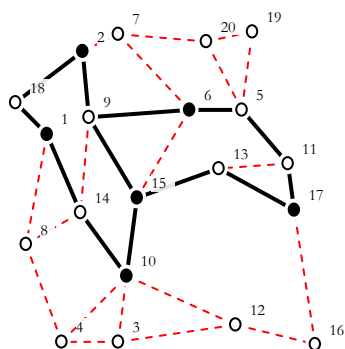
P-B 134: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO

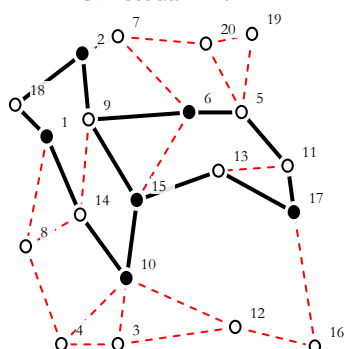


P-B 136: Sít' č. 3 pro $q = 1,5$ a

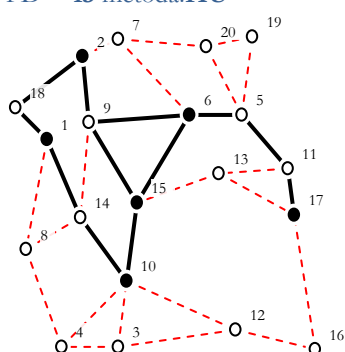
PD = 20 metoda:EM



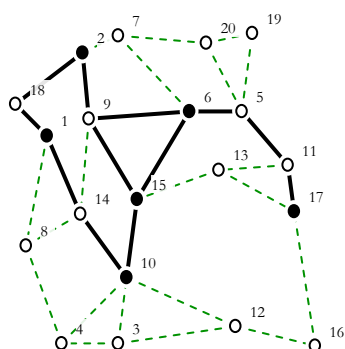
P-B 137: Sít' č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



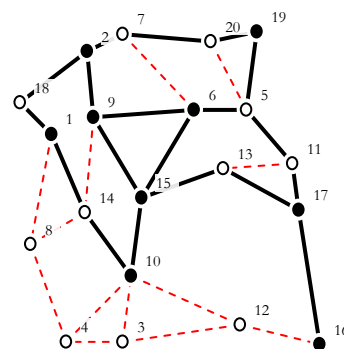
P-B 139: Sír' č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



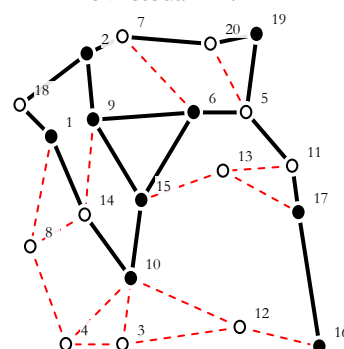
**P-B 141: Sít' č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO**



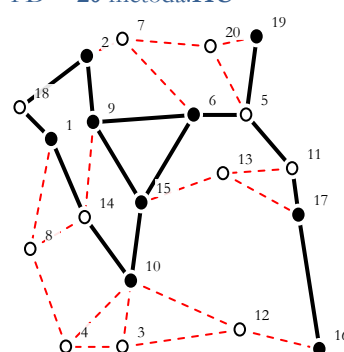
P-B 143: Sít' č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM



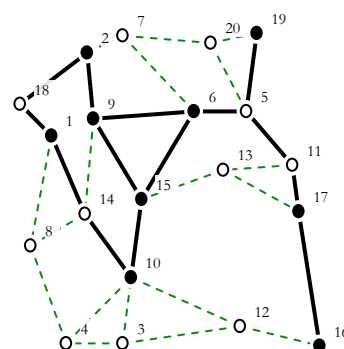
P-B 138: Sít' č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



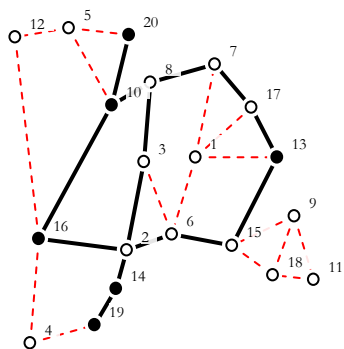
P-B 140: Síť č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda: HU



P-B 142: Síť č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda: **HO**

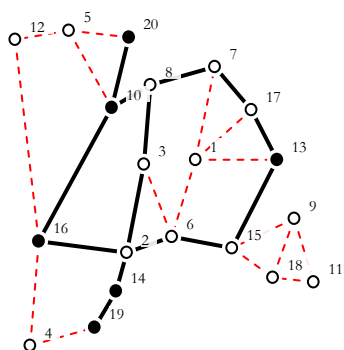


P-B 144: Síť č. 3 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda: EM



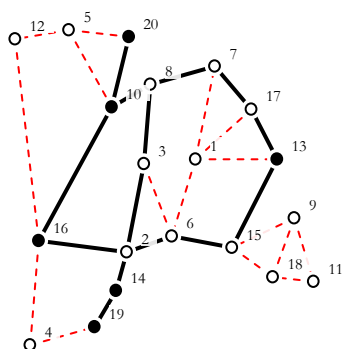
P-B 145: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HN



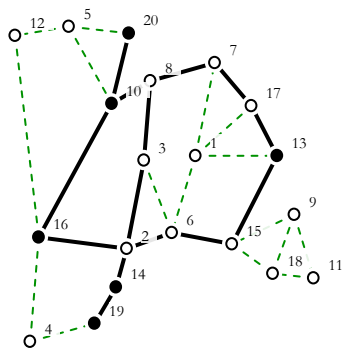
P-B 147: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HU



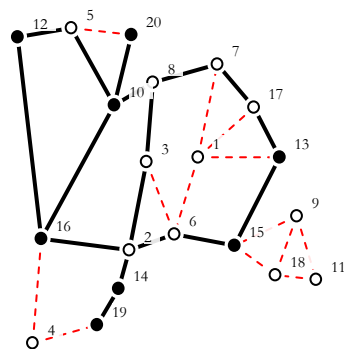
P-B 149: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HO



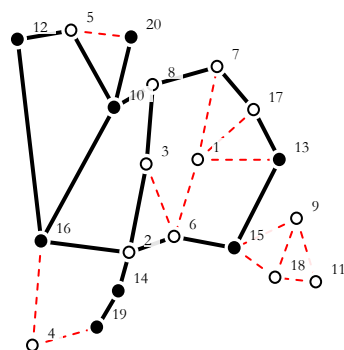
P-B 151: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:EM



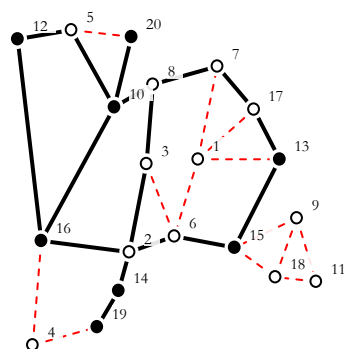
P-B 146: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HN



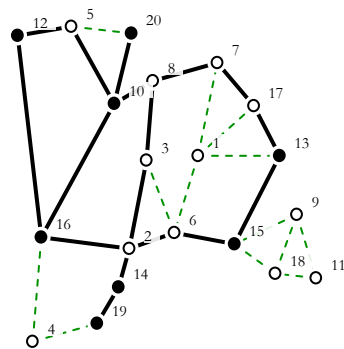
P-B 148: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HU



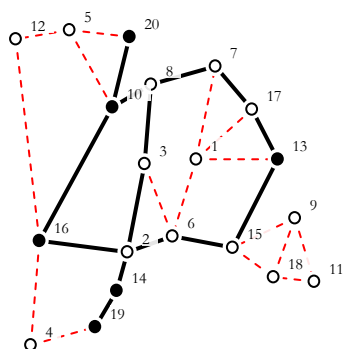
P-B 150: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HO

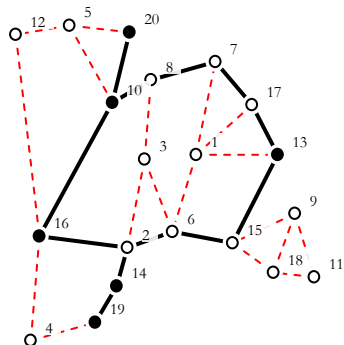


P-B 152: Sít' č. 4 pro $q = 1,1$ a

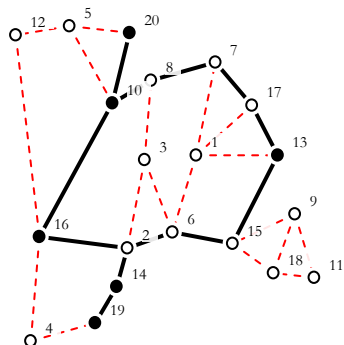
PD = 20 metoda:EM



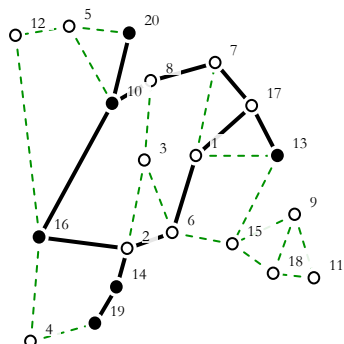
P-B 153: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



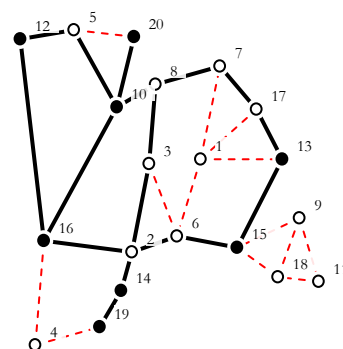
P-B 155: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



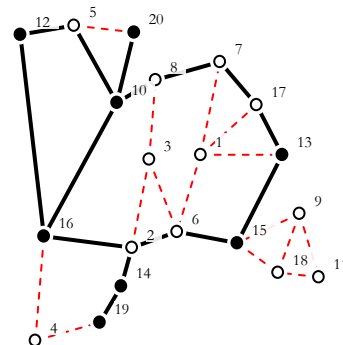
P-B 157: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



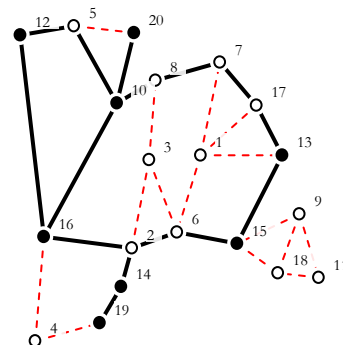
P-B 159: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



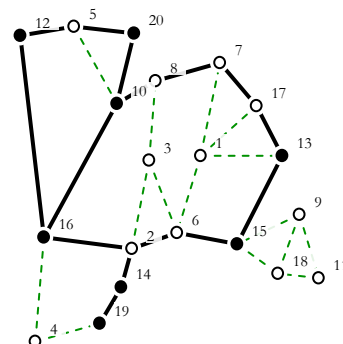
P-B 154: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



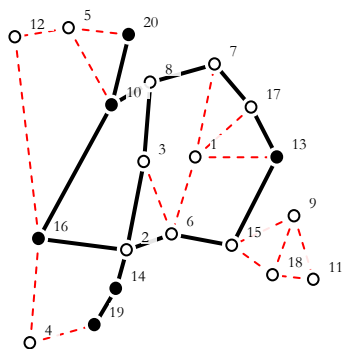
P-B 156: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 158: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO

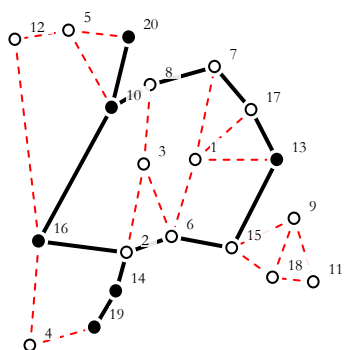


P-B 160: Sít' č. 4 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



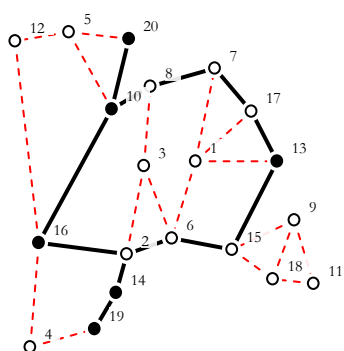
P-B 161: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HN



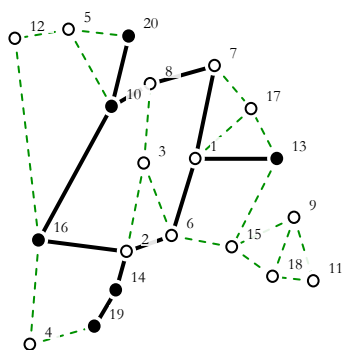
P-B 163: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HU



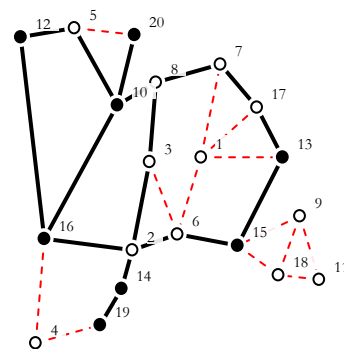
P-B 165: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HO



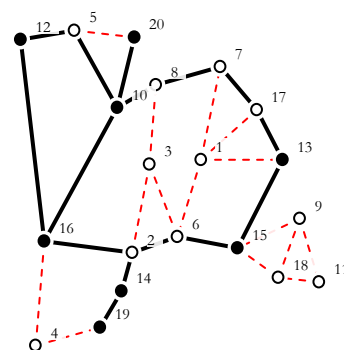
P-B 167: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:EM



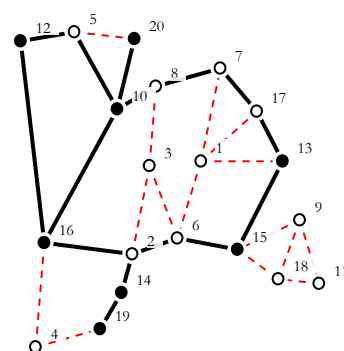
P-B 162: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HN



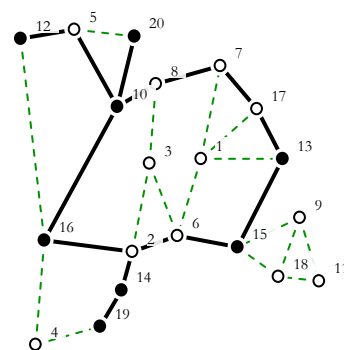
P-B 164: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HU



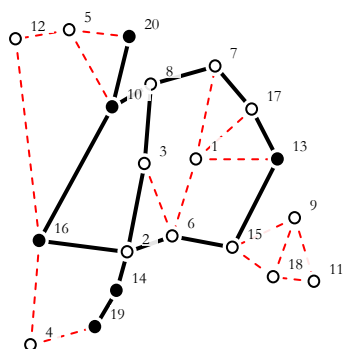
P-B 166: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HO

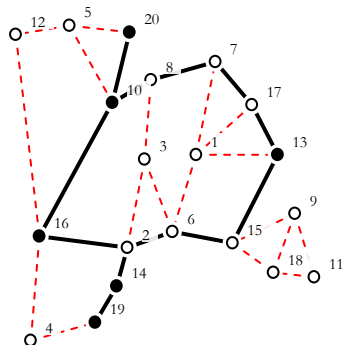


P-B 168: Síť č. 4 pro $q = 1,3$ a

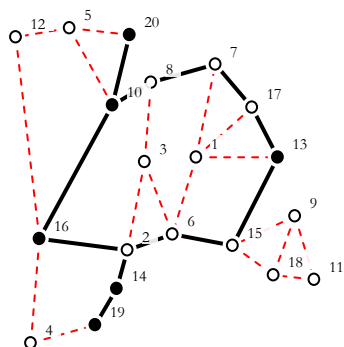
PD = 20 metoda:EM



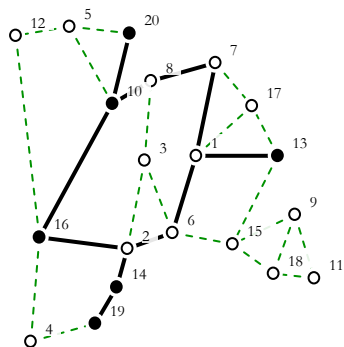
P-B 169: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



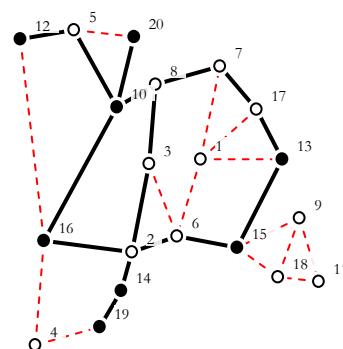
P-B 171: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HU



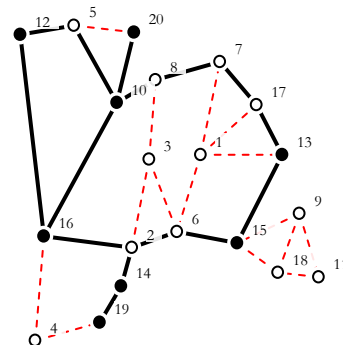
P-B 173: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



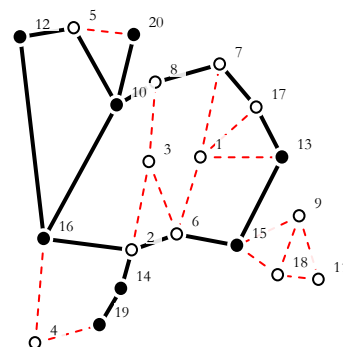
P-B 175: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



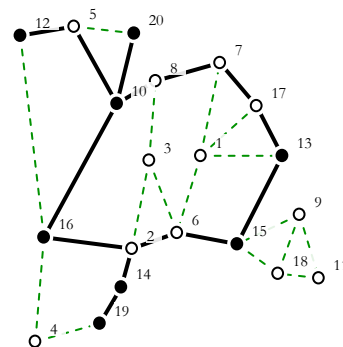
P-B 170: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



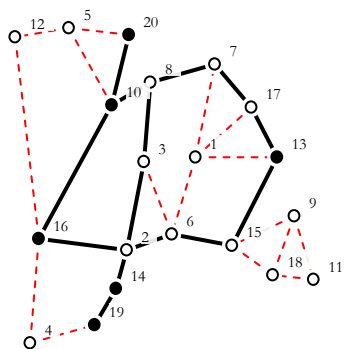
P-B 172: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 174: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO

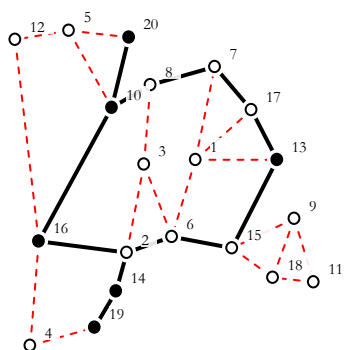


P-B 176: Sít' č. 4 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



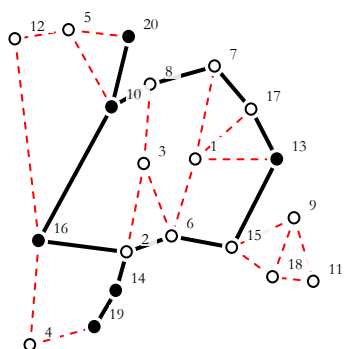
P-B 177: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



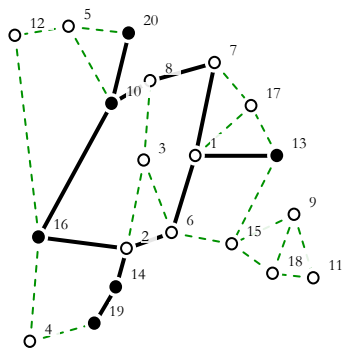
P-B 179: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



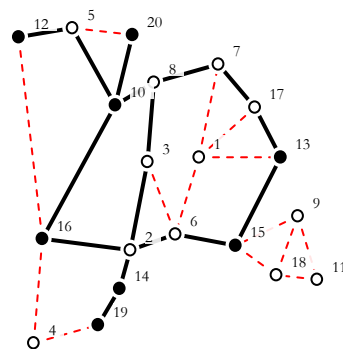
P-B 181: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



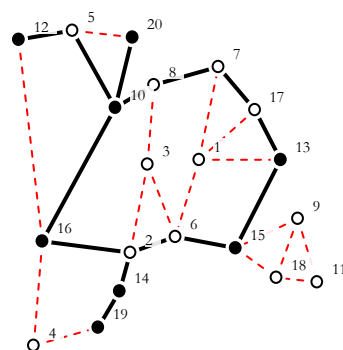
P-B 183: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



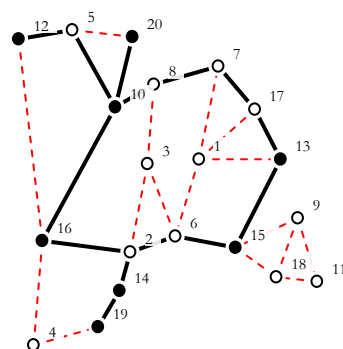
P-B 178: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



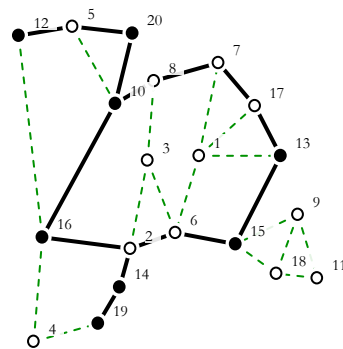
P-B 180: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



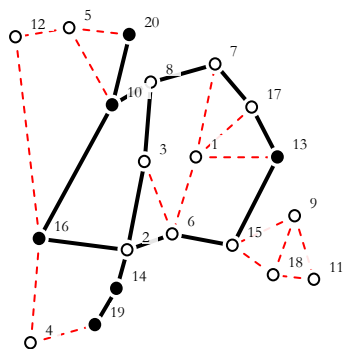
P-B 182: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO

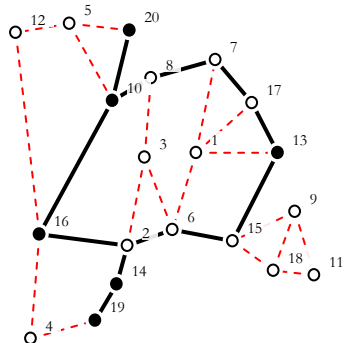


P-B 184: Sít' č. 4 pro $q = 1,5$ a

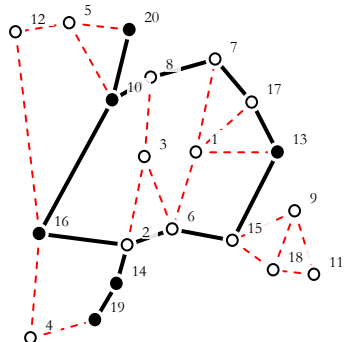
PD = 20 metoda:EM



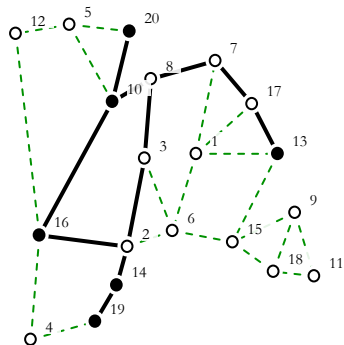
P-B 185: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



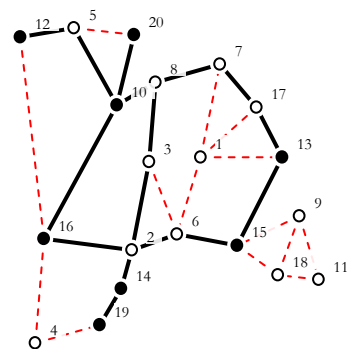
P-B 187: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



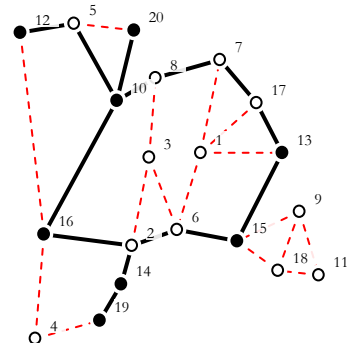
P-B 189: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO



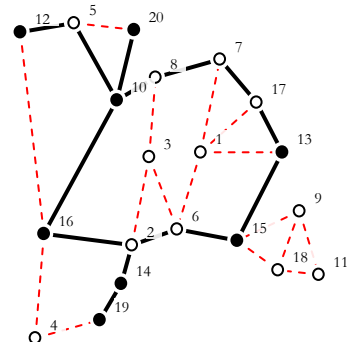
P-B 191: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM



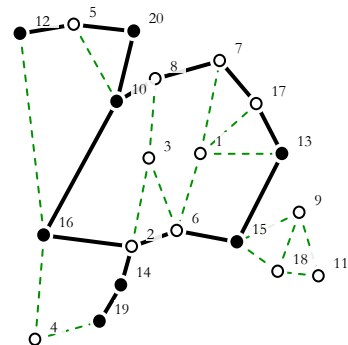
P-B 186: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



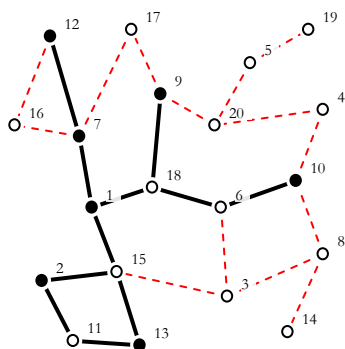
P-B 188: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 190: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HO

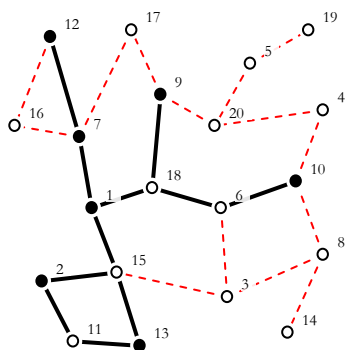


P-B 192: Sít' č. 4 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



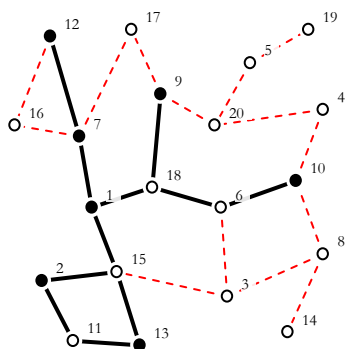
P-B 193: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HN



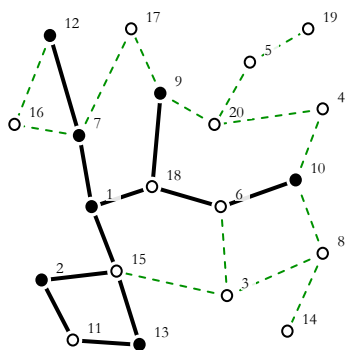
P-B 195: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HU



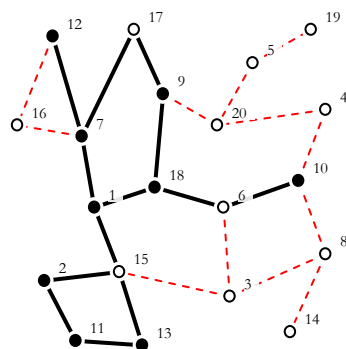
P-B 197: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HO



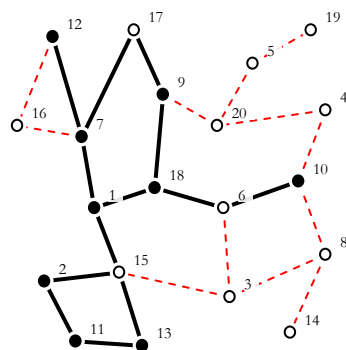
P-B 199: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:EM



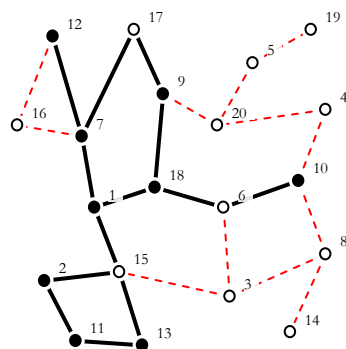
P-B 194: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HN



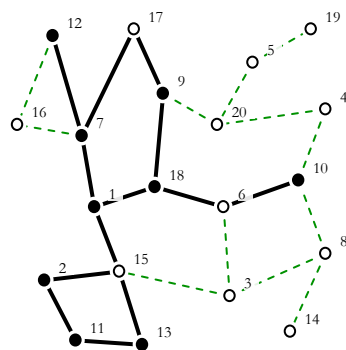
P-B 196: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HU



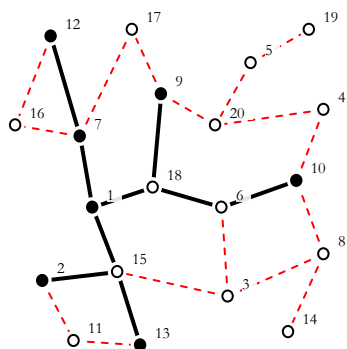
P-B 198: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HO

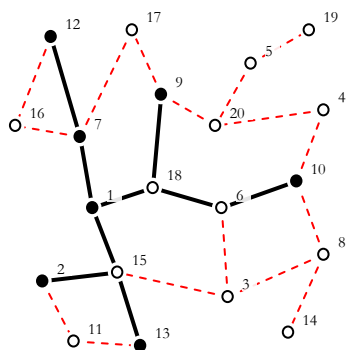


P-B 200: Sít' č. 5 pro $q = 1,1$ a

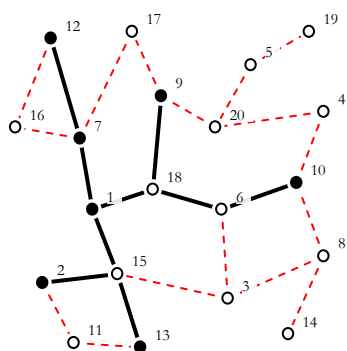
PD = 20 metoda:EM



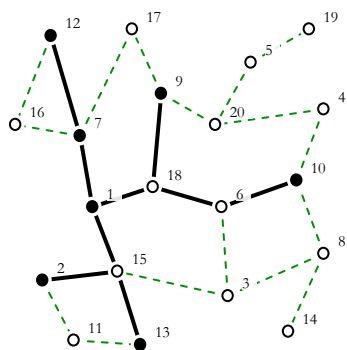
P-B 201: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



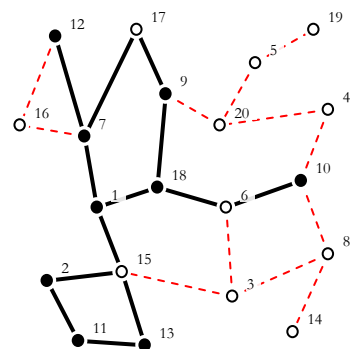
P-B 203: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



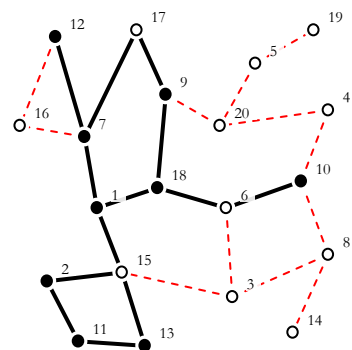
P-B 205: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



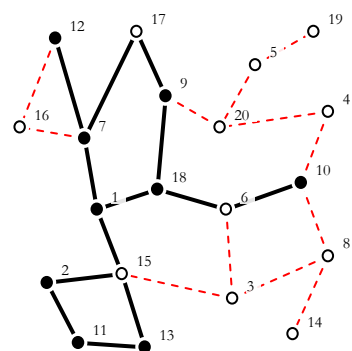
P-B 207: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



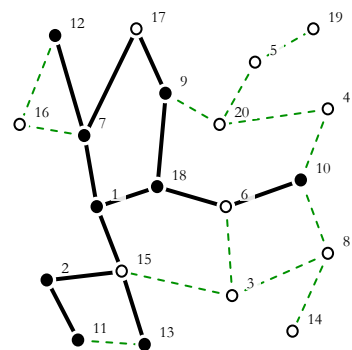
P-B 202: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



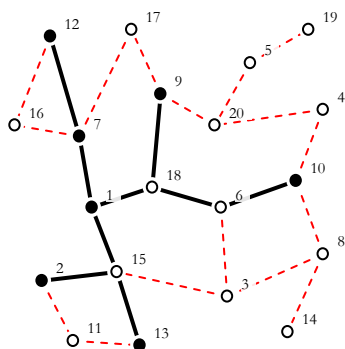
P-B 204: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 206: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO

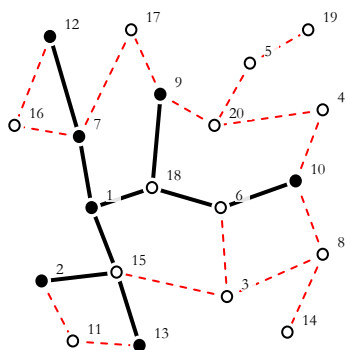


P-B 208: Sít' č. 5 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



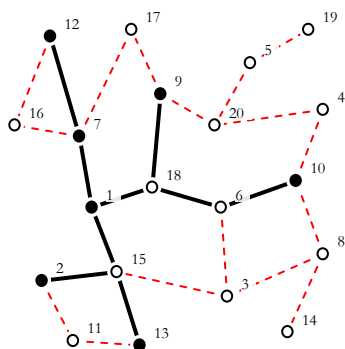
P-B 209: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HN



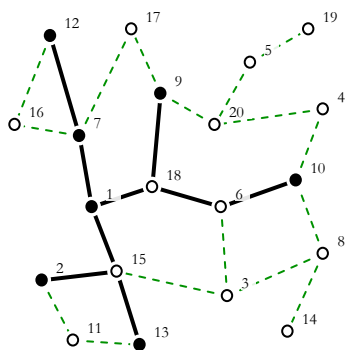
P-B 211: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HU



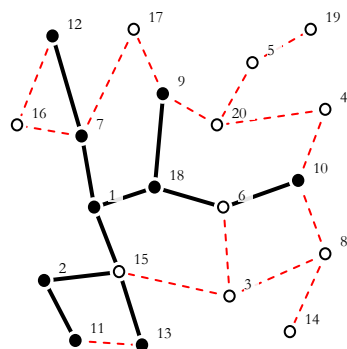
P-B 213: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HO



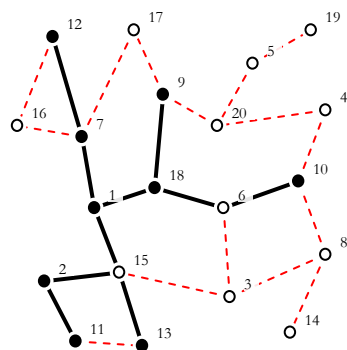
P-B 215: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:EM



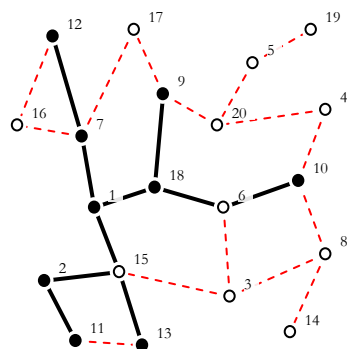
P-B 210: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HN



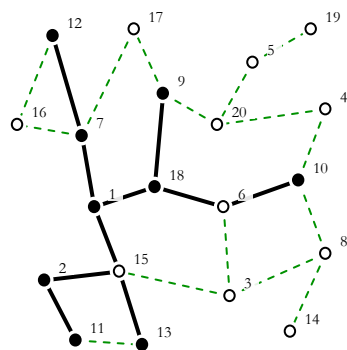
P-B 212: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HU



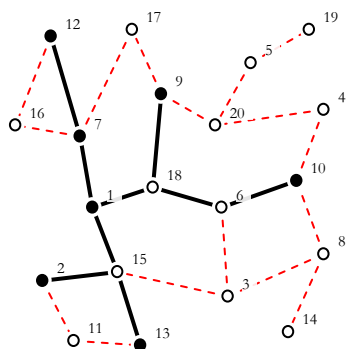
P-B 214: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HO

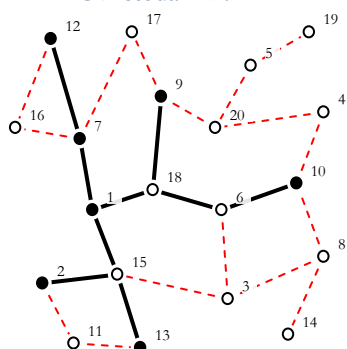


P-B 216: Sít' č. 5 pro $q = 1,3$ a

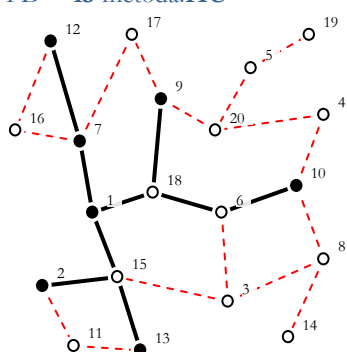
PD = 20 metoda:EM



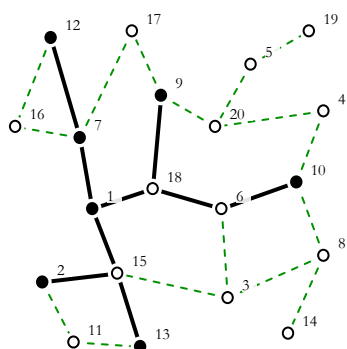
P-B 217: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



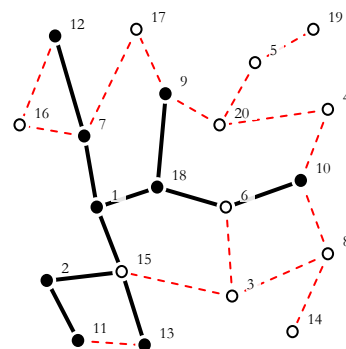
P-B 219: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HU



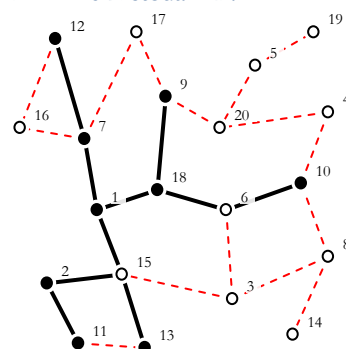
P-B 221: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



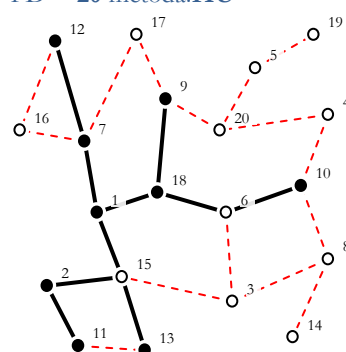
P-B 223: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



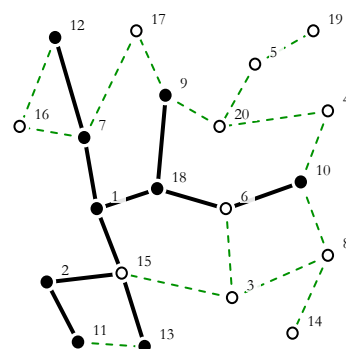
P-B 218: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



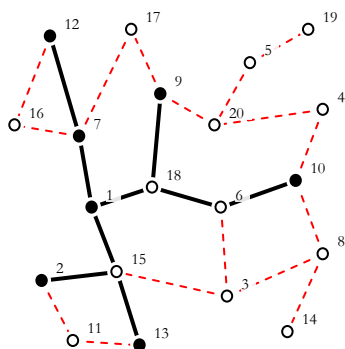
P-B 220: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 222: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO

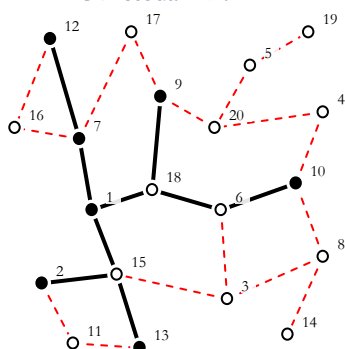


P-B 224: Síť č. 5 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



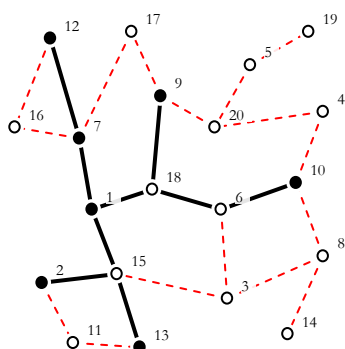
P-B 225: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



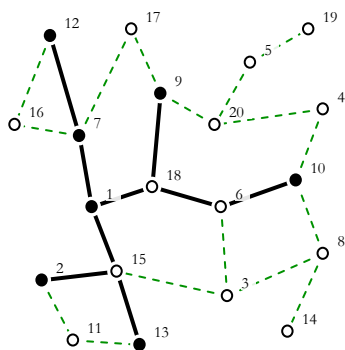
P-B 227: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



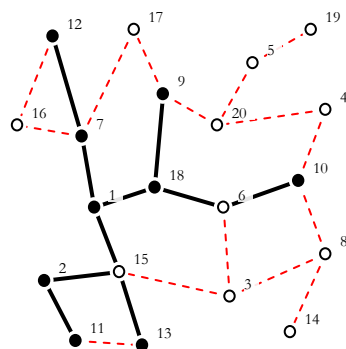
P-B 229: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



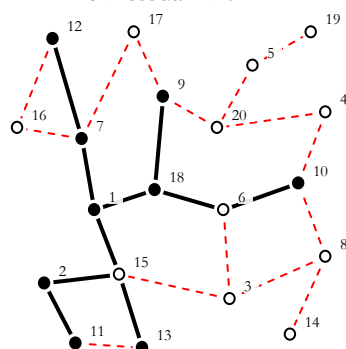
P-B 231: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



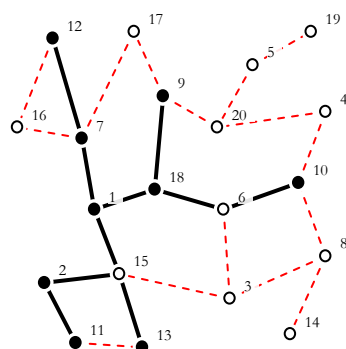
P-B 226: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



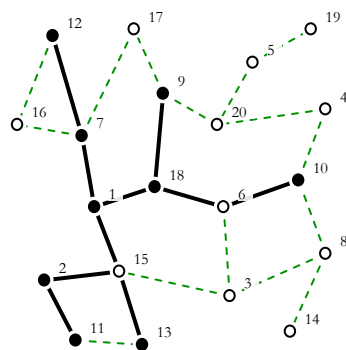
P-B 228: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



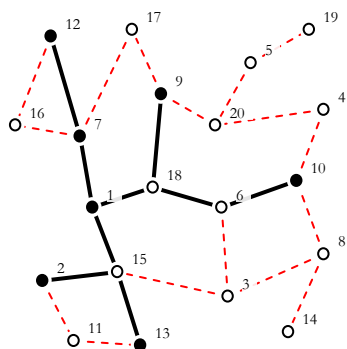
P-B 230: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO

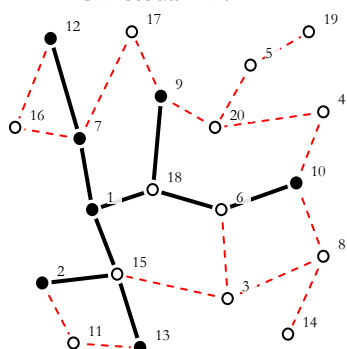


P-B 232: Sít' č. 5 pro $q = 1,5$ a

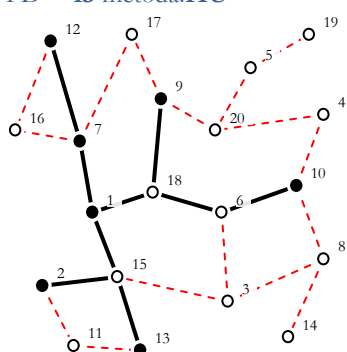
PD = 20 metoda:EM



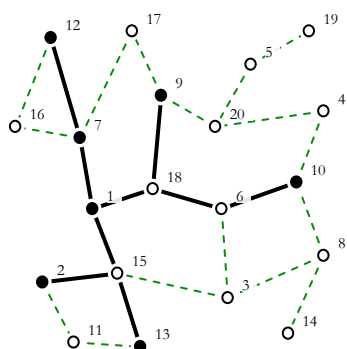
P-B 233: Sít' č. 5 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



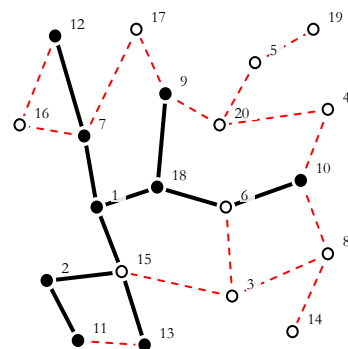
P-B 235: Sír' č. 5 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



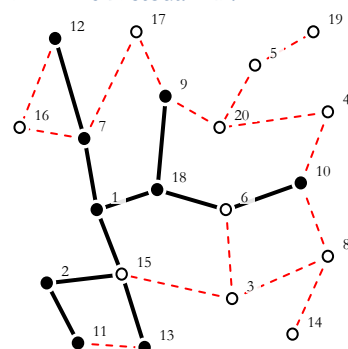
P-B 237: Sír' č. 5 pro q = 1,6 a
PD = 13 metoda:HO



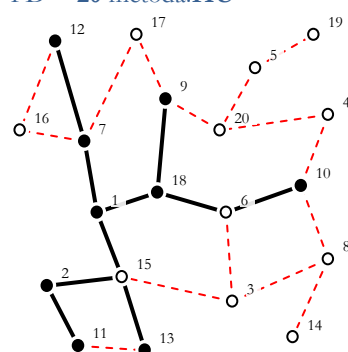
**P-B 239: Sít' č. 5 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM**



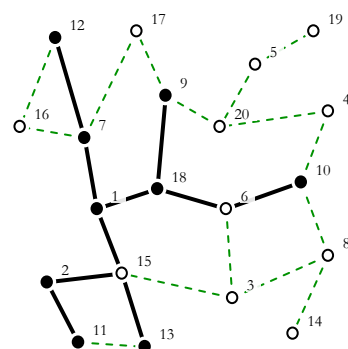
P-B 234: Sít' č. 5 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



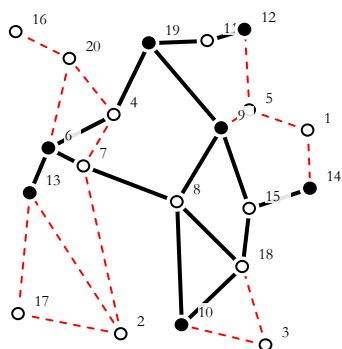
P-B 236: Sít' č. 5 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 238: Sít' č. 5 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda: **HO**

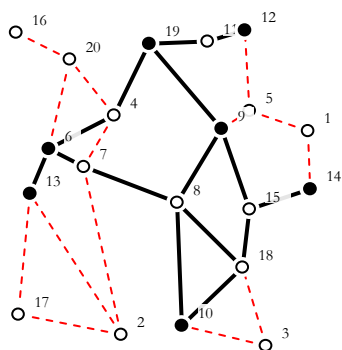


P-B 240: Sít' č. 5 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



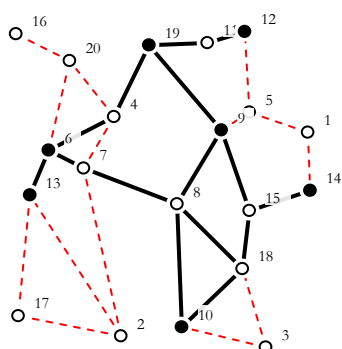
P-B 241: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HN



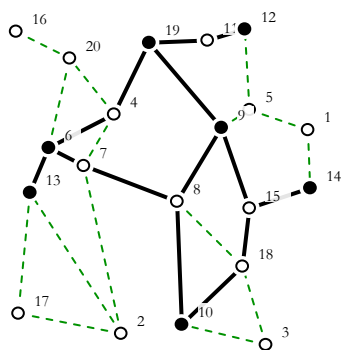
P-B 243: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HU



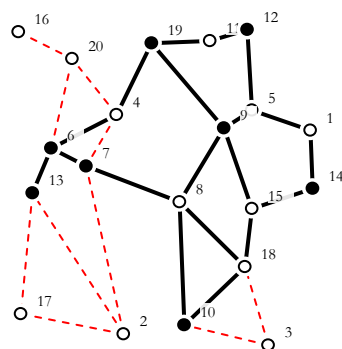
P-B 245: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HO



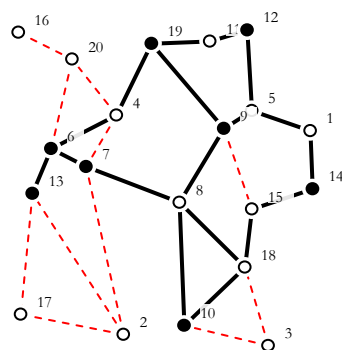
P-B 247: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:EM



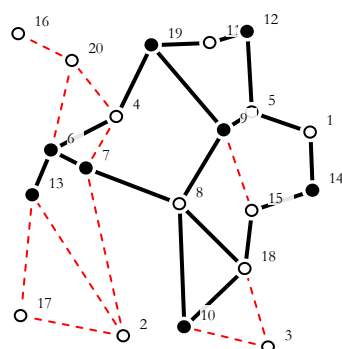
P-B 242: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HN



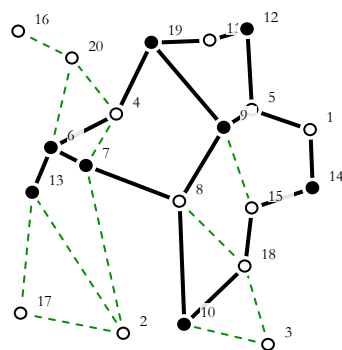
P-B 244: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HU



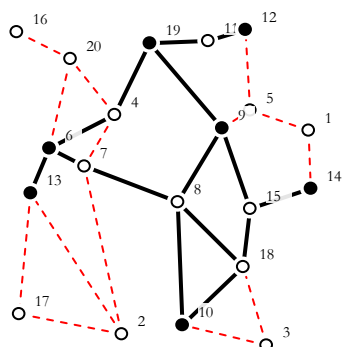
P-B 246: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HO



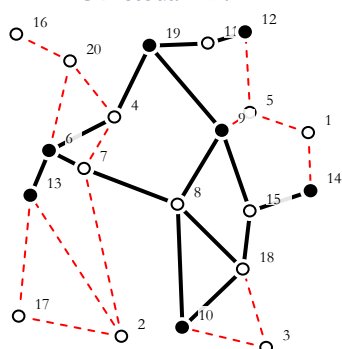
P-B 248: Sít' č. 6 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:EM



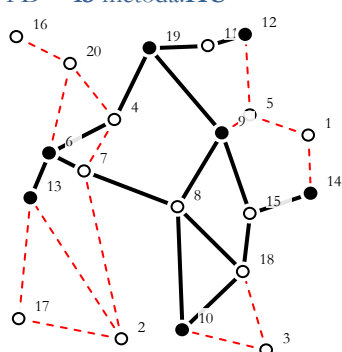
P-B 249: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 13 metoda:HN



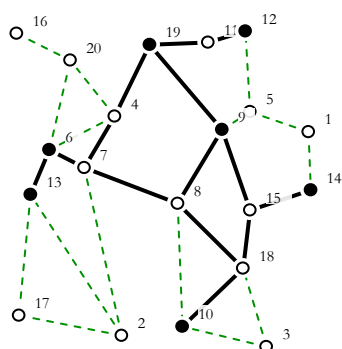
P-B 251: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 13 metoda:HU



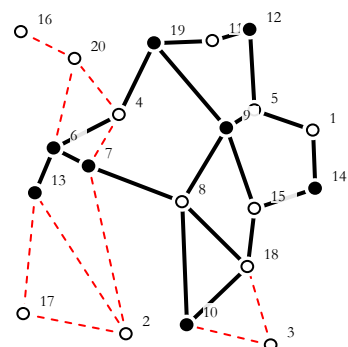
P-B 253: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 13 metoda:HO



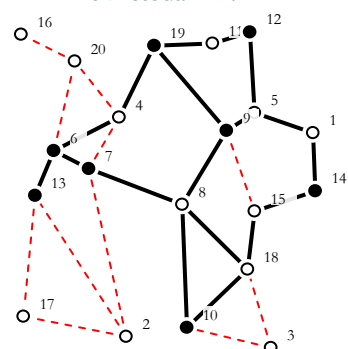
P-B 255: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 13 metoda:EM



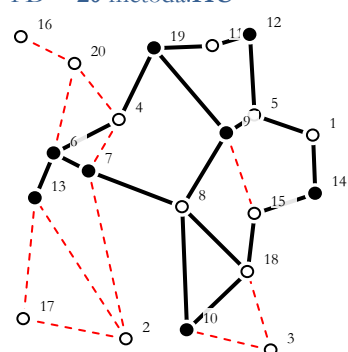
P-B 250: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 20 metoda:HN



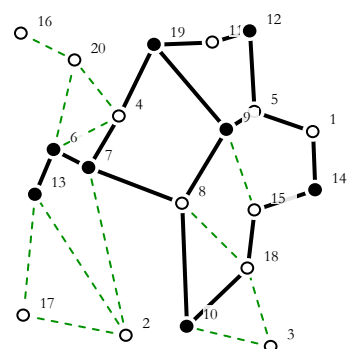
P-B 252: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 20 metoda:HU



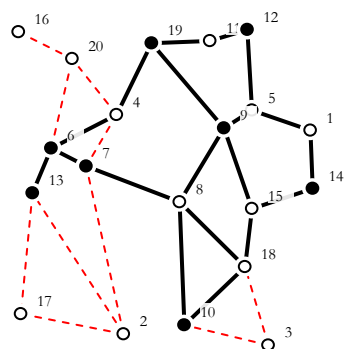
P-B 254: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 20 metoda:HO



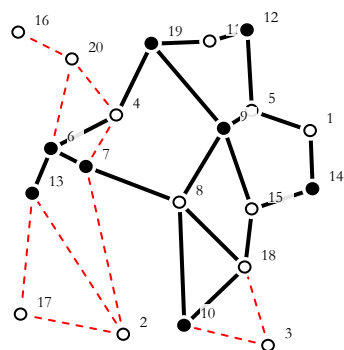
P-B 256: Sít' č. 6 pro $q = 1,2$ a

PD = 20 metoda:EM



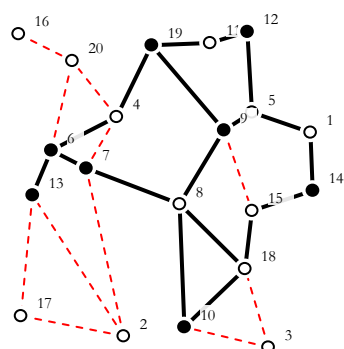
P-B 258: Sít' č. 6 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HN



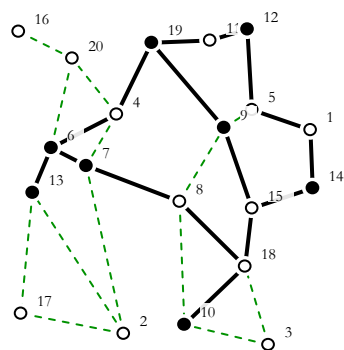
P-B 260: Sít' č. 6 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HU



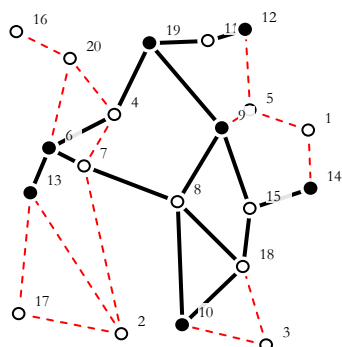
P-B 262: Sít' č. 6 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HO



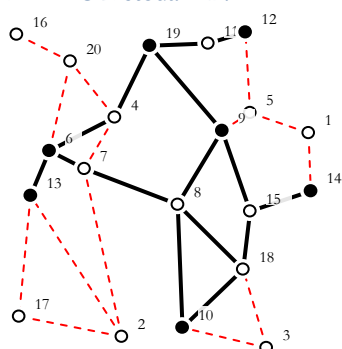
P-B 264: Sít' č. 6 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:EM



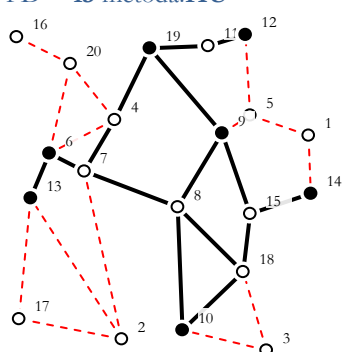
P-B 265: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:HN



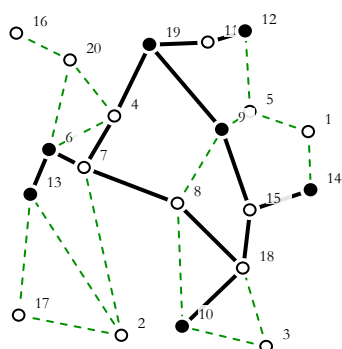
P-B 267: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:HU



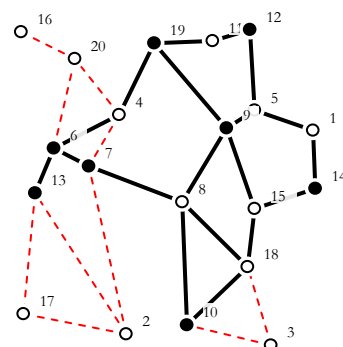
P-B 269: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:HO



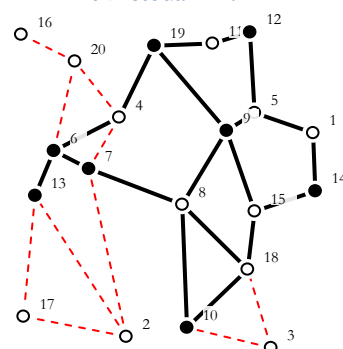
P-B 271: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:EM



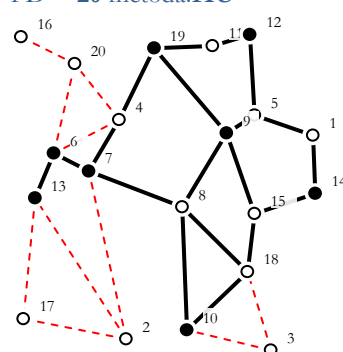
P-B 266: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:HN



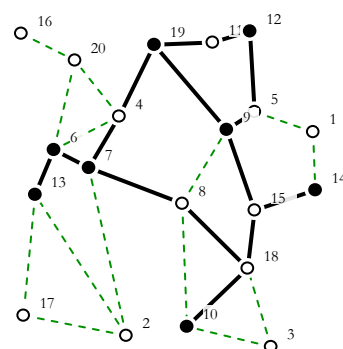
P-B 268: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:HU



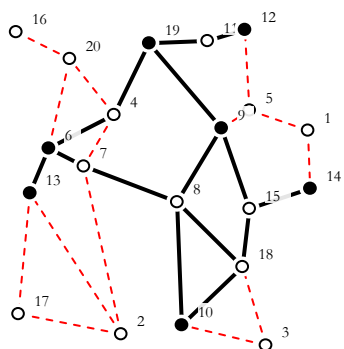
P-B 270: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:HO



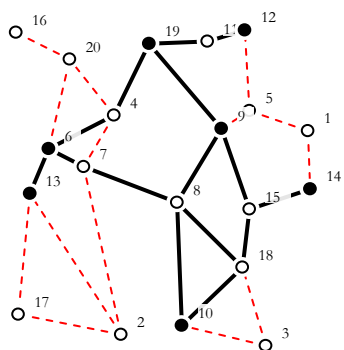
P-B 272: Síť č. 6 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:EM



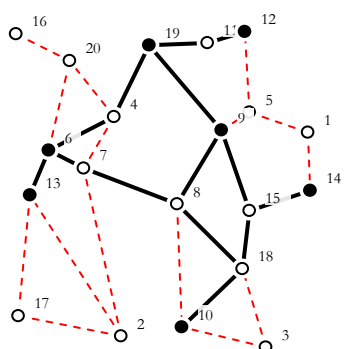
P-B 273: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



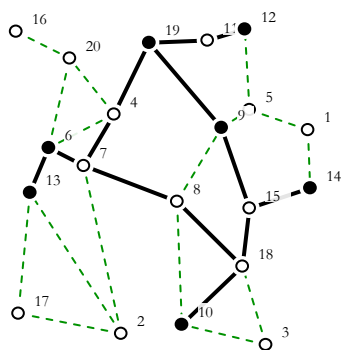
P-B 275: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



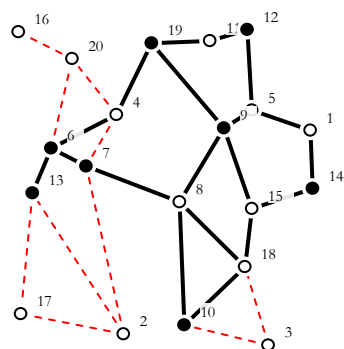
P-B 277: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



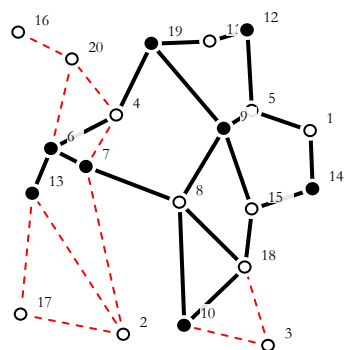
P-B 279: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



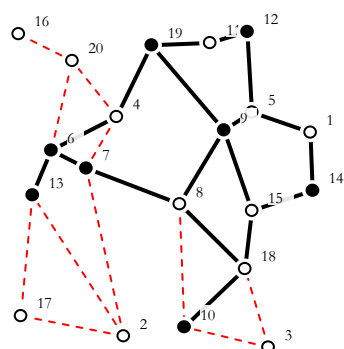
P-B 274: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



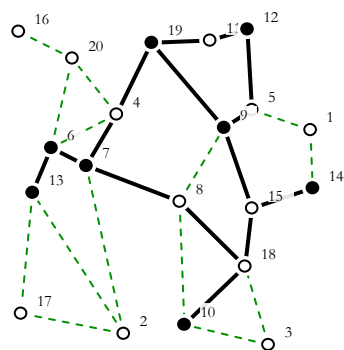
P-B 276: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



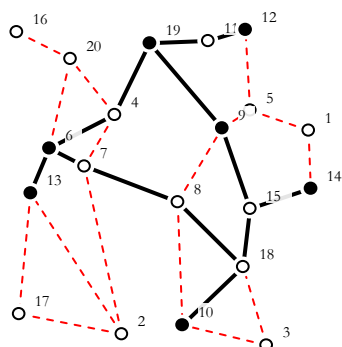
P-B 278: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO



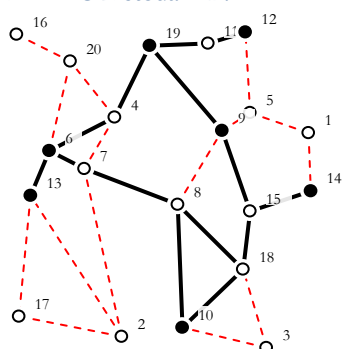
P-B 280: Sít' č. 6 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:EM



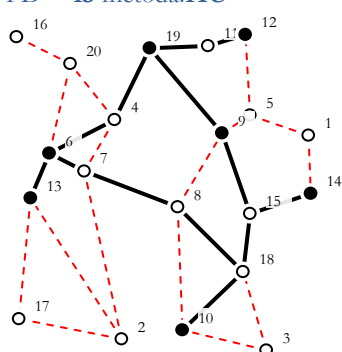
P-B 281: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

PD = 13 metoda:HN



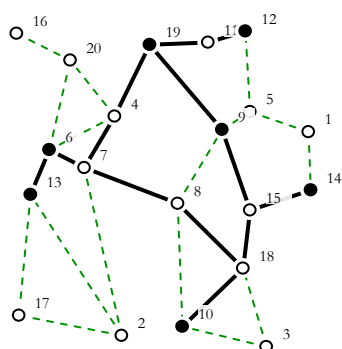
P-B 283: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

PD = 13 metoda:HU



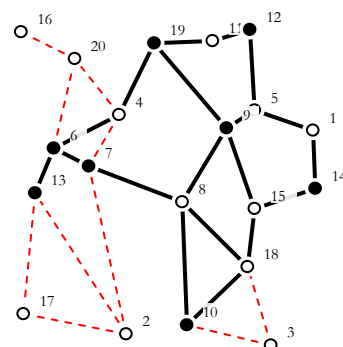
P-B 285: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

PD = 13 metoda:HO



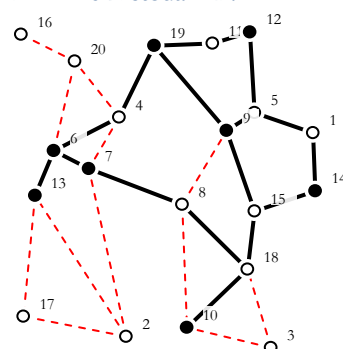
P-B 287: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

PD = 13 metoda:EM



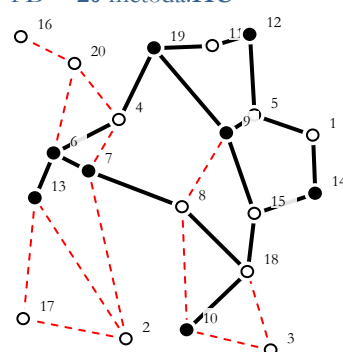
P-B 282: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

PD = 20 metoda:HN



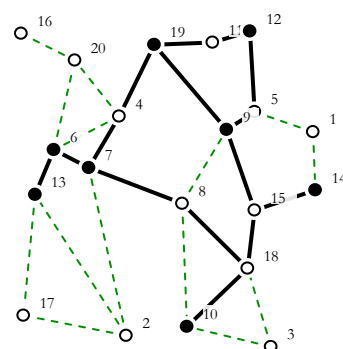
P-B 284: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

PD = 20 metoda:HU



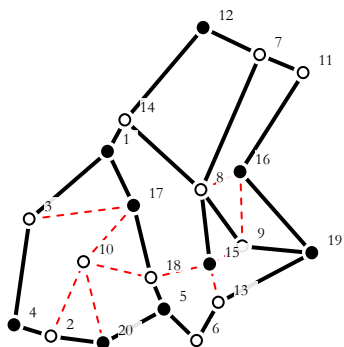
P-B 286: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

PD = 20 metoda:HO

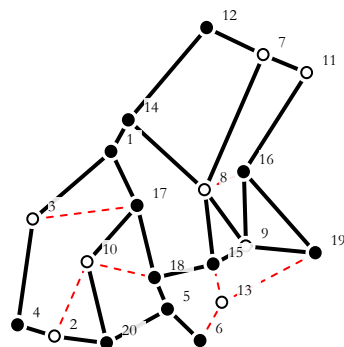


P-B 288: Sít' č. 6 pro $q = 1,6$ a

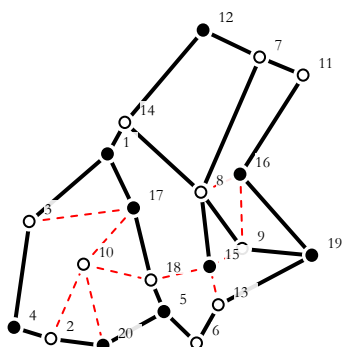
PD = 20 metoda:EM



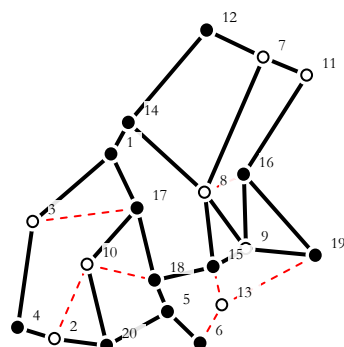
P-B 289: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:HN



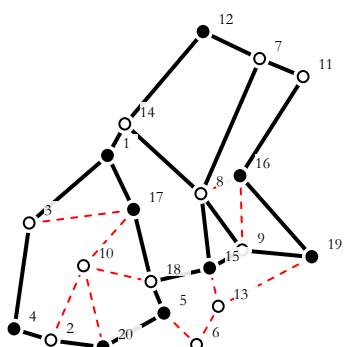
P-B 290: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HN



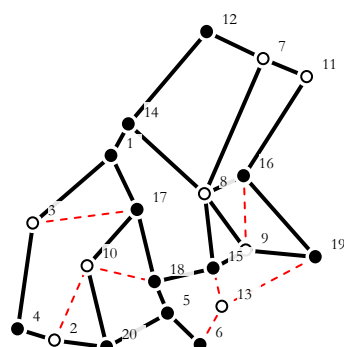
P-B 291: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:HU



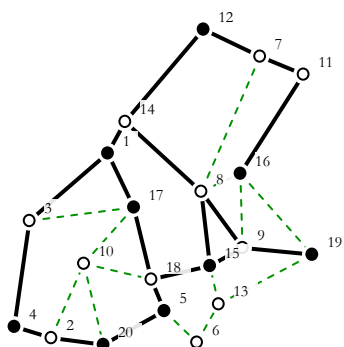
P-B 292: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HU



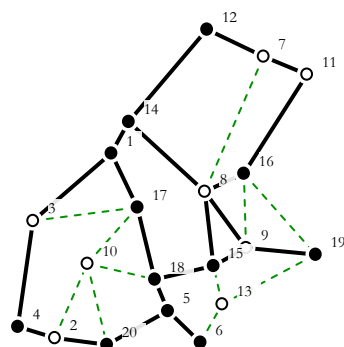
P-B 293: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:HO



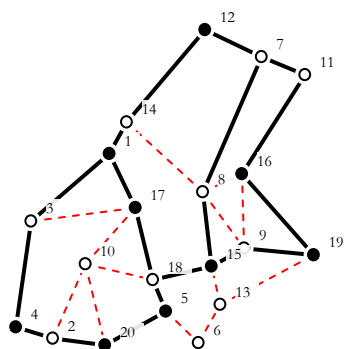
P-B 294: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HO



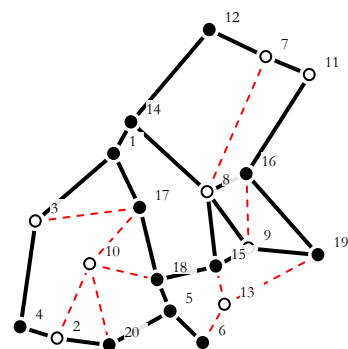
P-B 295: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 13 metoda:EM



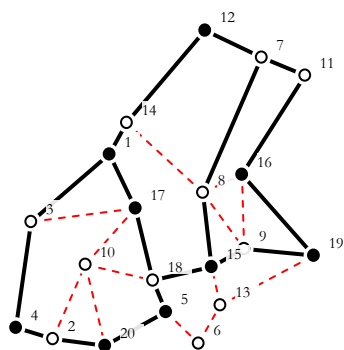
P-B 296: Sít' č. 7 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:EM



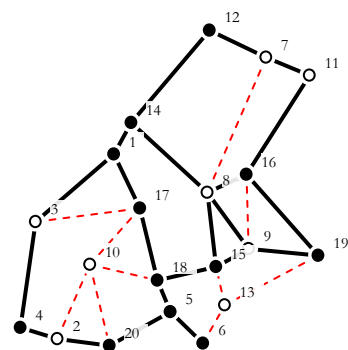
P-B 297: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



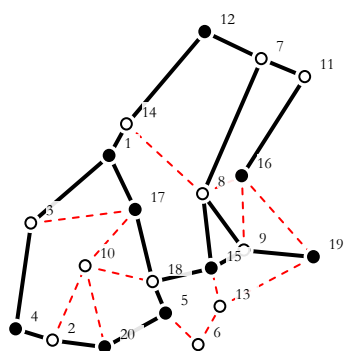
P-B 298: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



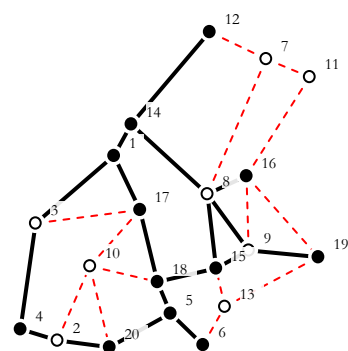
P-B 299: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



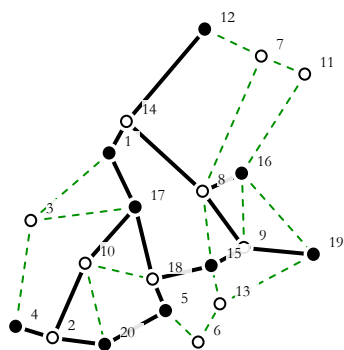
P-B 300: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



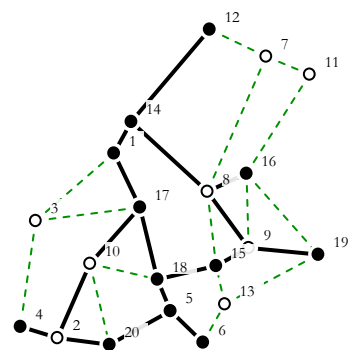
P-B 301: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



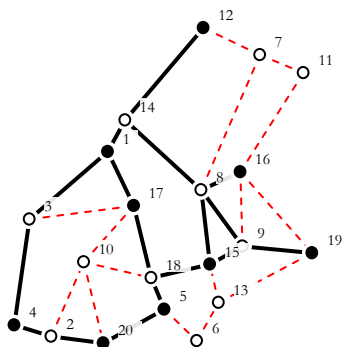
P-B 302: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO



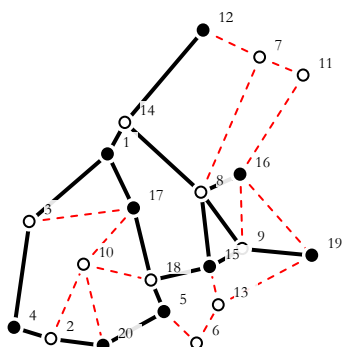
P-B 303: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



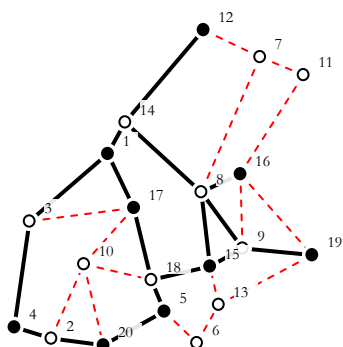
P-B 304: Sít' č. 7 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



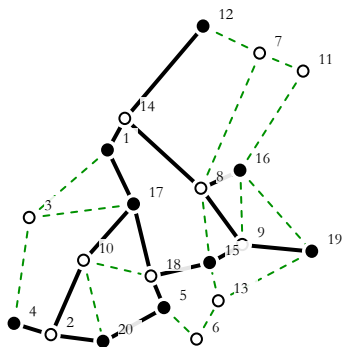
P-B 305: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HN



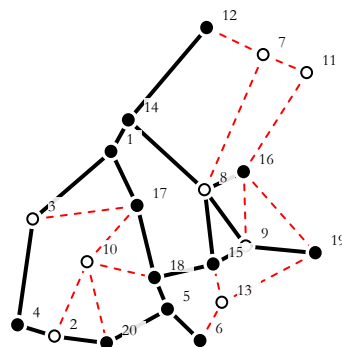
P-B 307: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HU



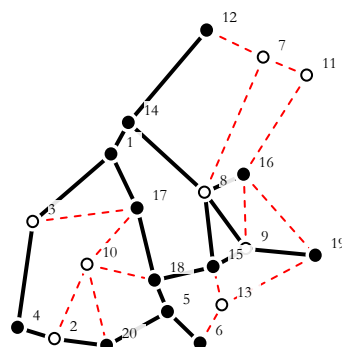
P-B 309: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:HO



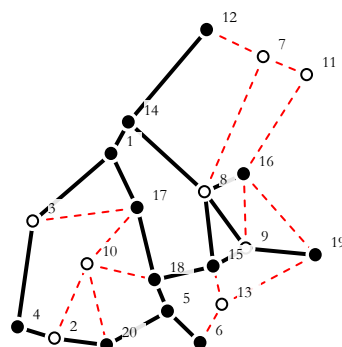
P-B 311: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 13 metoda:EM



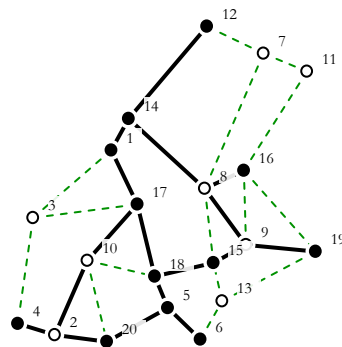
P-B 306: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HN



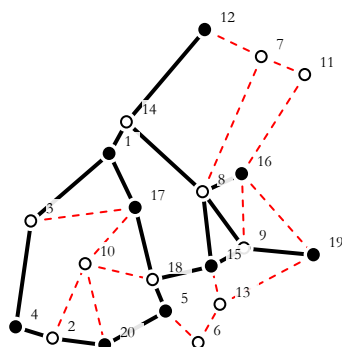
P-B 308: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HU



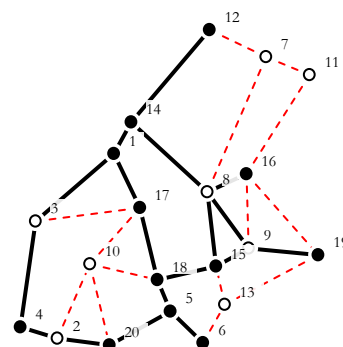
P-B 310: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HO



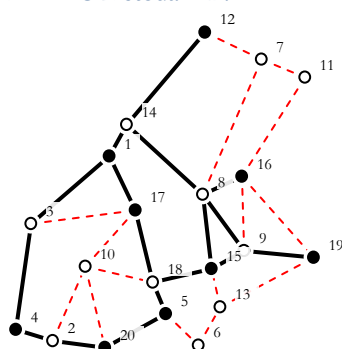
P-B 312: Sít' č. 7 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:EM



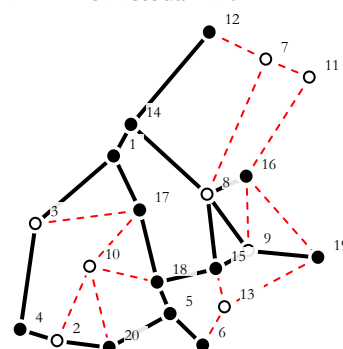
P-B 313: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



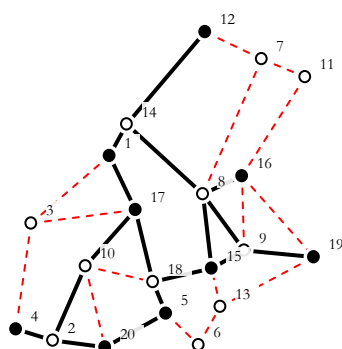
P-B 314: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



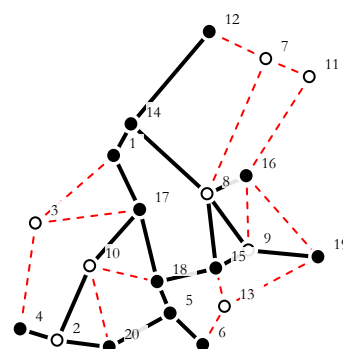
P-B 315: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HU



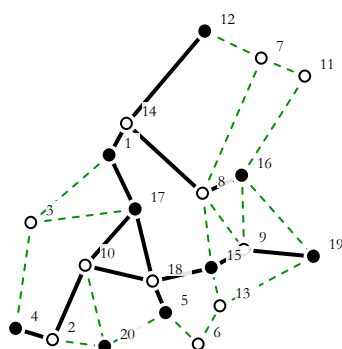
P-B 316: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU



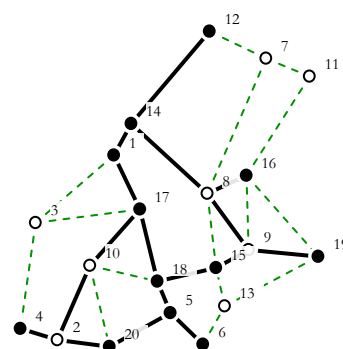
P-B 317: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



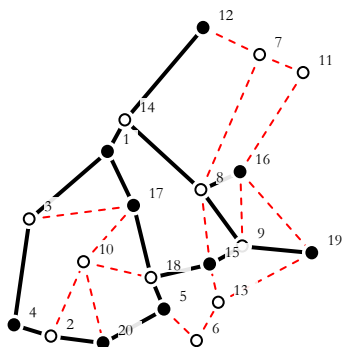
P-B 318: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO



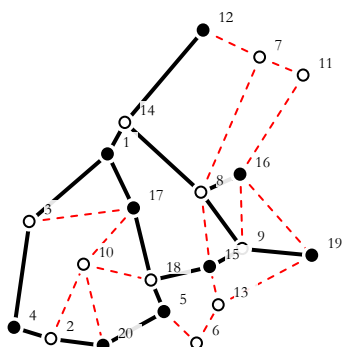
P-B 319: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



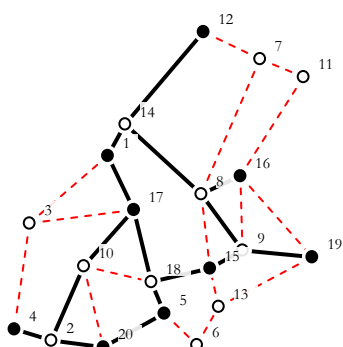
P-B 320: Síť č. 7 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



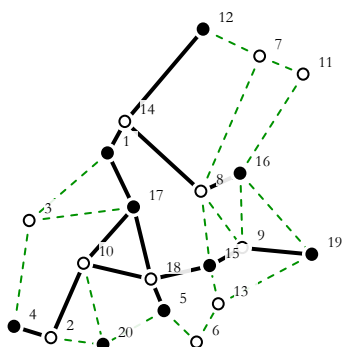
P-B 321: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:HN



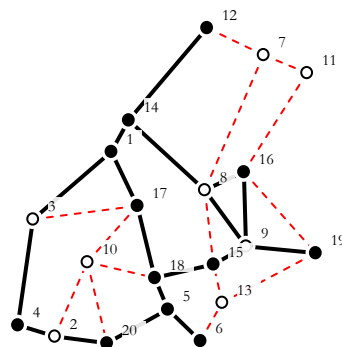
P-B 323: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:HU



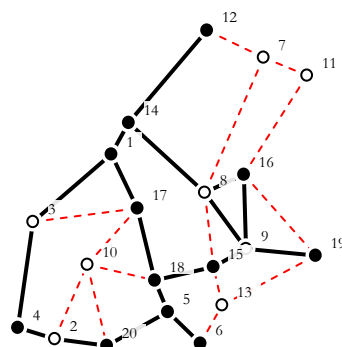
P-B 325: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:HO



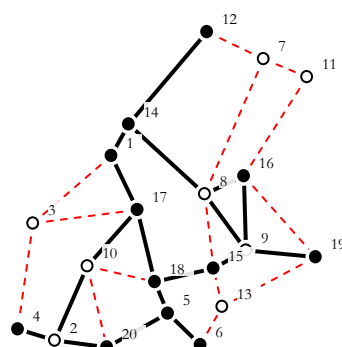
P-B 327: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 13 metoda:EM



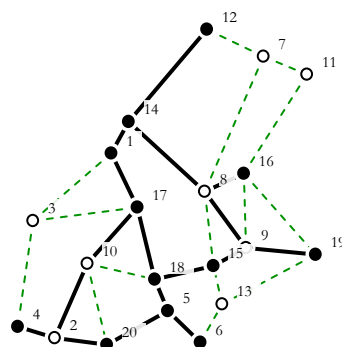
P-B 322: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:HN



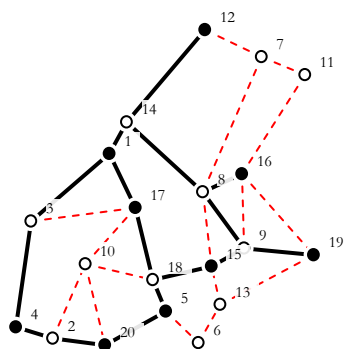
P-B 324: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:HU



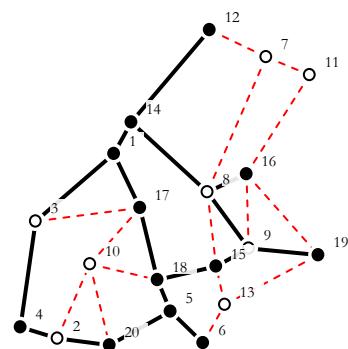
P-B 326: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:HO



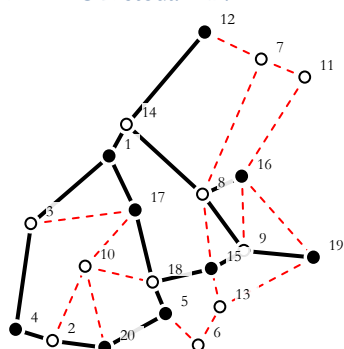
P-B 328: Sít' č. 7 pro $q = 1,5$ a
PD = 20 metoda:EM



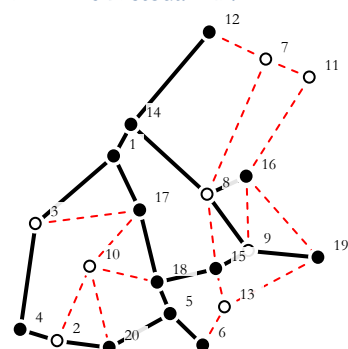
P-B 329: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



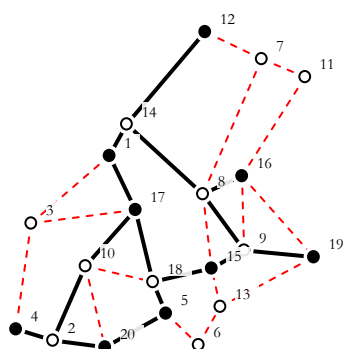
P-B 330: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



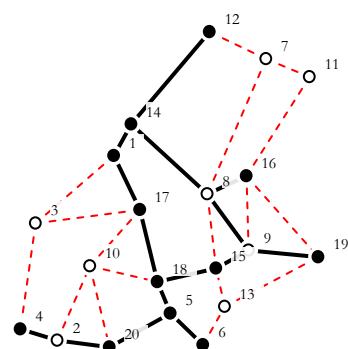
P-B 331: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



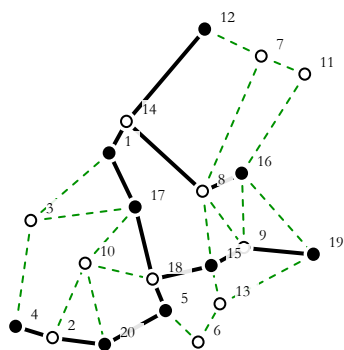
P-B 332: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



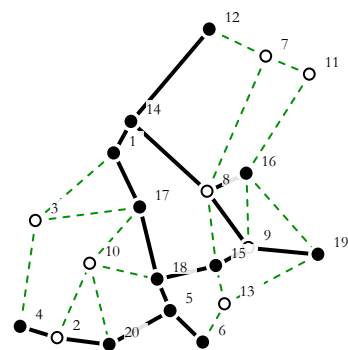
P-B 333: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO



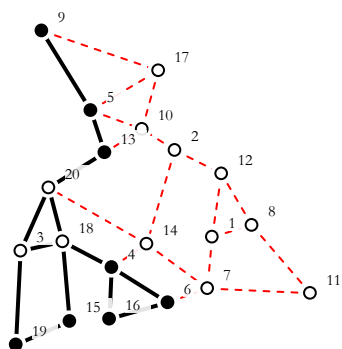
P-B 334: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HO



P-B 335: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM

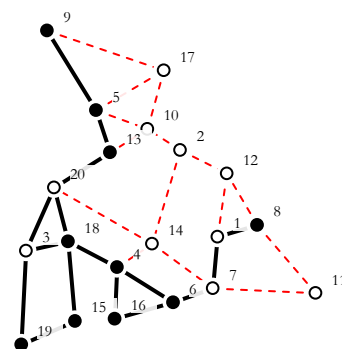


P-B 336: Síť č. 7 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



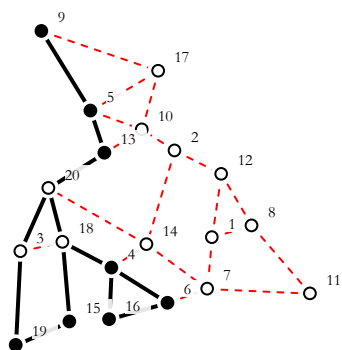
P-B 337: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HN



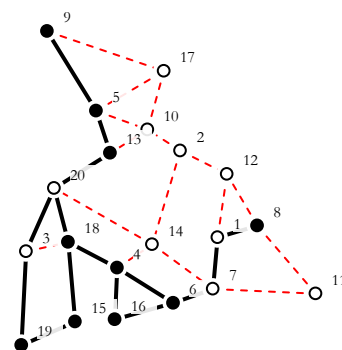
P-B 338: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HN



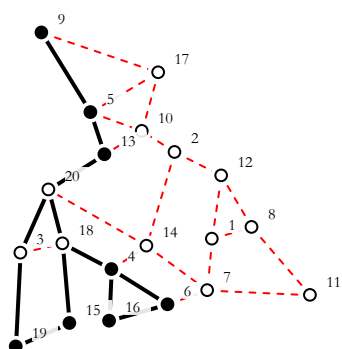
P-B 339: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HU



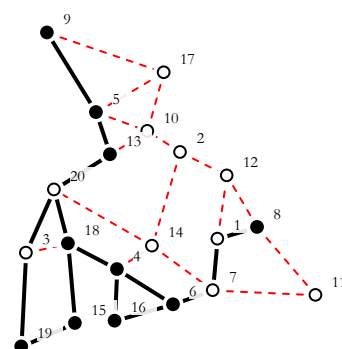
P-B 340: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HU



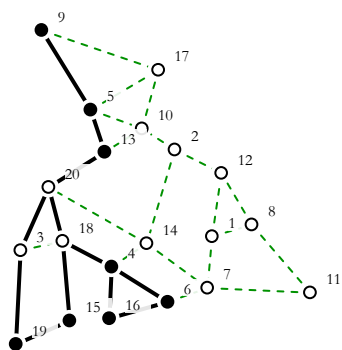
P-B 341: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HO



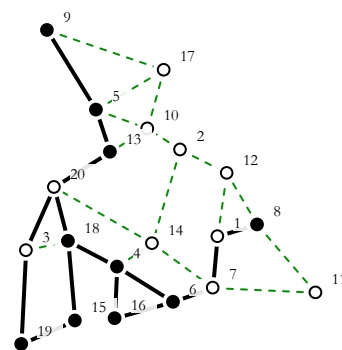
P-B 342: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HO



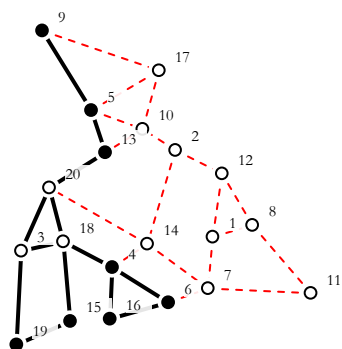
P-B 343: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:EM

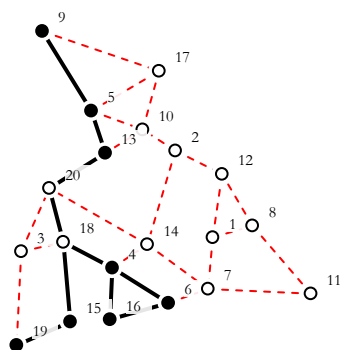


P-B 344: Sít' č. 8 pro $q = 1,1$ a

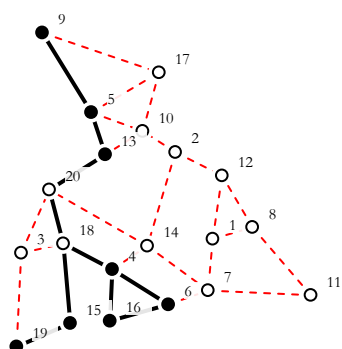
PD = 20 metoda:EM



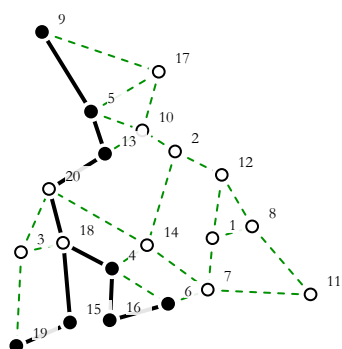
P-B 345: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



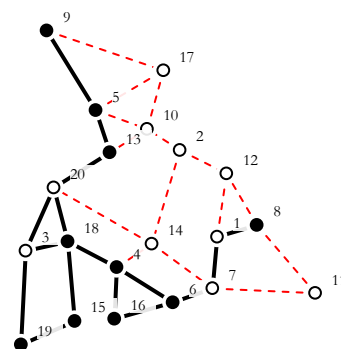
P-B 347: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



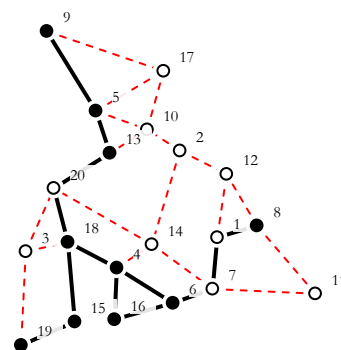
P-B 349: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



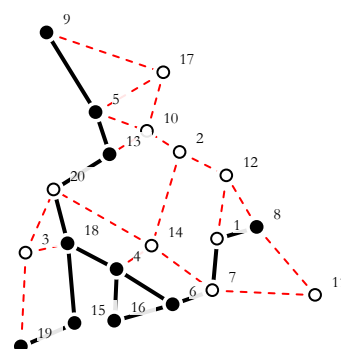
P-B 351: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



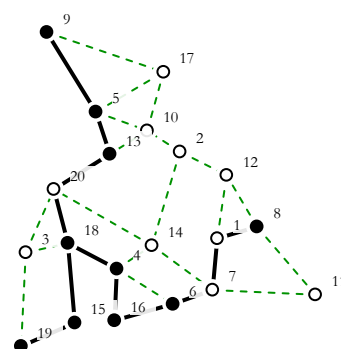
P-B 346: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



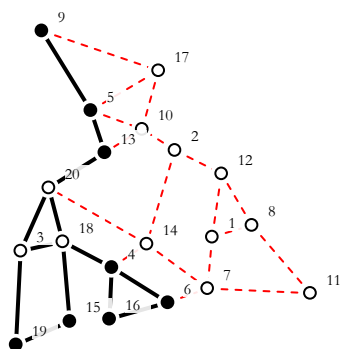
P-B 348: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 350: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO

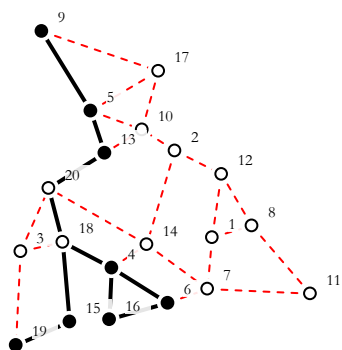


P-B 352: Sít' č. 8 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



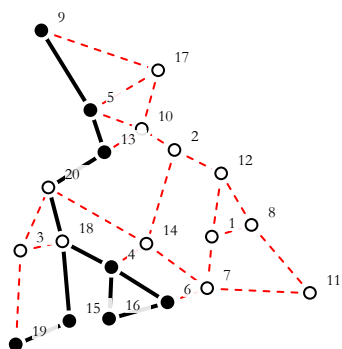
P-B 353: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HN



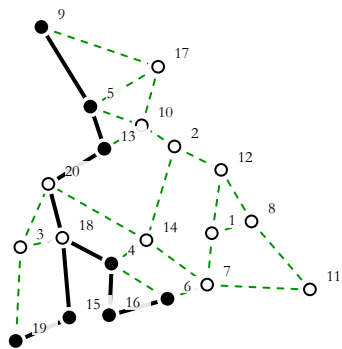
P-B 355: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HU



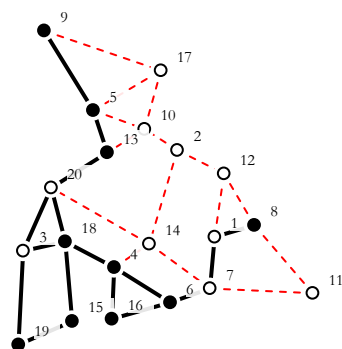
P-B 357: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HO



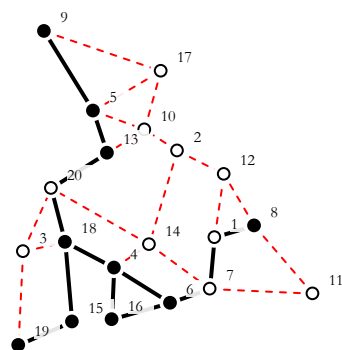
P-B 359: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:EM



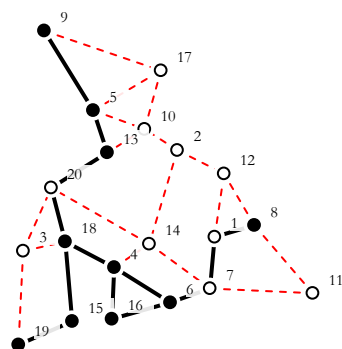
P-B 354: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HN



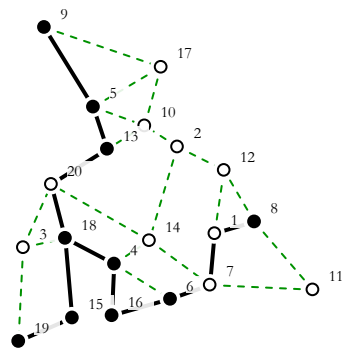
P-B 356: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HU



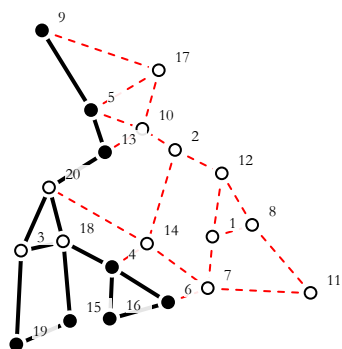
P-B 358: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HO



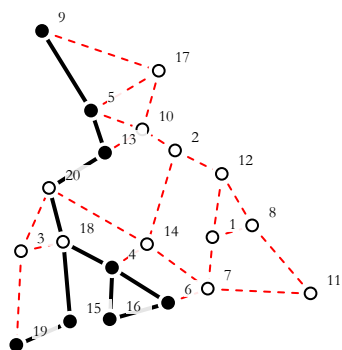
P-B 360: Sít' č. 8 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:EM



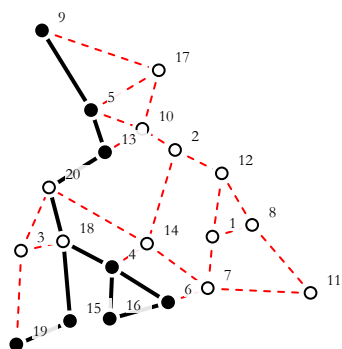
P-B 361: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:HN



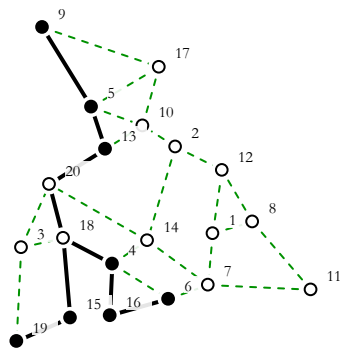
P-B 363: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:HU



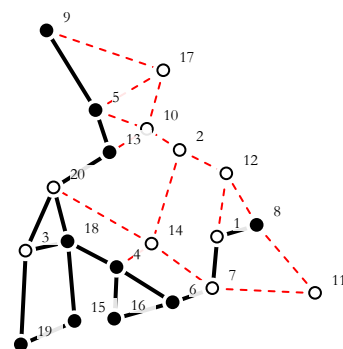
P-B 365: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:HO



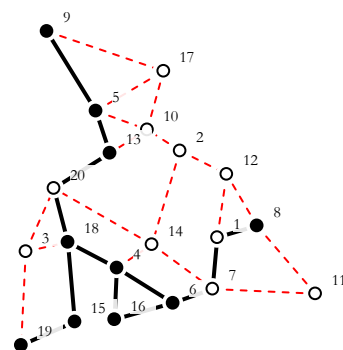
P-B 367: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 13 metoda:EM



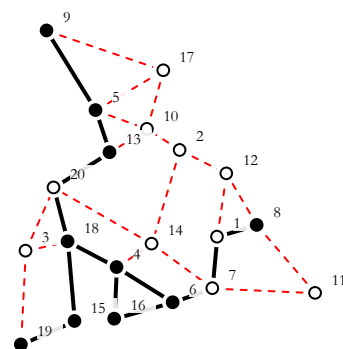
P-B 362: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:HN



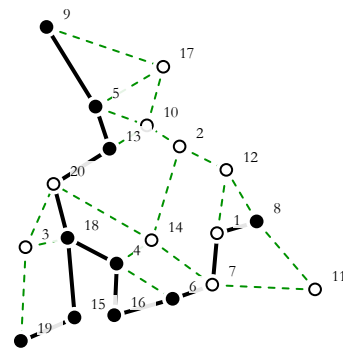
P-B 364: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:HU



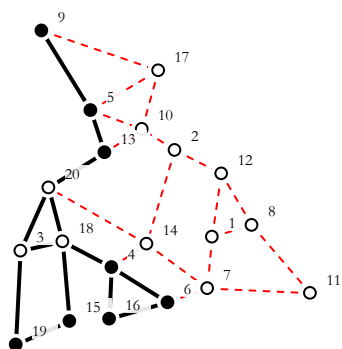
P-B 366: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:HO



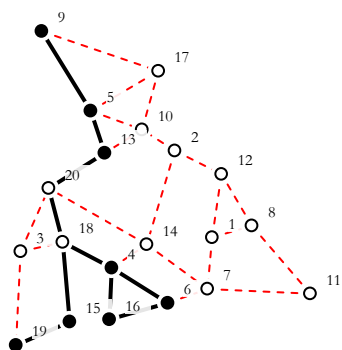
P-B 368: Sít' č. 8 pro $q = 1,4$ a

PD = 20 metoda:EM



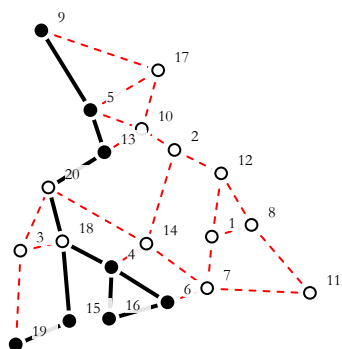
P-B 369: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



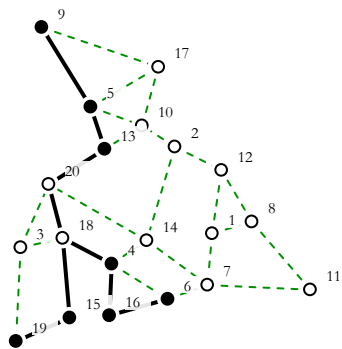
P-B 371: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



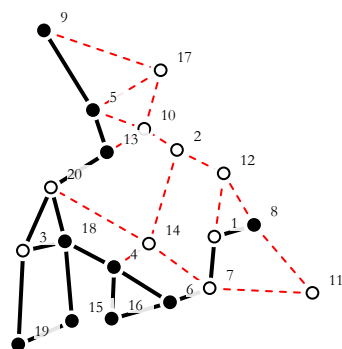
P-B 373: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



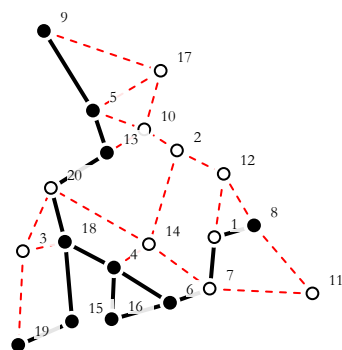
P-B 375: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



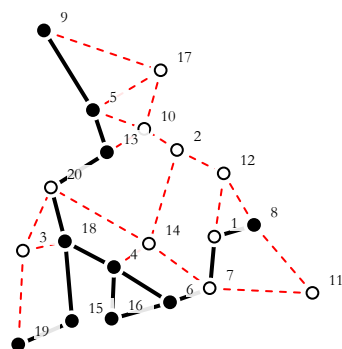
P-B 370: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



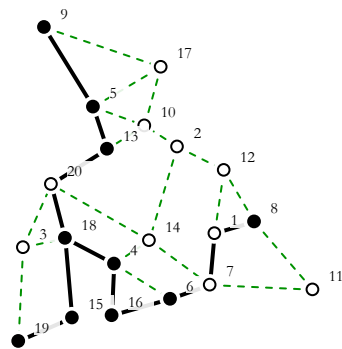
P-B 372: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



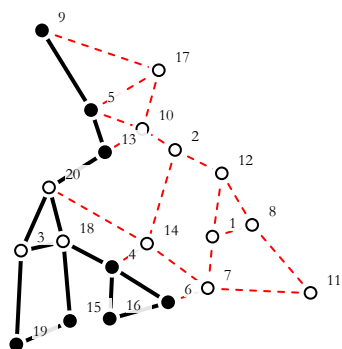
P-B 374: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO

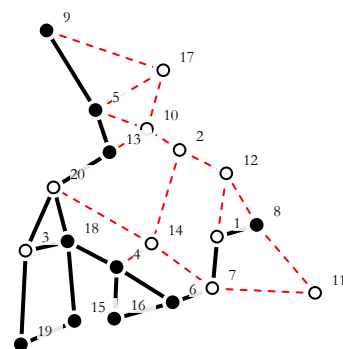


P-B 376: Sít' č. 8 pro $q = 1,5$ a

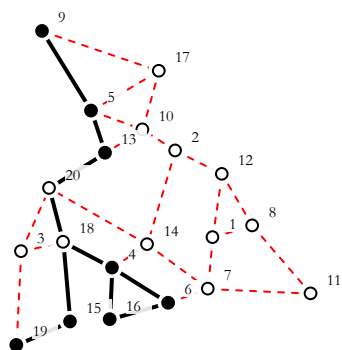
PD = 20 metoda:EM



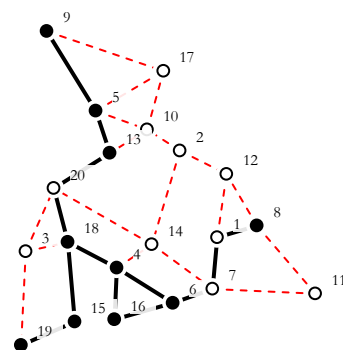
P-B 377: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



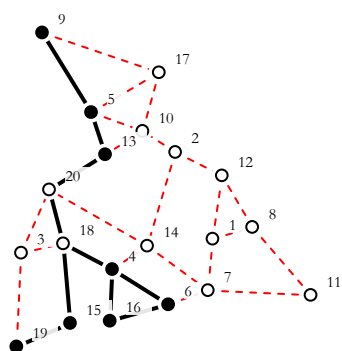
P-B 378: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



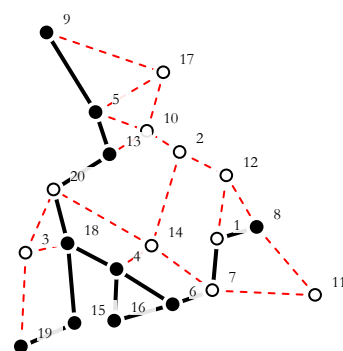
P-B 379: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



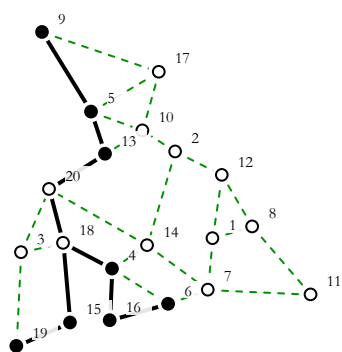
P-B 380: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



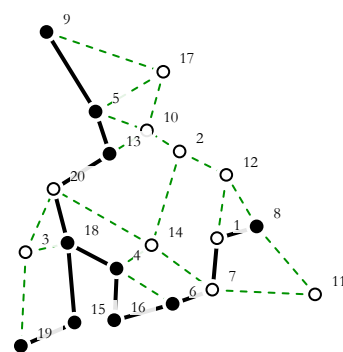
P-B 381: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO



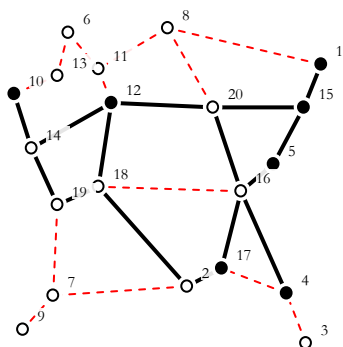
P-B 382: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HO



P-B 383: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM

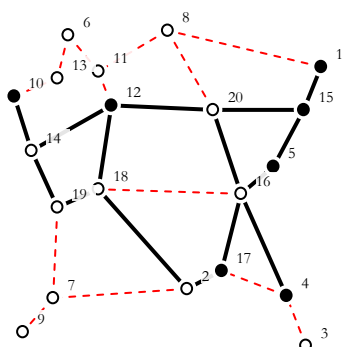


P-B 384: Sít' č. 8 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



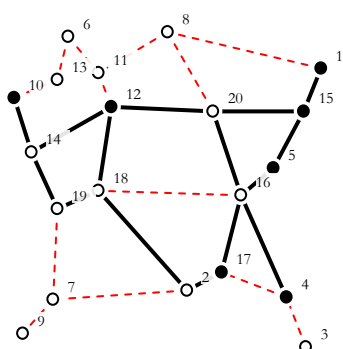
P-B 385: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HN



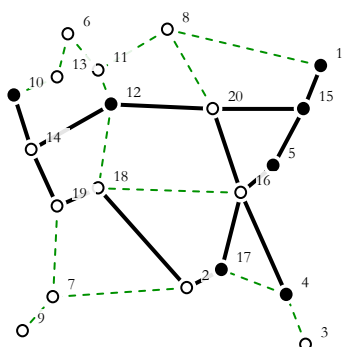
P-B 387: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HU



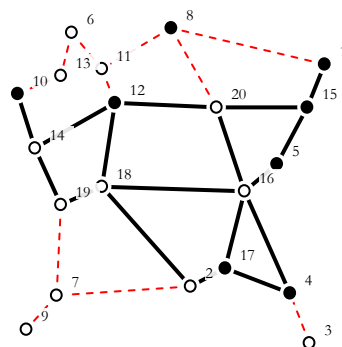
P-B 389: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HO



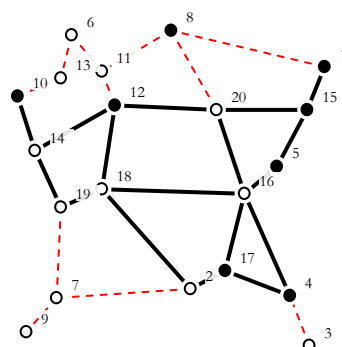
P-B 391: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:EM



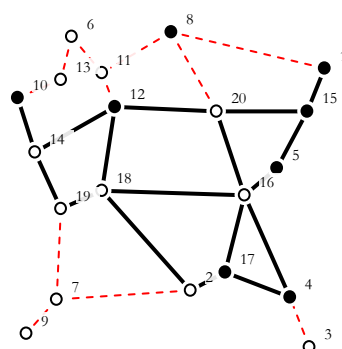
P-B 386: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HN



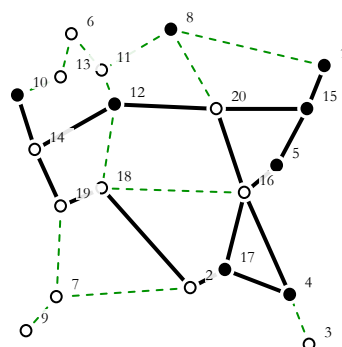
P-B 388: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HU



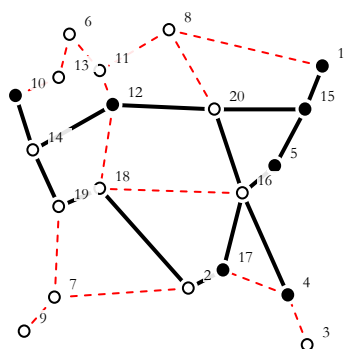
P-B 390: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HO

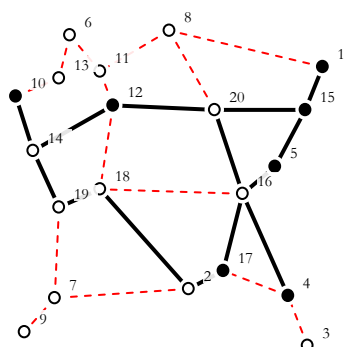


P-B 392: Sít' č. 9 pro $q = 1,1$ a

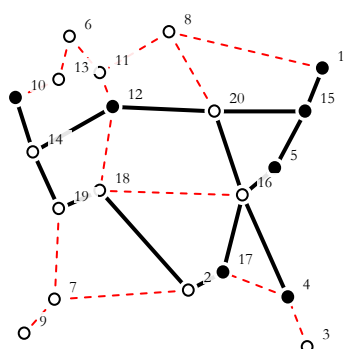
PD = 20 metoda:EM



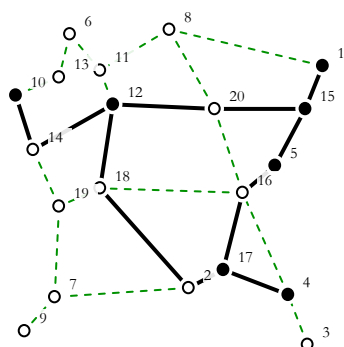
P-B 393: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



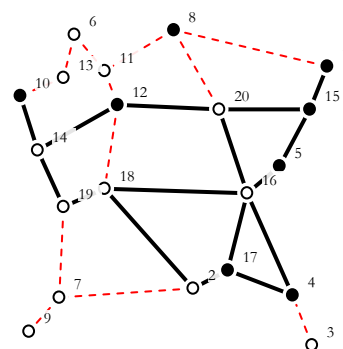
P-B 395: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



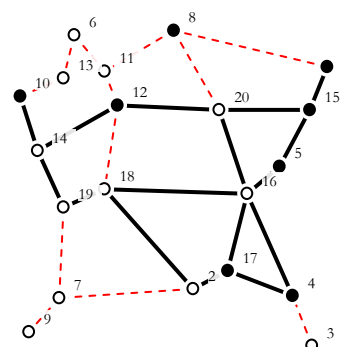
P-B 397: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



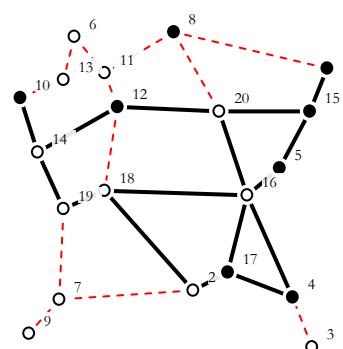
P-B 399: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



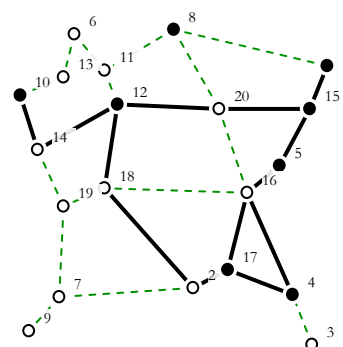
P-B 394: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



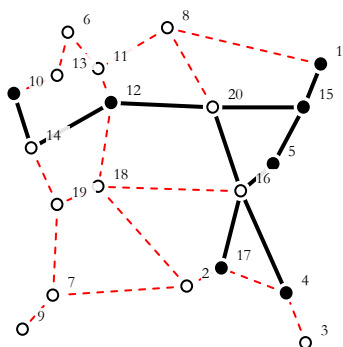
P-B 396: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 398: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO

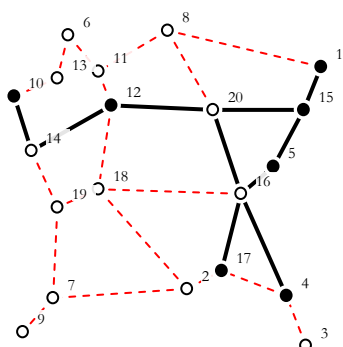


P-B 400: Síť č. 9 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



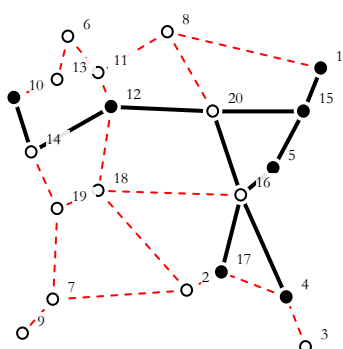
P-B 401: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HN



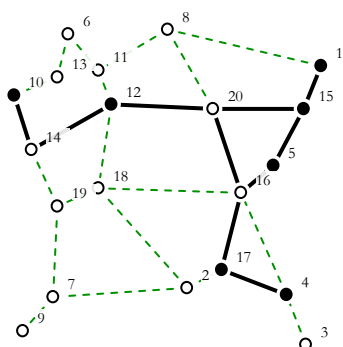
P-B 403: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HU



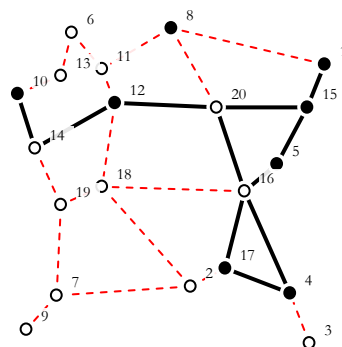
P-B 405: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HO



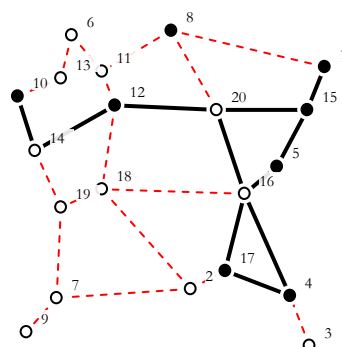
P-B 407: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:EM



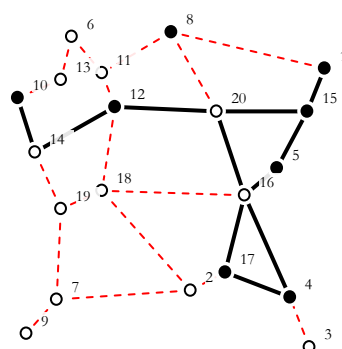
P-B 402: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HN



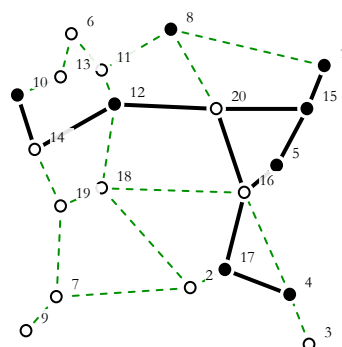
P-B 404: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HU



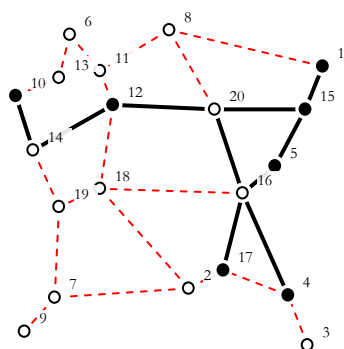
P-B 406: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HO

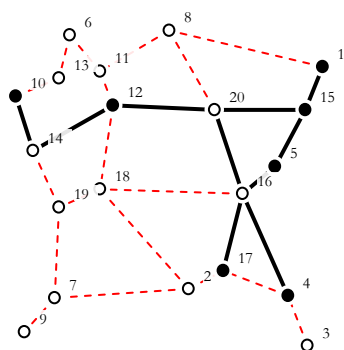


P-B 408: Sít' č. 9 pro $q = 1,3$ a

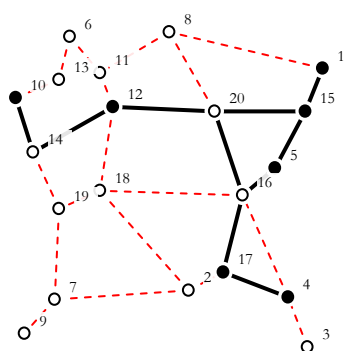
PD = 20 metoda:EM



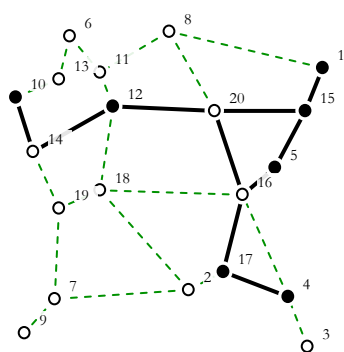
P-B 409: Sít' č. 9 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



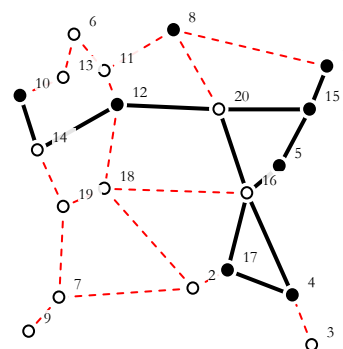
P-B 411: Sít' č. 9 pro $q = 1,4$ a $PD = 13$ metoda:HU



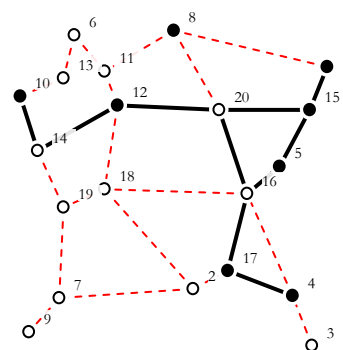
P-B 413: Síť č. 9 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



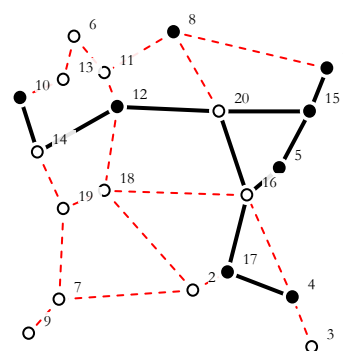
P-B 415: Sít' č. 9 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



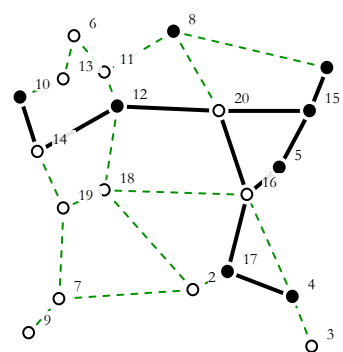
P-B 410: Sít' č. 9 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



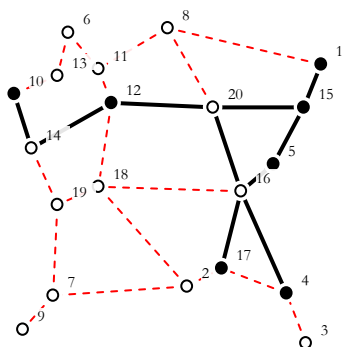
P-B 412: Síť č. 9 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda: HU



P-B 414: Síť č. 9 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda: **HO**

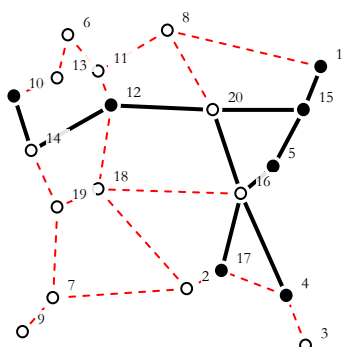


**P-B 416: Sít' č. 9 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM**



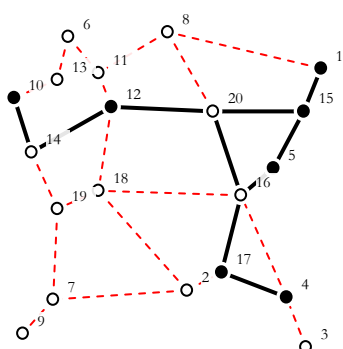
P-B 417: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



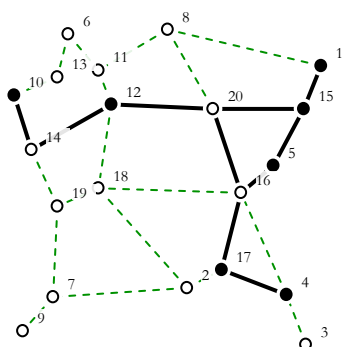
P-B 419: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



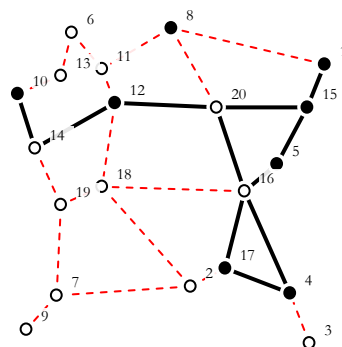
P-B 421: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



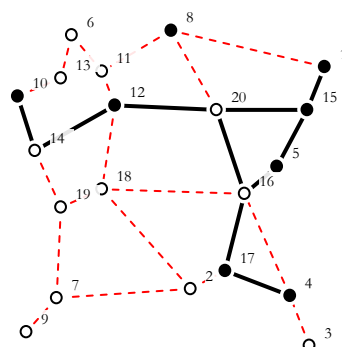
P-B 423: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



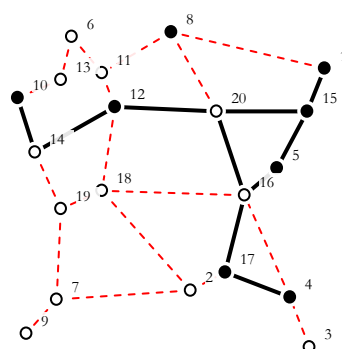
P-B 418: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



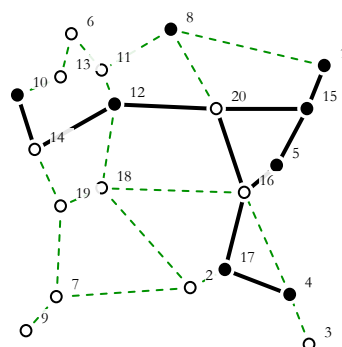
P-B 420: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



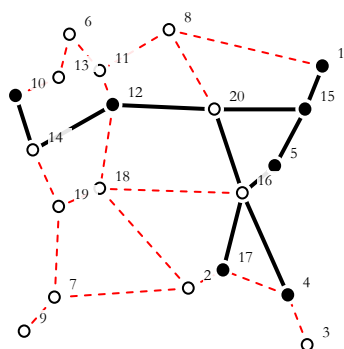
P-B 422: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO

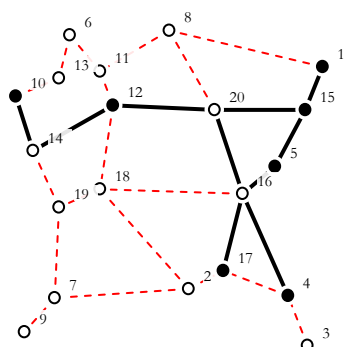


P-B 424: Sít' č. 9 pro $q = 1,5$ a

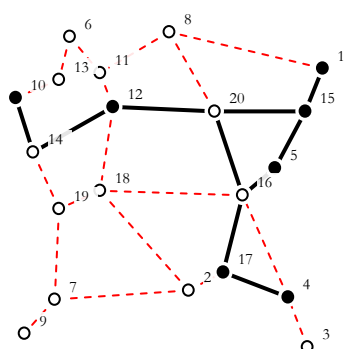
PD = 20 metoda:EM



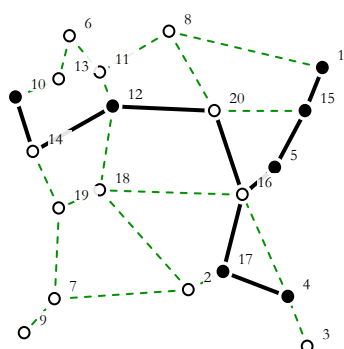
P-B 425: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



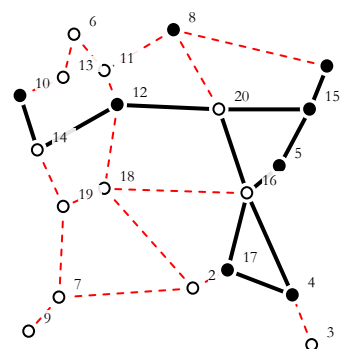
P-B 427: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



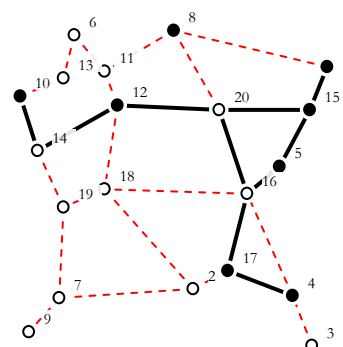
P-B 429: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO



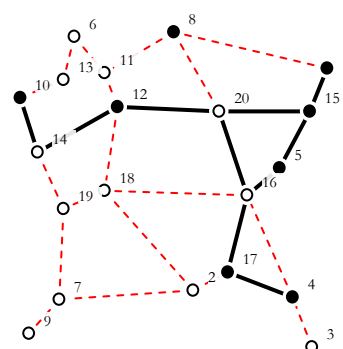
P-B 431: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM



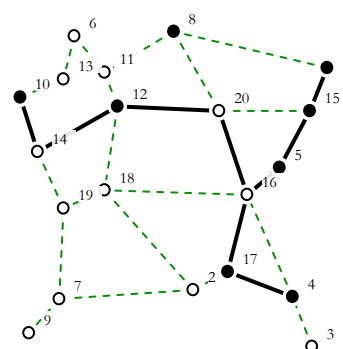
P-B 426: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



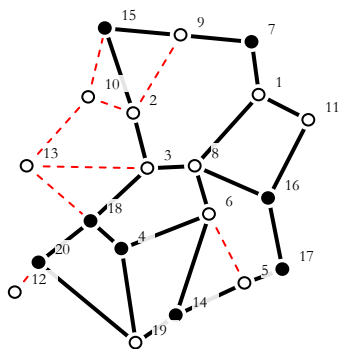
P-B 428: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 430: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HO

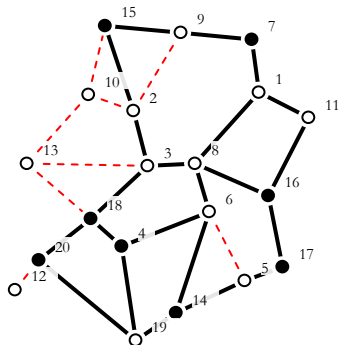


P-B 432: Sít' č. 9 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



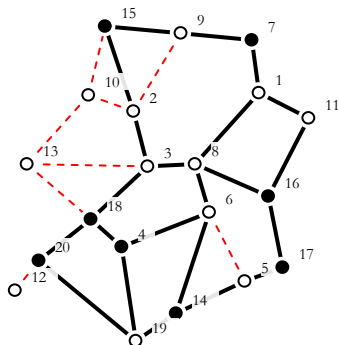
P-B 433: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HN



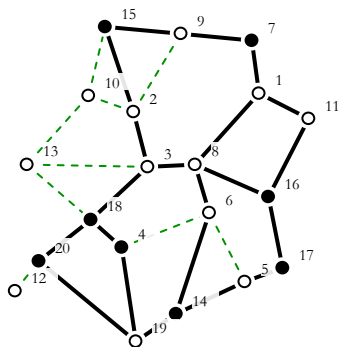
P-B 435: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HU



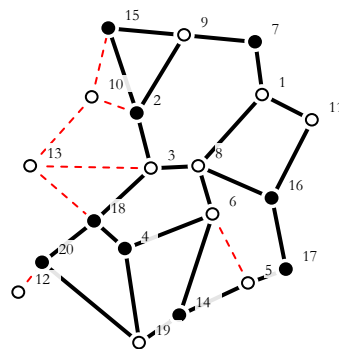
P-B 437: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:HO



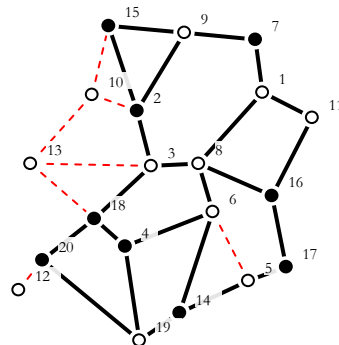
P-B 439: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

PD = 13 metoda:EM



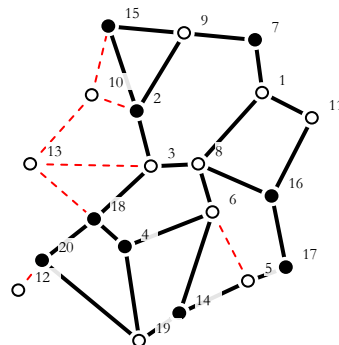
P-B 434: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HN



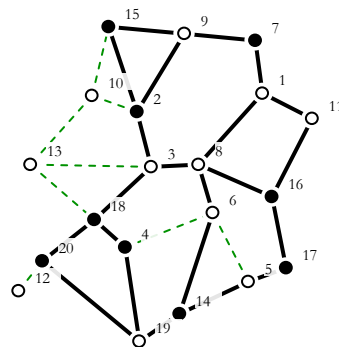
P-B 436: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HU



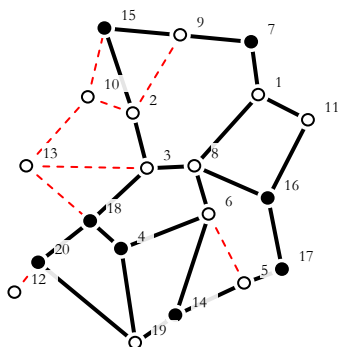
P-B 438: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

PD = 20 metoda:HO

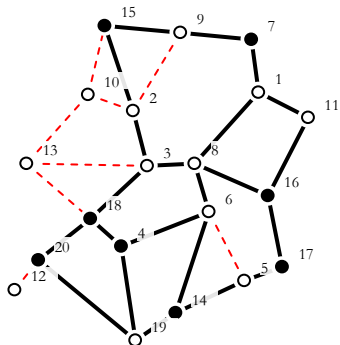


P-B 440: Síť č. 10 pro $q = 1,1$ a

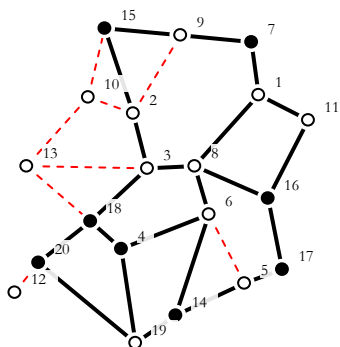
PD = 20 metoda:EM



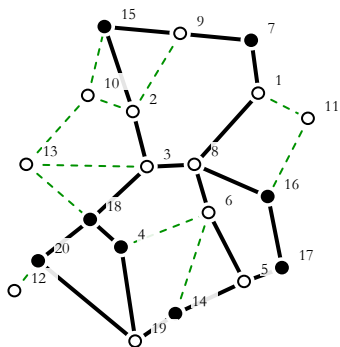
P-B 441: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HN



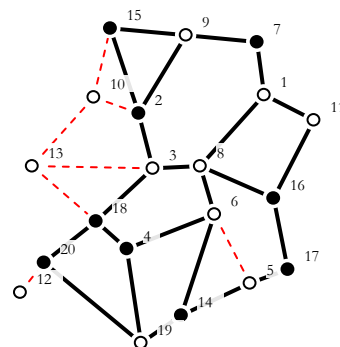
P-B 443: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HU



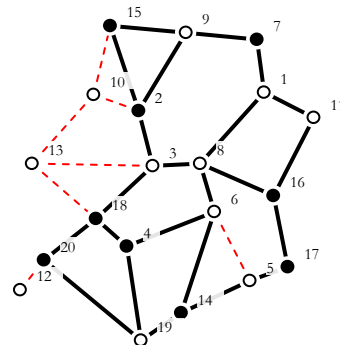
P-B 445: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:HO



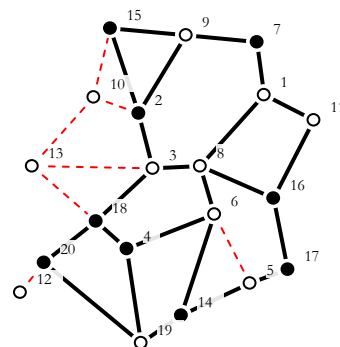
P-B 447: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 13 metoda:EM



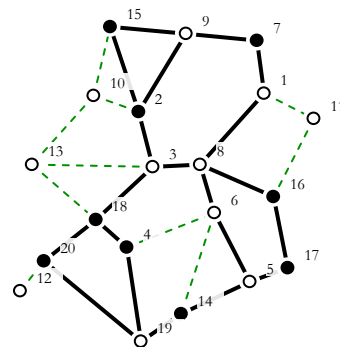
P-B 442: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



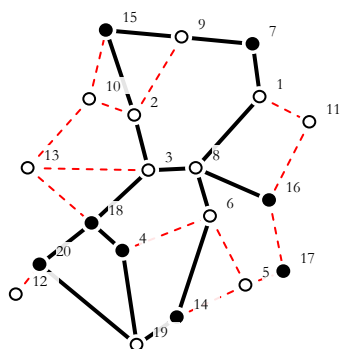
P-B 444: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 446: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO

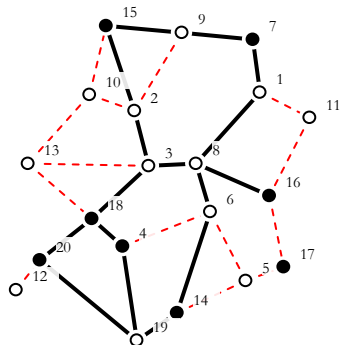


P-B 448: Sít' č. 10 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



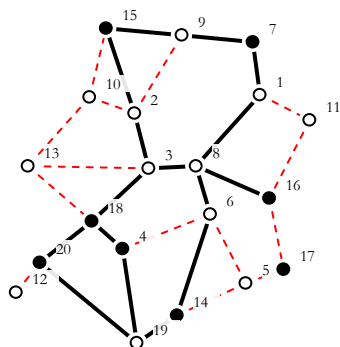
P-B 449: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HN



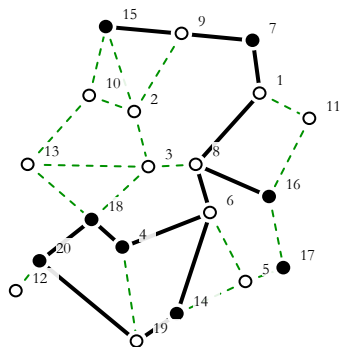
P-B 451: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HU



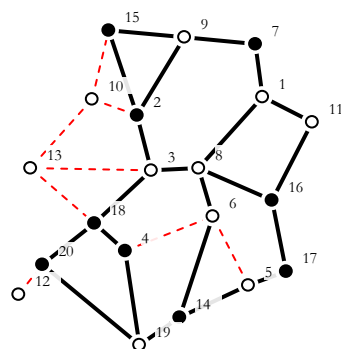
P-B 453: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:HO



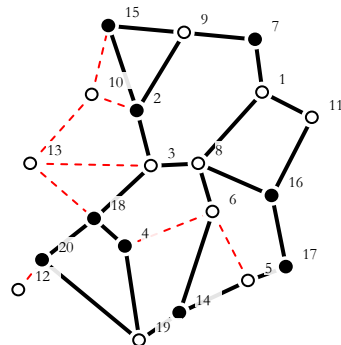
P-B 455: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

PD = 13 metoda:EM



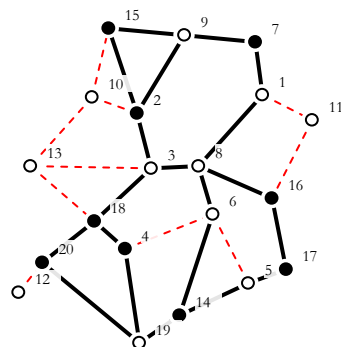
P-B 450: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HN



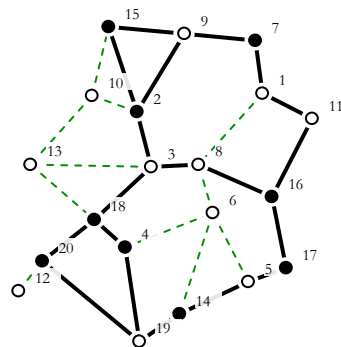
P-B 452: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HU



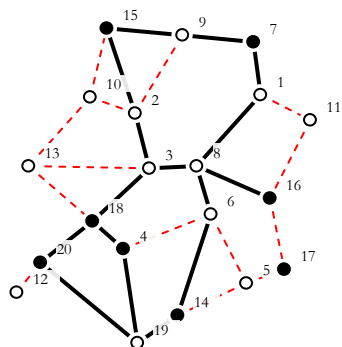
P-B 454: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

PD = 20 metoda:HO

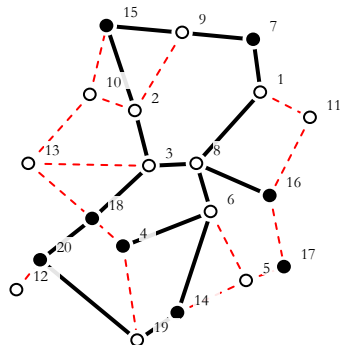


P-B 456: Síť č. 10 pro $q = 1,3$ a

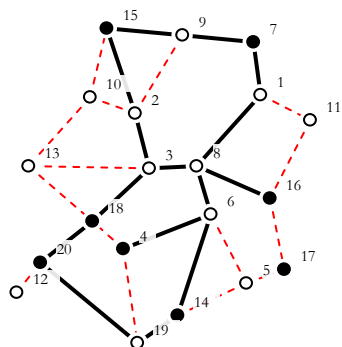
PD = 20 metoda:EM



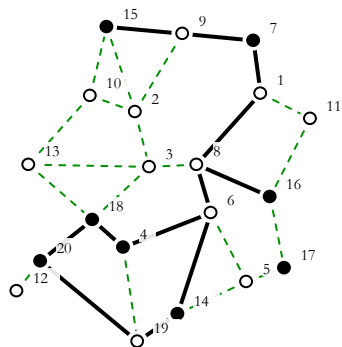
P-B 457: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HN



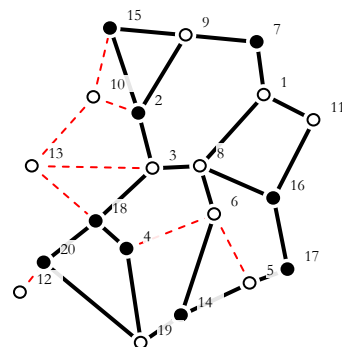
P-B 459: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HU



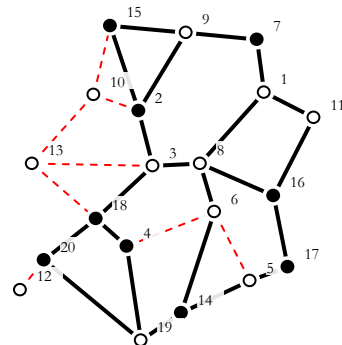
P-B 461: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:HO



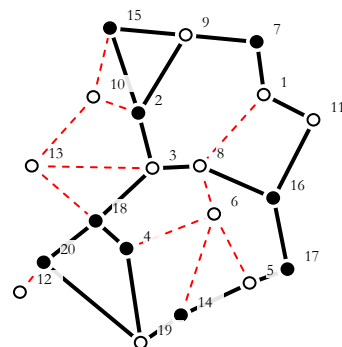
P-B 463: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 13 metoda:EM



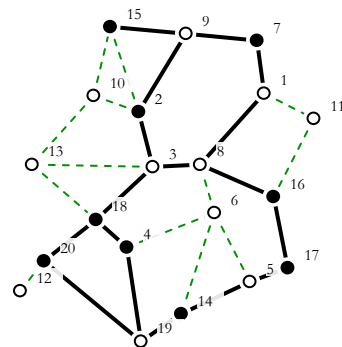
P-B 458: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



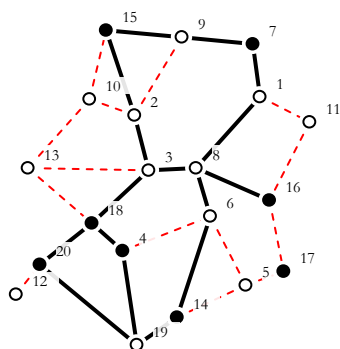
P-B 460: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU



P-B 462: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO

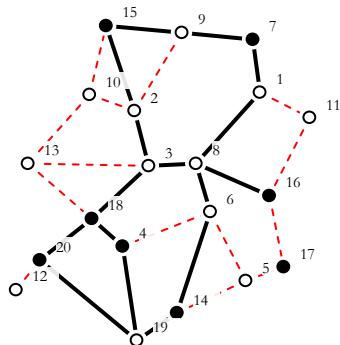


P-B 464: Síť č. 10 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



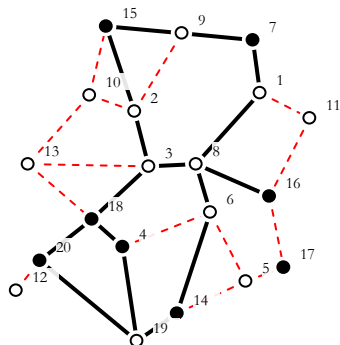
P-B 465: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HN



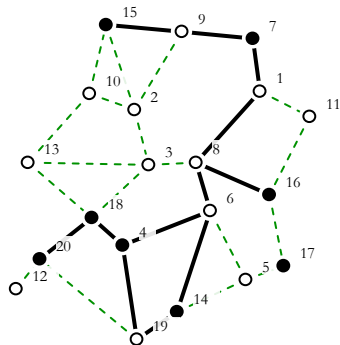
P-B 467: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HU



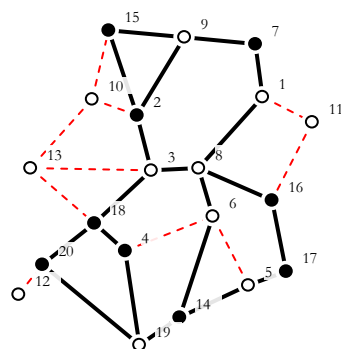
P-B 469: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:HO



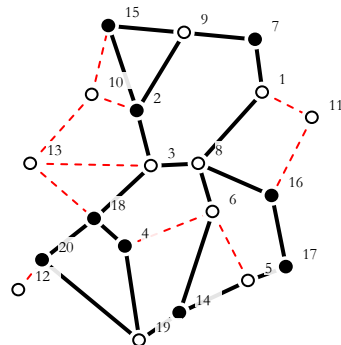
P-B 471: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

PD = 13 metoda:EM



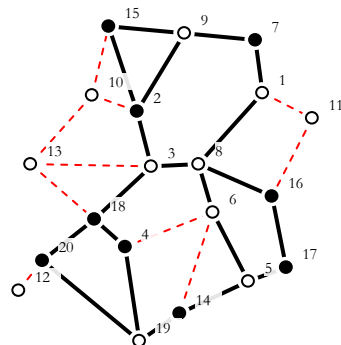
P-B 466: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



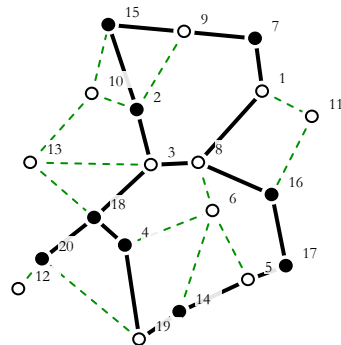
P-B 468: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



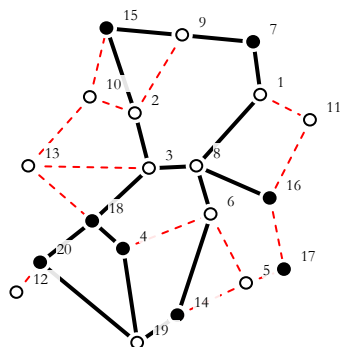
P-B 470: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO

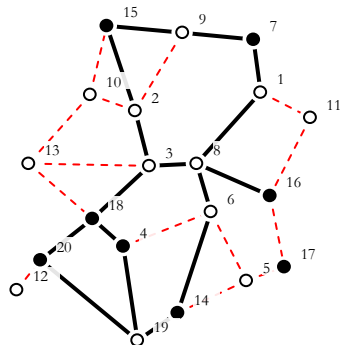


P-B 472: Síť č. 10 pro $q = 1,5$ a

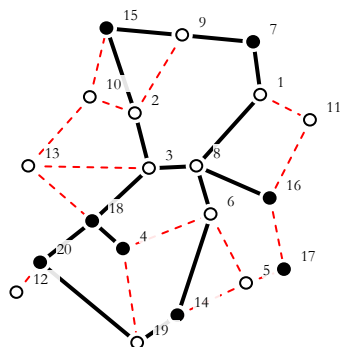
PD = 20 metoda:EM



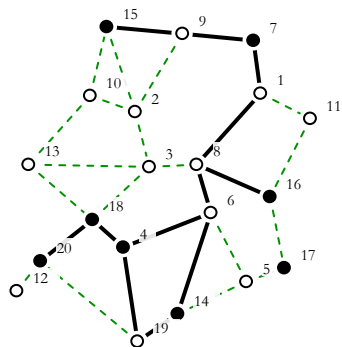
P-B 473: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HN



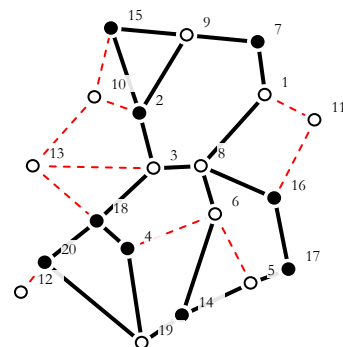
P-B 475: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HU



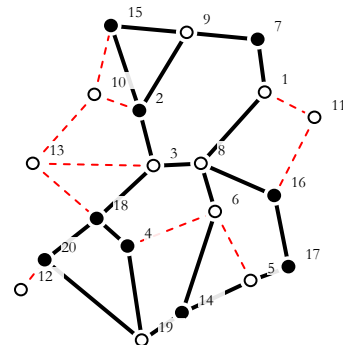
P-B 477: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:HO



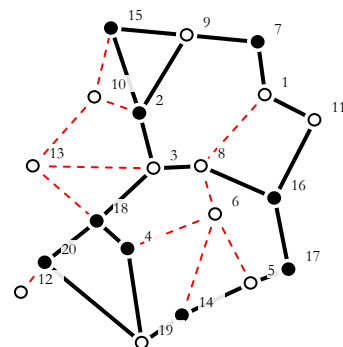
P-B 479: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 13 metoda:EM



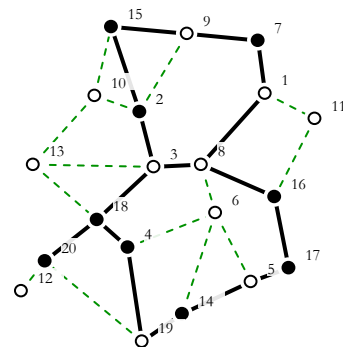
P-B 474: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HN



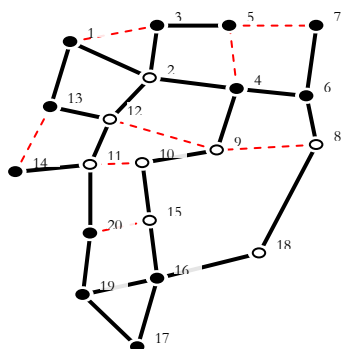
P-B 476: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HU



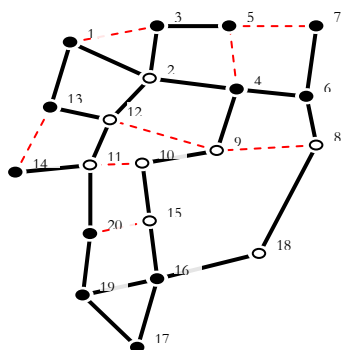
P-B 478: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:HO



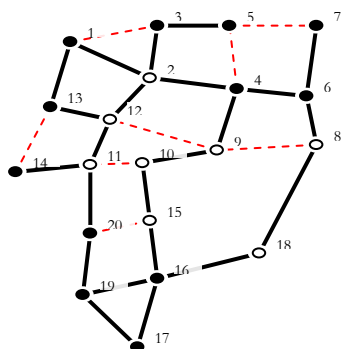
P-B 480: Sít' č. 10 pro $q = 1,6$ a
PD = 20 metoda:EM



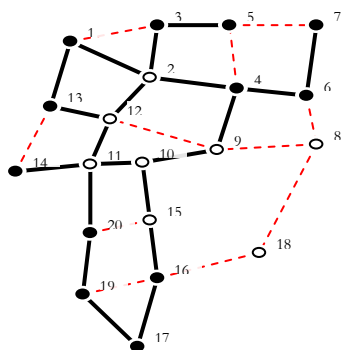
P-B 481: Síť č. 15 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HN



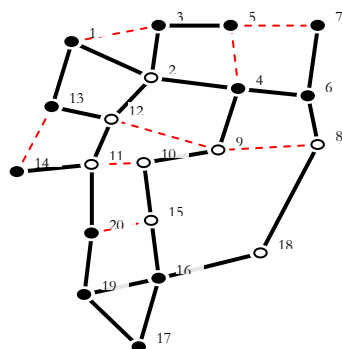
P-B 483: Síť č. 15 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HO



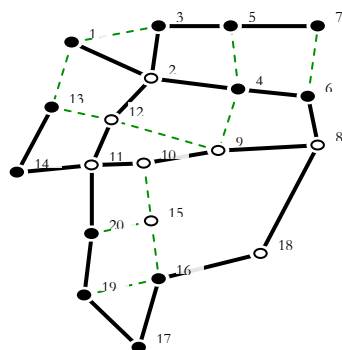
P-B 485: Síť č. 15 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HN



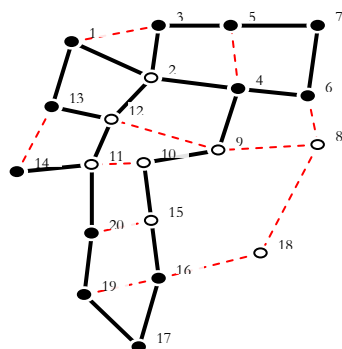
P-B 487: Síť č. 15 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HO



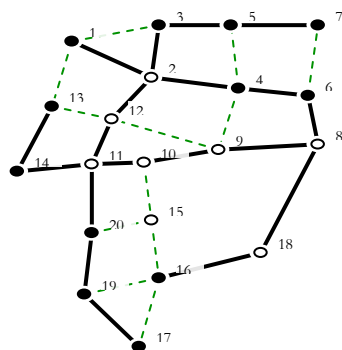
P-B 482: Síť č. 15 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:HU



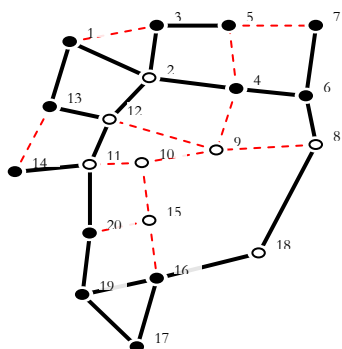
P-B 484: Síť č. 15 pro $q = 1,1$ a
PD = 20 metoda:EM



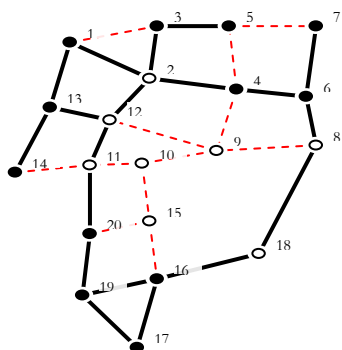
P-B 486: Síť č. 15 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:HU



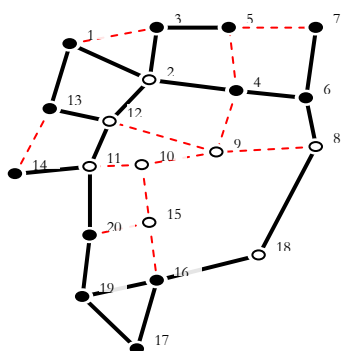
P-B 488: Síť č. 15 pro $q = 1,2$ a
PD = 20 metoda:EM



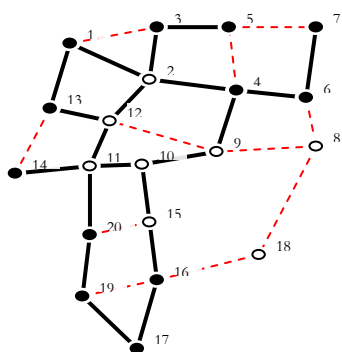
P-B 489: Sít' č. 15 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HN



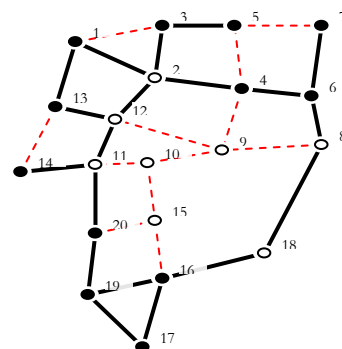
P-B 491: Sít' č. 15 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HO



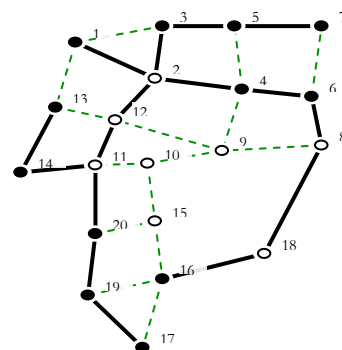
P-B 493: Sít' č. 15 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HN



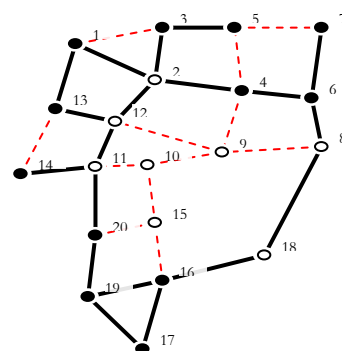
P-B 495: Sít' č. 15 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HO



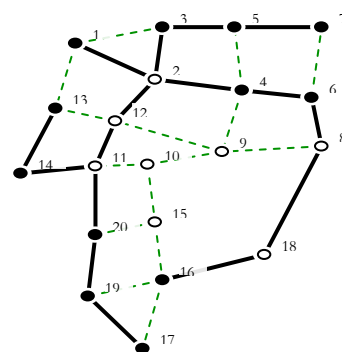
P-B 490: Sít' č. 15 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:HU



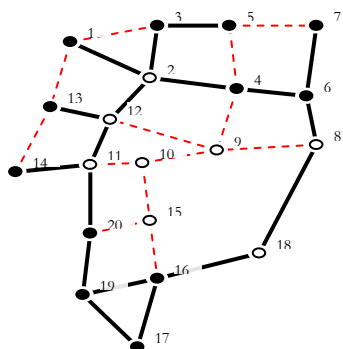
P-B 492: Sít' č. 15 pro $q = 1,3$ a
PD = 20 metoda:EM



P-B 494: Sít' č. 15 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:HU

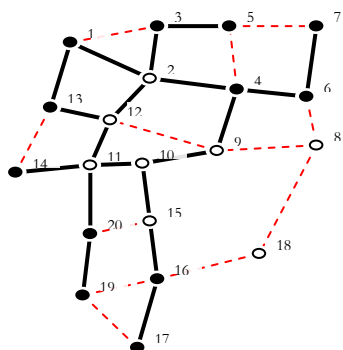


P-B 496: Sít' č. 15 pro $q = 1,4$ a
PD = 20 metoda:EM



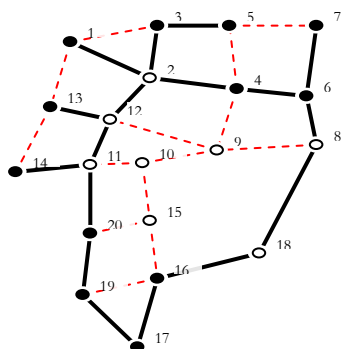
P-B 497: Síť č. 15 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HN



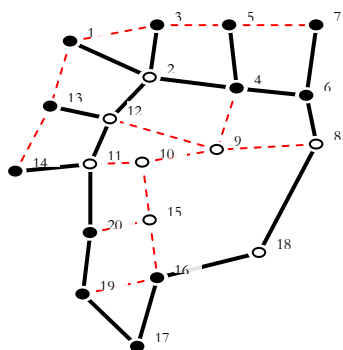
P-B 499: Síť č. 15 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HO



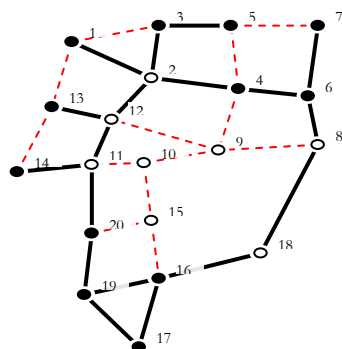
P-B 501: Síť č. 15 pro $q = 1,6$ a

PD = 20 metoda:HN



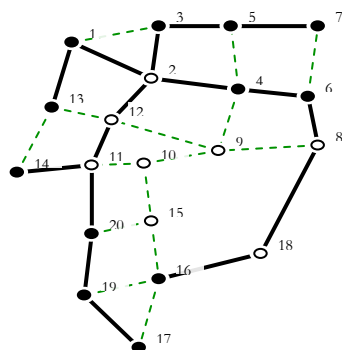
P-B 503: Síť č. 15 pro $q = 1,6$ a

PD = 20 metoda:HO



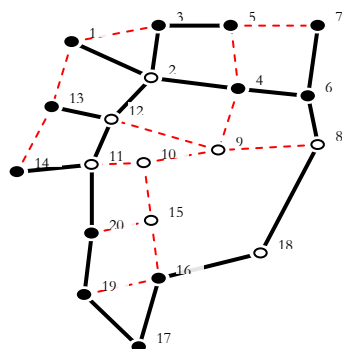
P-B 498: Síť č. 15 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:HU



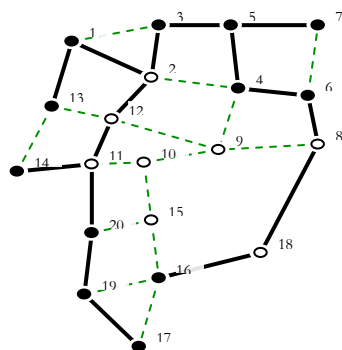
P-B 500: Síť č. 15 pro $q = 1,5$ a

PD = 20 metoda:EM



P-B 502: Síť č. 15 pro $q = 1,6$ a

PD = 20 metoda:HU



P-B 504: Síť č. 15 pro $q = 1,6$ a

PD = 20 metoda:EM

Příloha C: Výsledky návrhu autobusové linky

V této příloze jsou uvedeny graficky zpracované výsledky návrhu autobusové linky.

V titulcích obrázků jsou použity následující symboly a zkratky:

λ limit střední docházkové vzdálenosti

k váha zahrnutí podmínky vzdálenosti

GGH General Greedy Heuristics

GGHO General Greedy Heuristics s optimalizací výchozího vrcholu

NGH Neighbor Greedy Heuristics

NGHO Neighbor Greedy Heuristics s optimalizací výchozího vrcholu

CH Combined Heuristics

CHO Combined Heuristics s optimalizací výchozího vrcholu

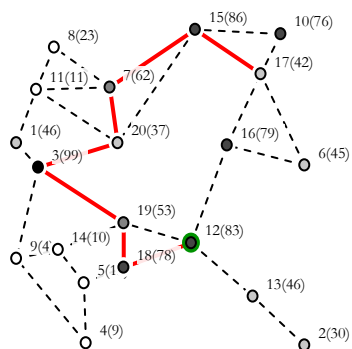
EM exaktní metoda řešení

Zeleným okolím je označen medián sítě (popsán v rámci kapitoly 5.2.3).

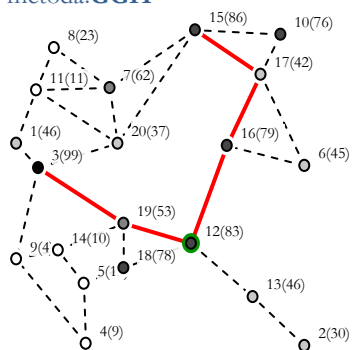
Segmenty výsledné linky jsou vyznačeny plnou tučnou čarou. Červenou (v případě výsledků heuristických metod), resp. zelenou (v případě EM).

Čísla v závorkách vyjadřují poptávku v daném uzlu. Tento fakt je vyjádřen také stupněm šedi výplně vrcholu.

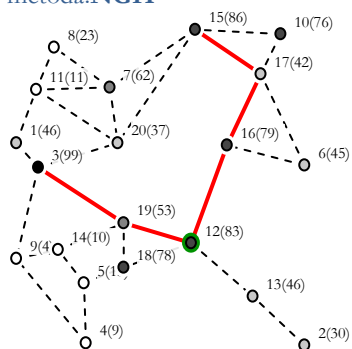
Pokud v obrázku není vyznačena trasa linky, znamená to, že daná metoda pro dané nastavení parametru nebyla pro danou síť schopna nalézt řešení.



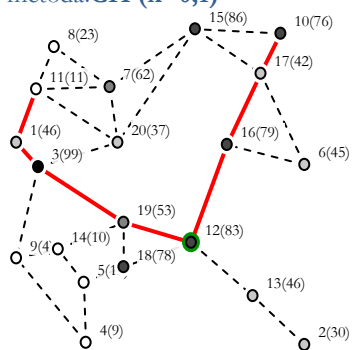
**P-C 1: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:GGH**



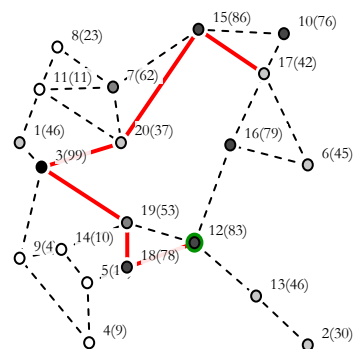
**P-C 3: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:NGH**



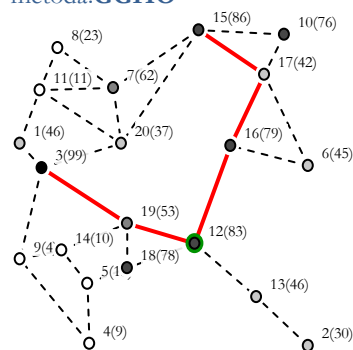
**P-C 5: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:CH (k=0,1)**



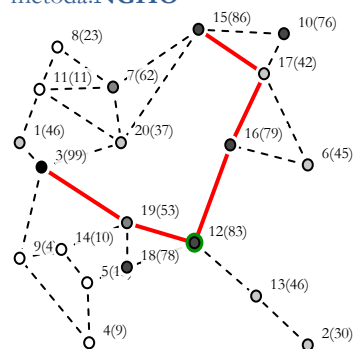
**P-C 7: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:CH (k=0,2)**



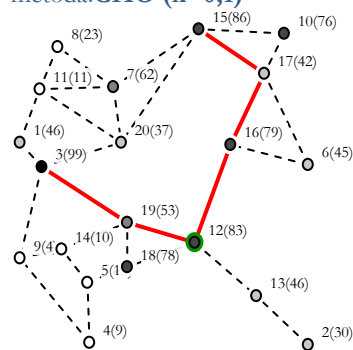
**P-C 2: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:GGHO**



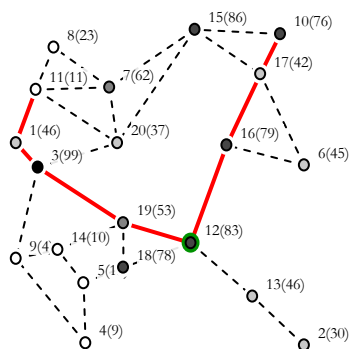
**P-C 4: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:NGHO**



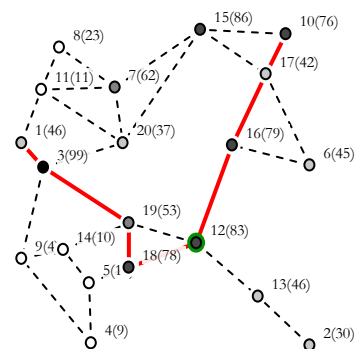
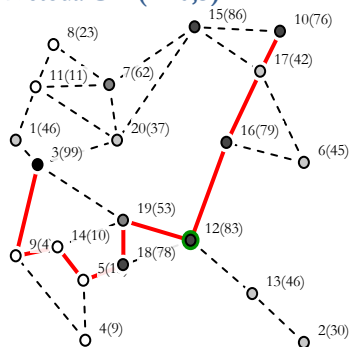
**P-C 6: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:CHO (k=0,1)**



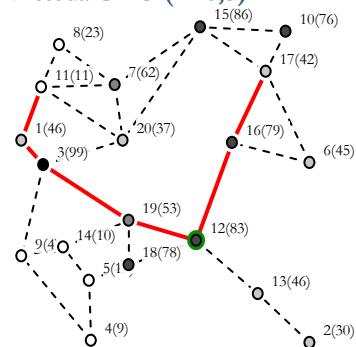
**P-C 8: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$
metoda:CHO (k=0,2)**

P-C 9: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$

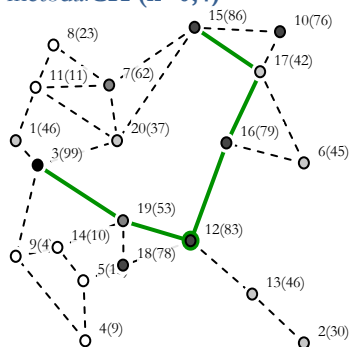
metoda:CH (k=0,3)

P-C 10: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$

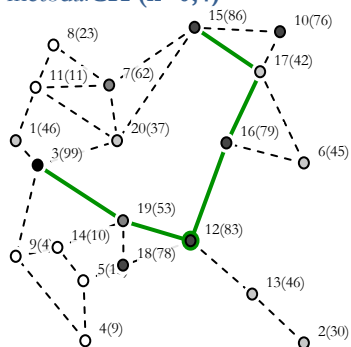
metoda:CHO (k=0,3)

P-C 11: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$

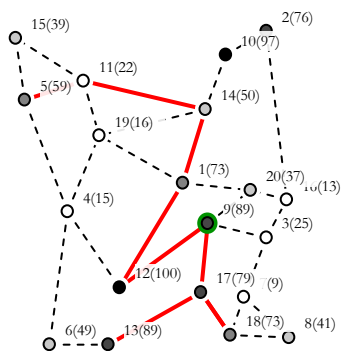
metoda:CH (k=0,4)

P-C 12: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)

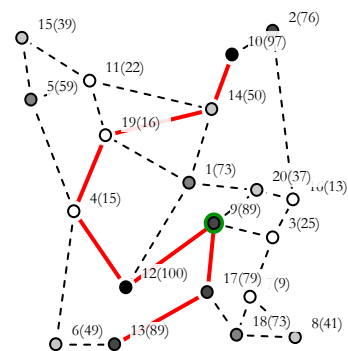
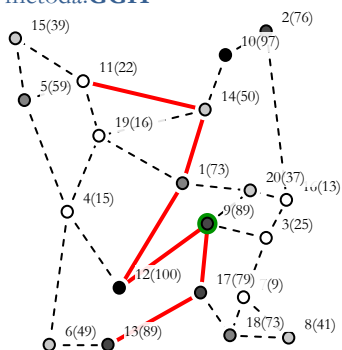
P-C 13: Síť č. 1 pro $\lambda = 4$

metoda:EM



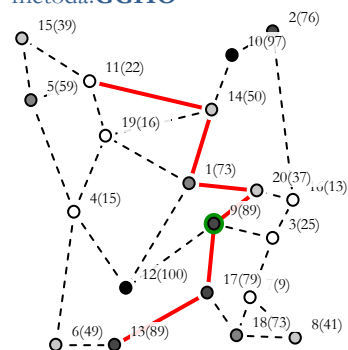
P-C 14: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



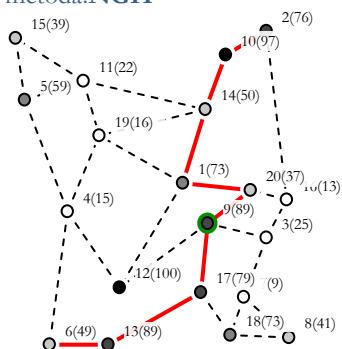
P-C 15: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



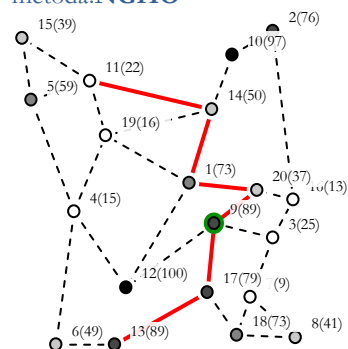
P-C 16: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



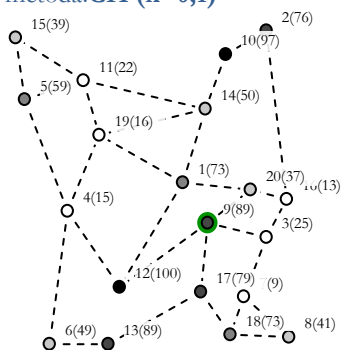
P-C 17: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



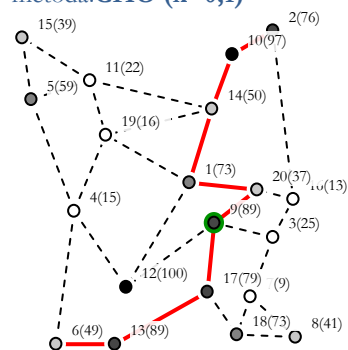
P-C 18: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



P-C 19: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

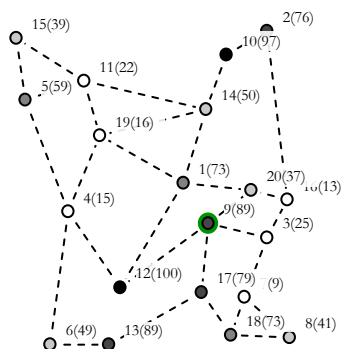


P-C 20: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

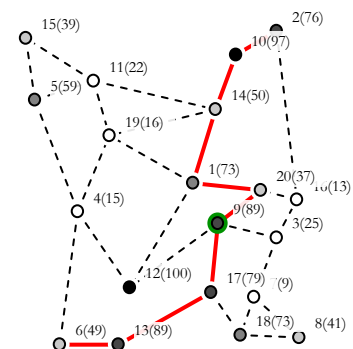
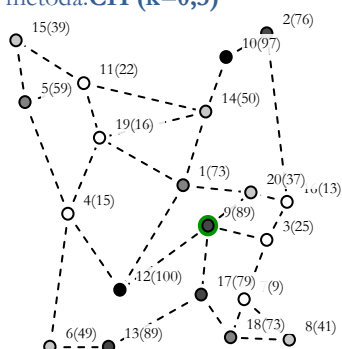
metoda:CH (k=0,2)

P-C 21: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

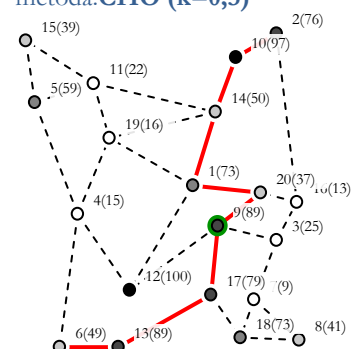
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 22: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

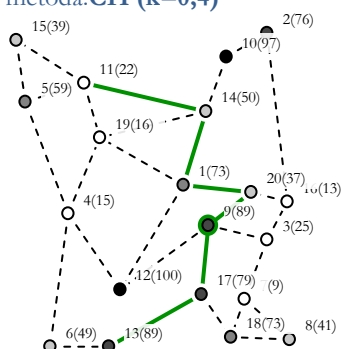
metoda:CH (k=0,3)

P-C 23: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

P-C 24: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

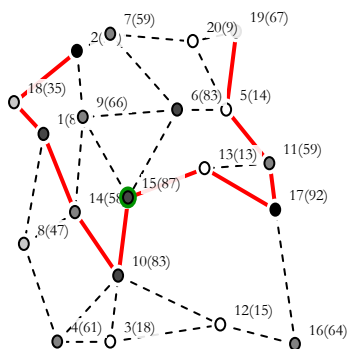
metoda:CH (k=0,4)

P-C 25: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)

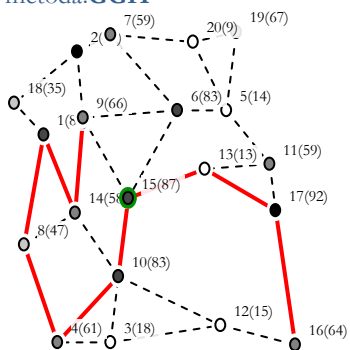
P-C 26: Síť č. 2 pro $\lambda = 4$

metoda:EM



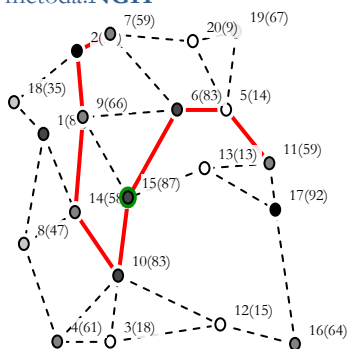
P-C 27: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



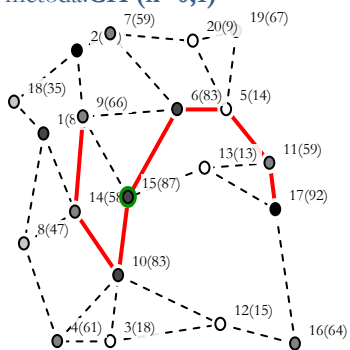
P-C 29: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



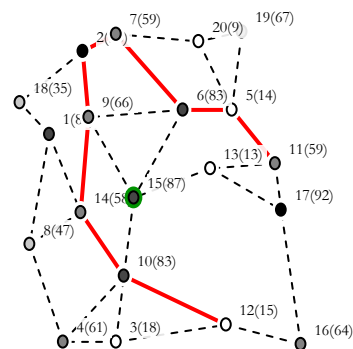
P-C 31: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



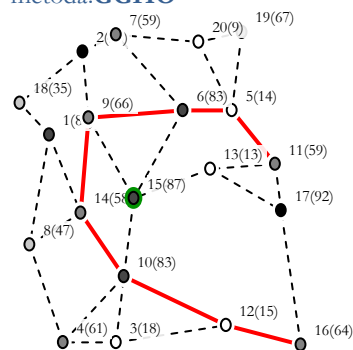
P-C 33: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,2)



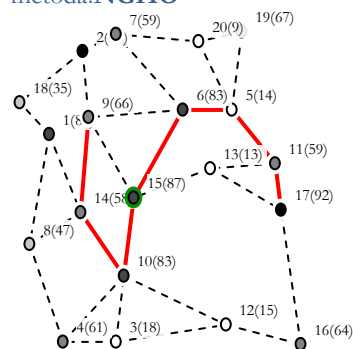
P-C 28: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



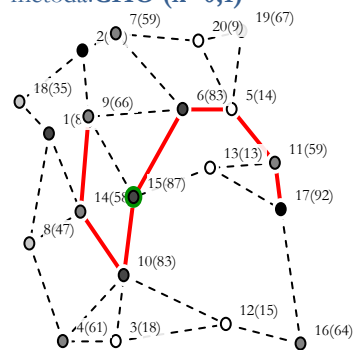
P-C 30: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



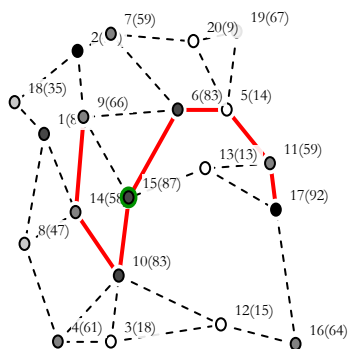
P-C 32: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

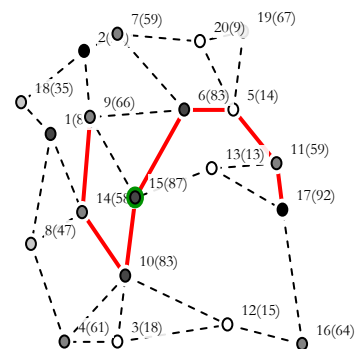
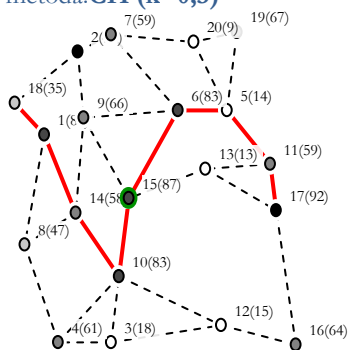


P-C 34: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

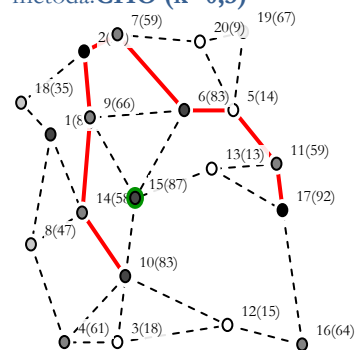
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 35: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

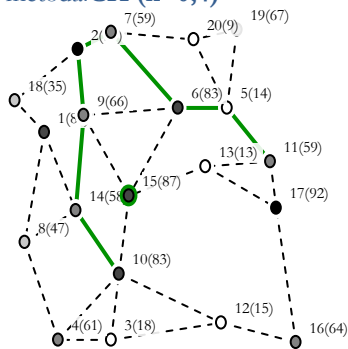
metoda:CH (k=0,3)

P-C 36: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

P-C 37: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

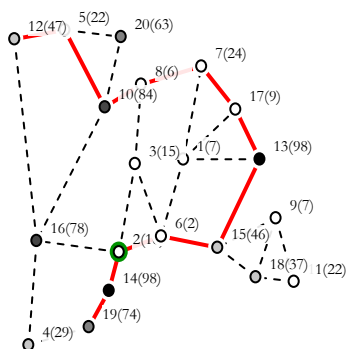
metoda:CH (k=0,4)

P-C 38: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)

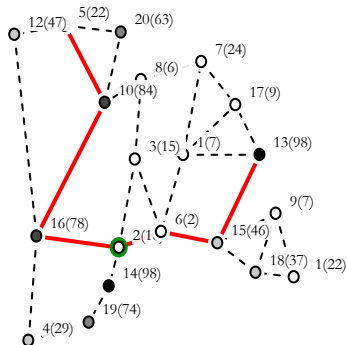
P-C 39: Síť č. 3 pro $\lambda = 4$

metoda:EM



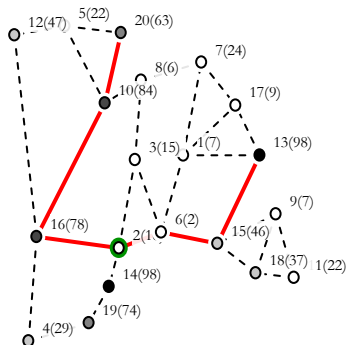
P-C 40: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



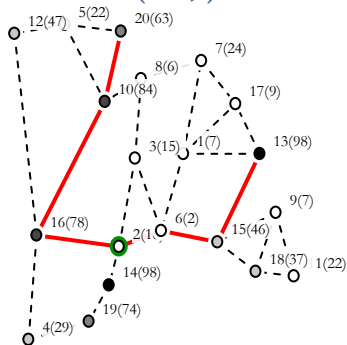
P-C 42: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



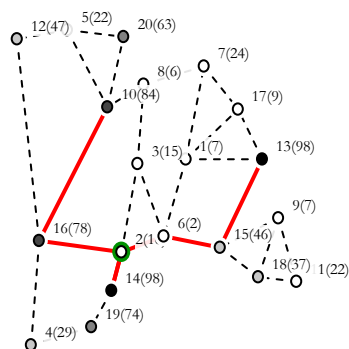
P-C 44: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



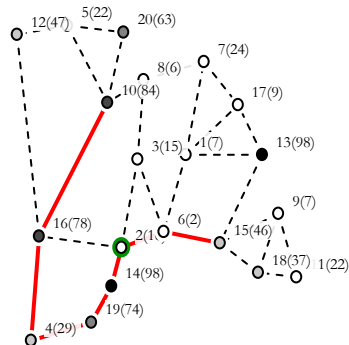
P-C 46: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,2)



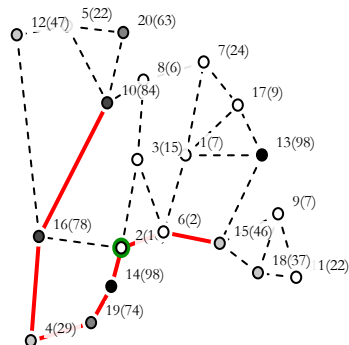
P-C 41: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



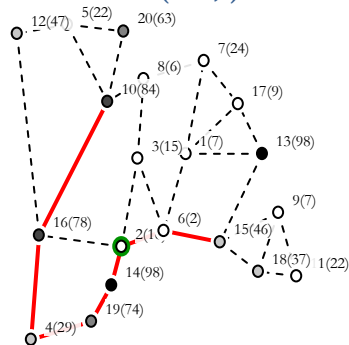
P-C 43: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



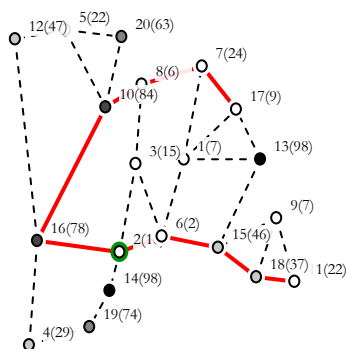
P-C 45: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

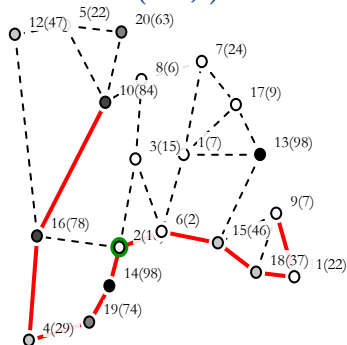


P-C 47: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

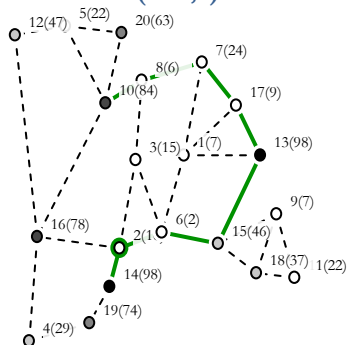
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 48: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

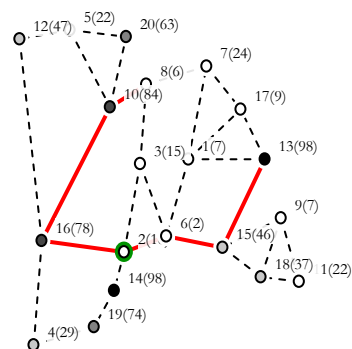
metoda:CH (k=0,3)

P-C 50: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

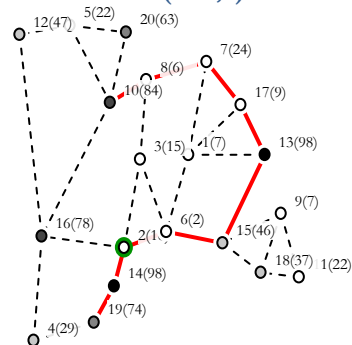
metoda:CH (k=0,4)

P-C 52: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

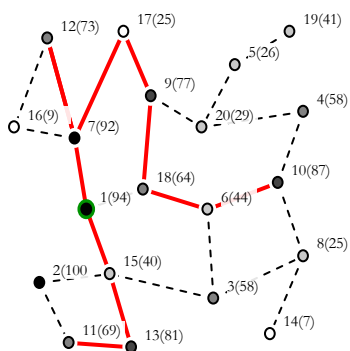
metoda:EM

P-C 49: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

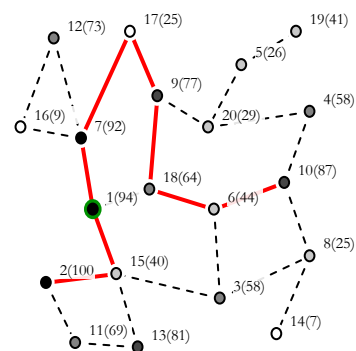
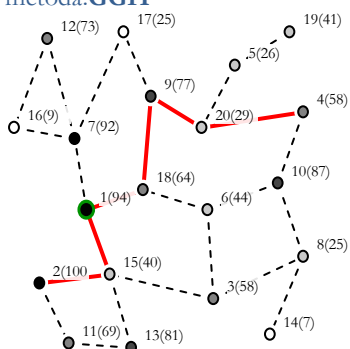
P-C 51: Síť č. 4 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)



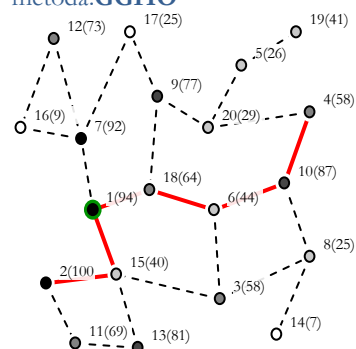
P-C 53: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



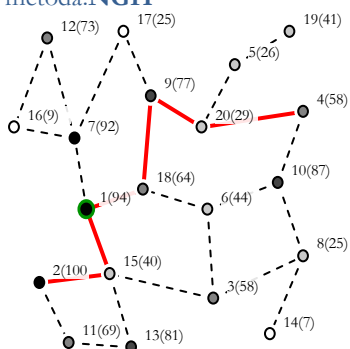
P-C 54: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



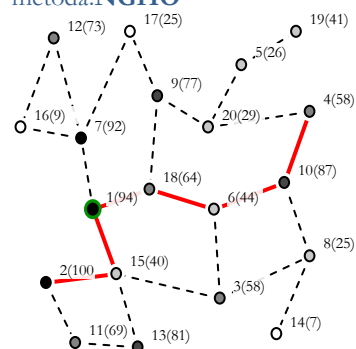
P-C 55: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



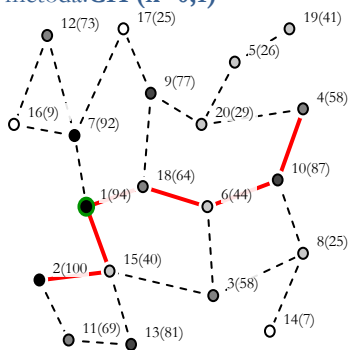
P-C 56: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



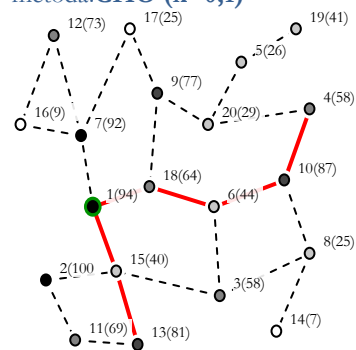
P-C 57: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



P-C 58: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

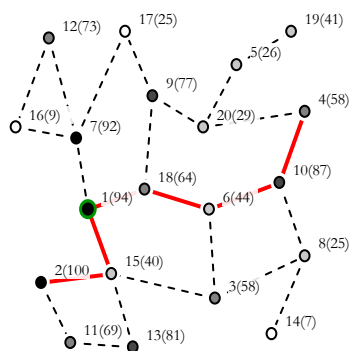


P-C 59: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

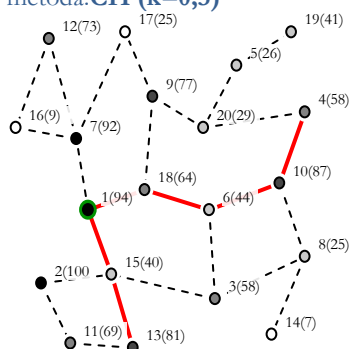
metoda:CH (k=0,2)

P-C 60: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

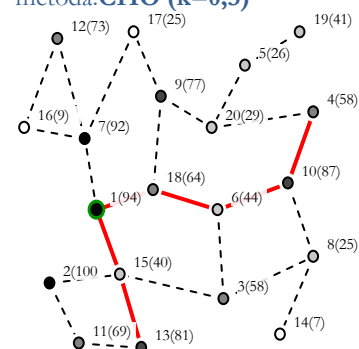
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 61: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

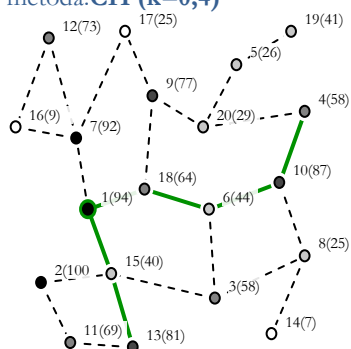
metoda:CH (k=0,3)

P-C 62: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

P-C 63: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

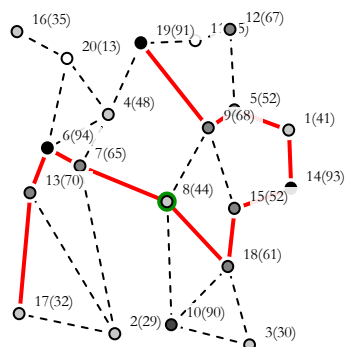
metoda:CH (k=0,4)

P-C 64: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)

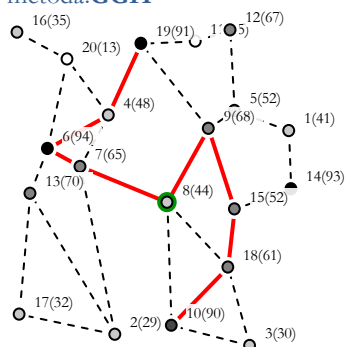
P-C 65: Síť č. 5 pro $\lambda = 4$

metoda:EM



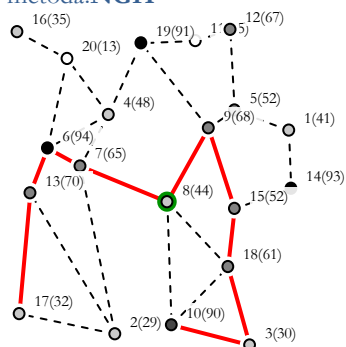
P-C 66: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



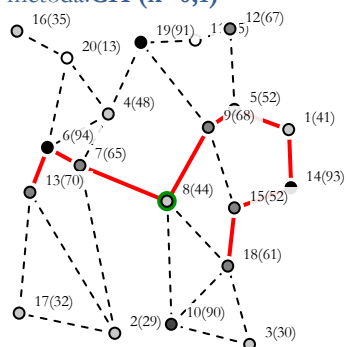
P-C 68: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



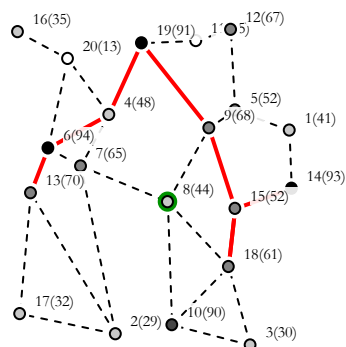
P-C 70: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



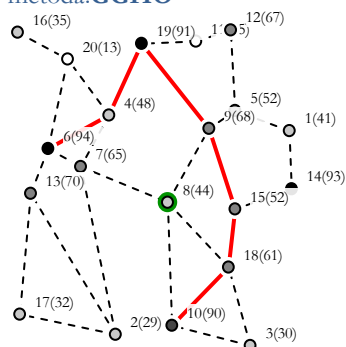
P-C 72: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,2)



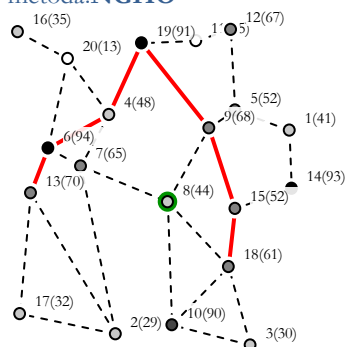
P-C 67: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



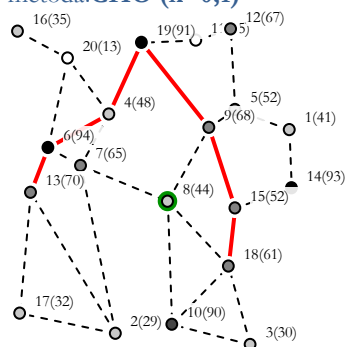
P-C 69: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



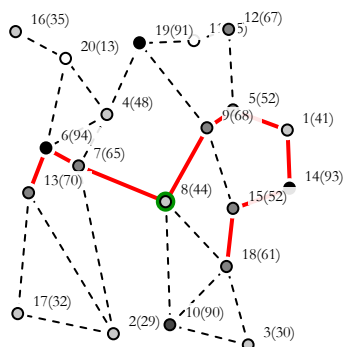
P-C 71: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

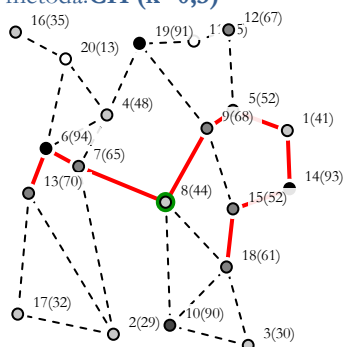


P-C 73: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

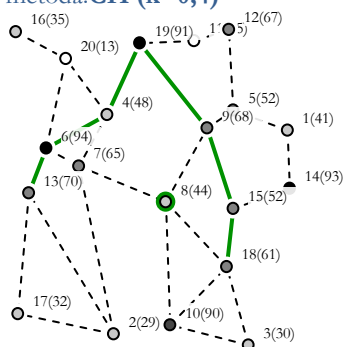
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 74: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

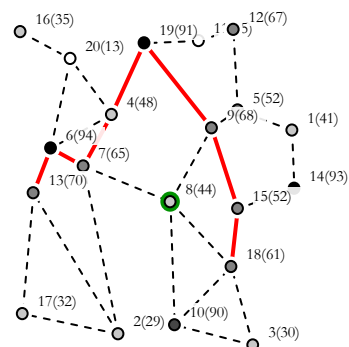
metoda:CH (k=0,3)

P-C 76: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

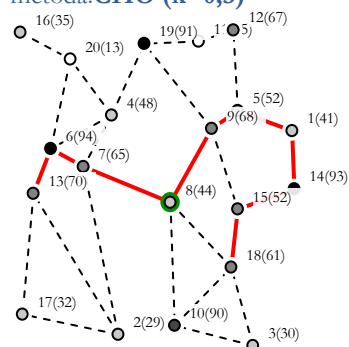
metoda:CH (k=0,4)

P-C 78: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

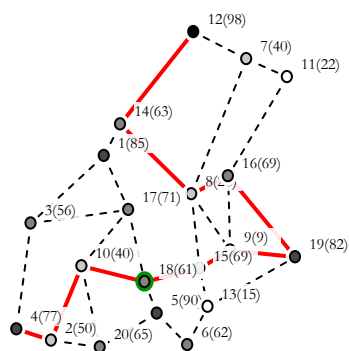
metoda:EM

P-C 75: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

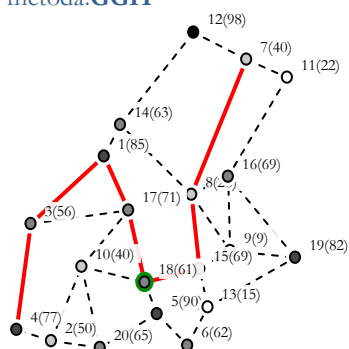
metoda:CHO (k=0,3)

P-C 77: Síť č. 6 pro $\lambda = 4$

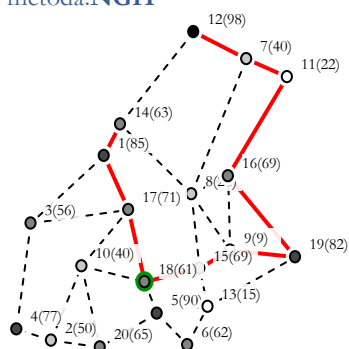
metoda:CHO (k=0,4)



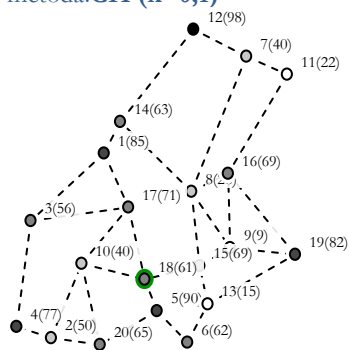
P-C 79: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:GGH



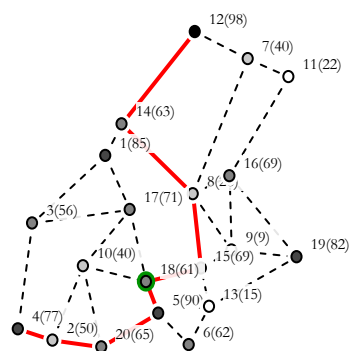
P-C 81: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:NGH



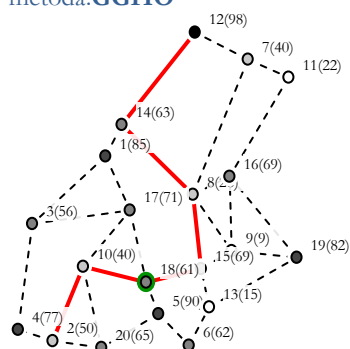
P-C 83: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:CH (k=0,1)



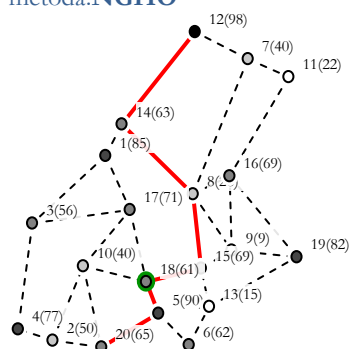
P-C 85: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:CH (k=0,2)



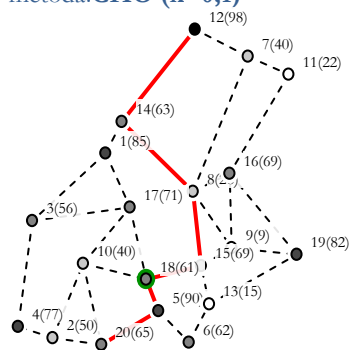
P-C 80: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:GGHO



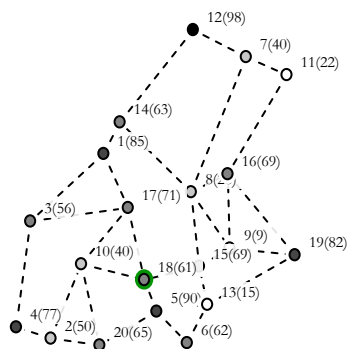
P-C 82: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:NGHO



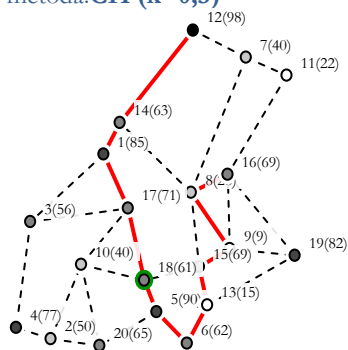
P-C 84: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:CHO (k=0,1)



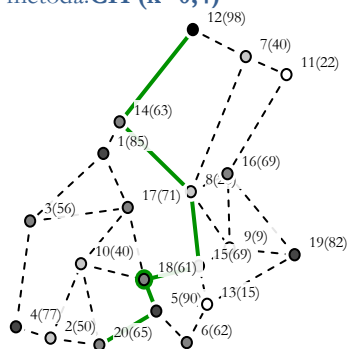
P-C 86: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 87: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$

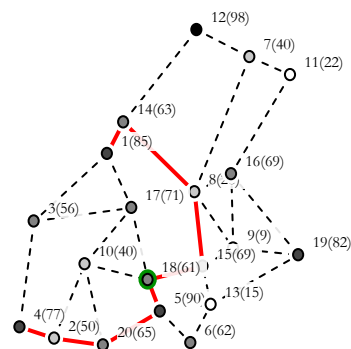
metoda:CH (k=0,3)

P-C 89: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$

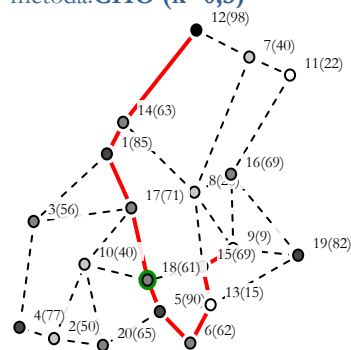
metoda:CH (k=0,4)

P-C 91: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$

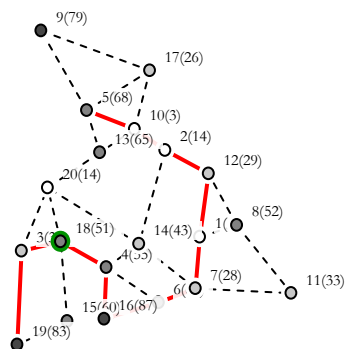
metoda:EM

P-C 88: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

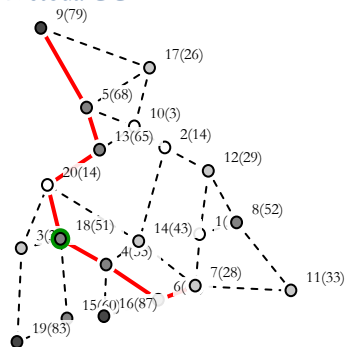
P-C 90: Síť č. 7 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)



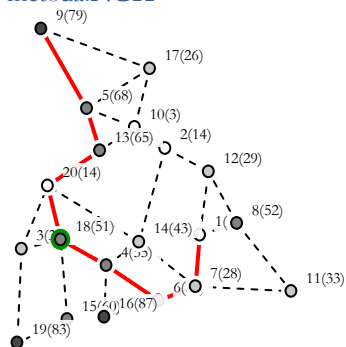
P-C 92: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



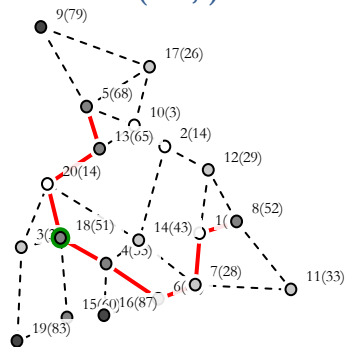
P-C 94: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



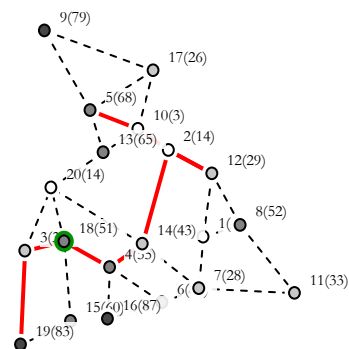
P-C 96: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



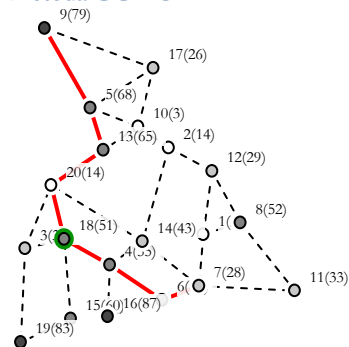
P-C 98: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,2)



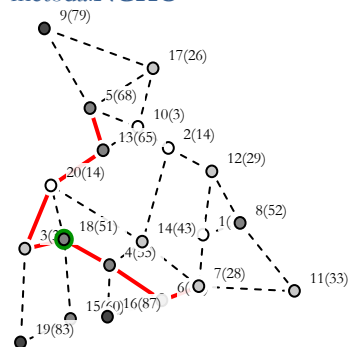
P-C 93: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



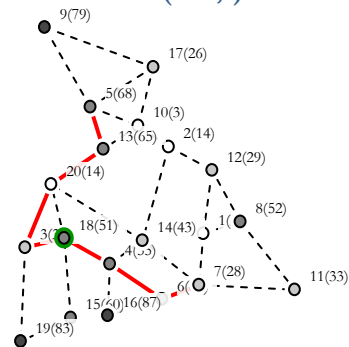
P-C 95: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



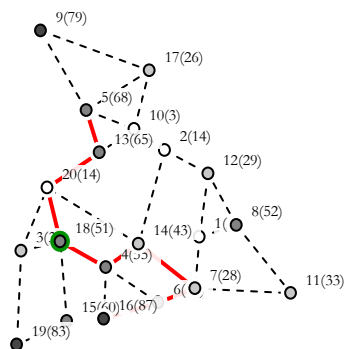
P-C 97: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

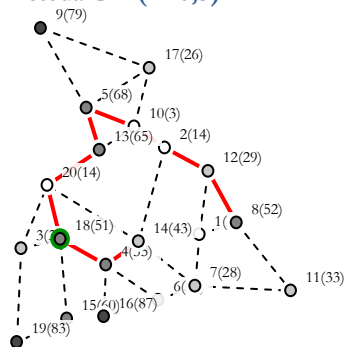


P-C 99: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

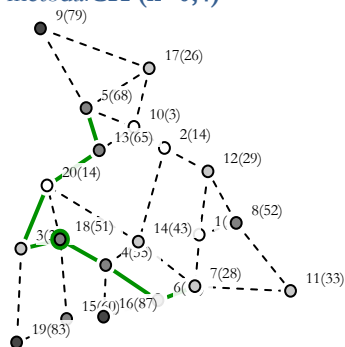
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 100: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

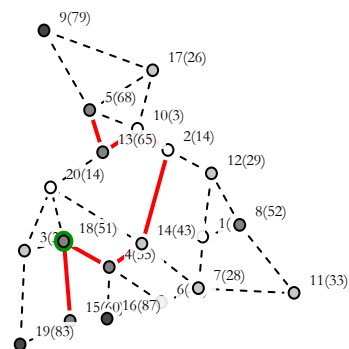
metoda:CH (k=0,3)

P-C 102: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

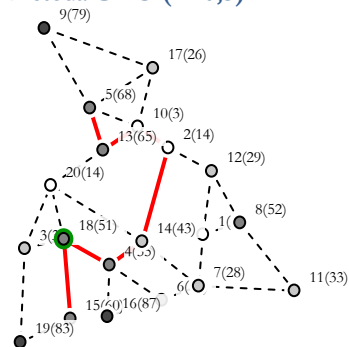
metoda:CH (k=0,4)

P-C 104: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

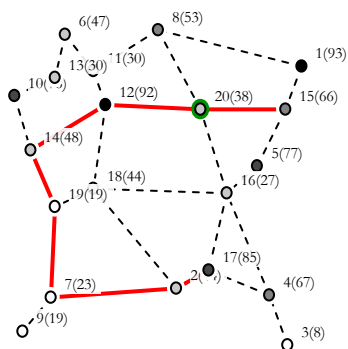
metoda:EM

P-C 101: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

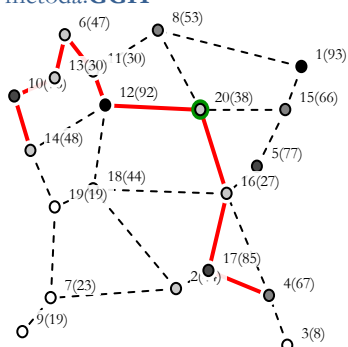
P-C 103: Síť č. 8 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)



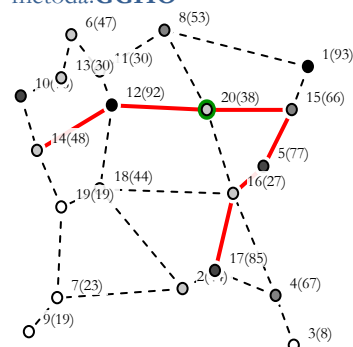
P-C 105: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



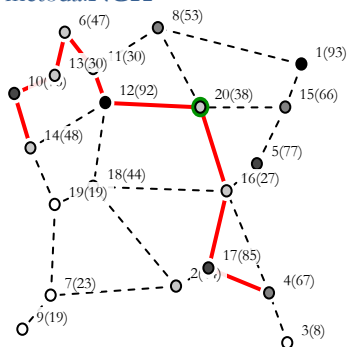
P-C 106: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



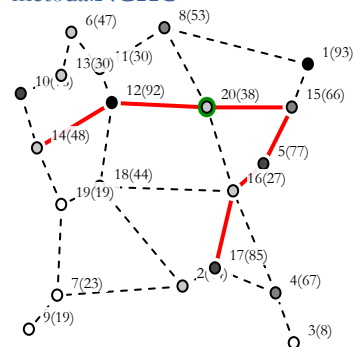
P-C 107: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



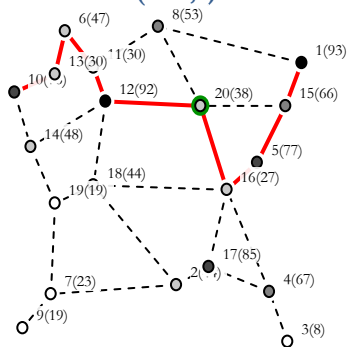
P-C 108: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



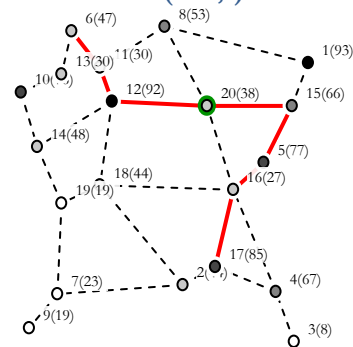
P-C 109: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



P-C 110: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

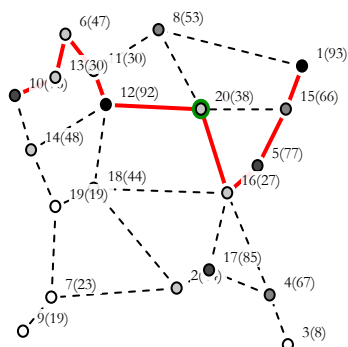


P-C 111: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

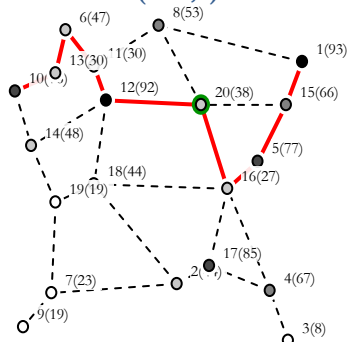
metoda:CH (k=0,2)

P-C 112: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

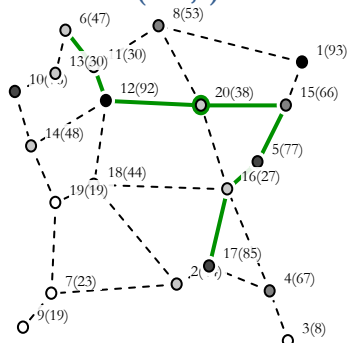
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 113: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

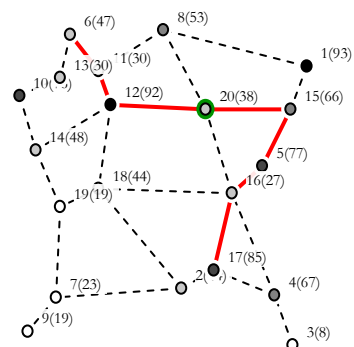
metoda:CH (k=0,3)

P-C 115: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

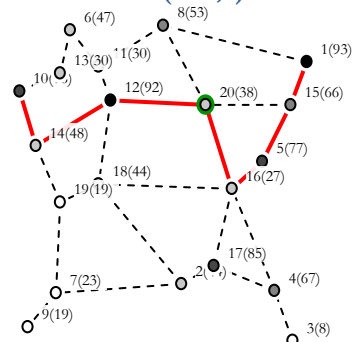
metoda:CH (k=0,4)

P-C 117: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

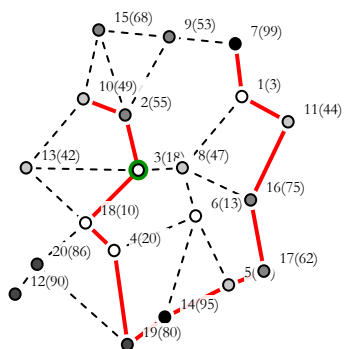
metoda:EM

P-C 114: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

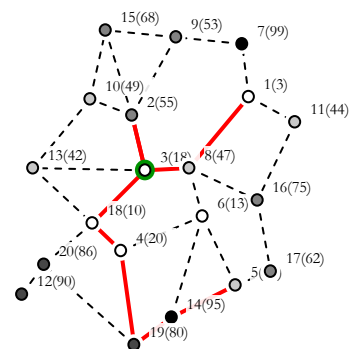
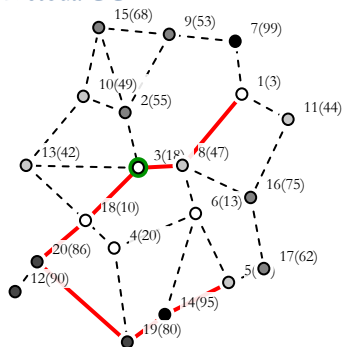
P-C 116: Síť č. 9 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)



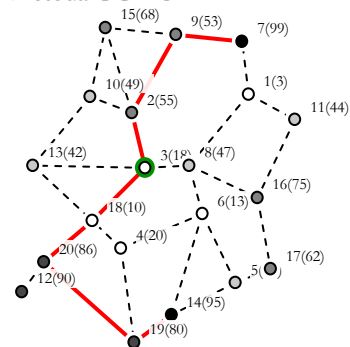
P-C 118: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:GGH



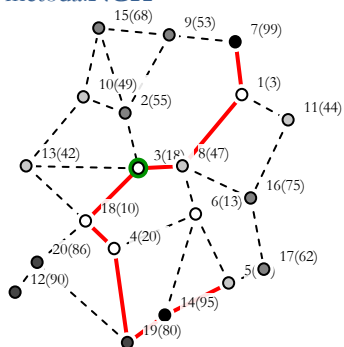
P-C 119: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:GGHO



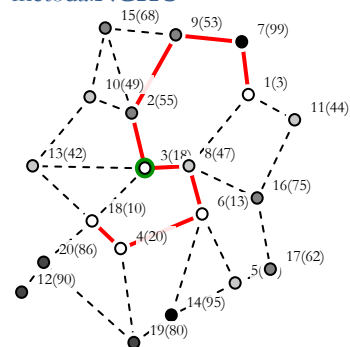
P-C 120: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:NGH



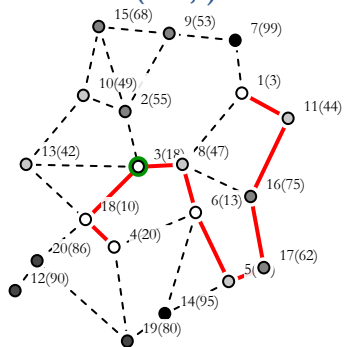
P-C 121: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:NGHO



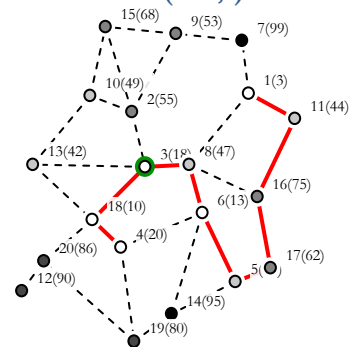
P-C 122: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,1)



P-C 123: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,1)

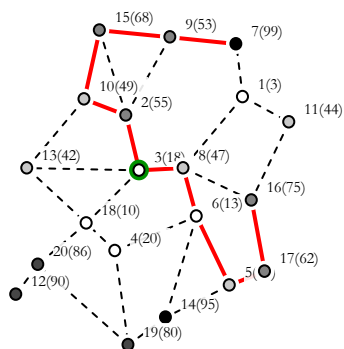


P-C 124: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

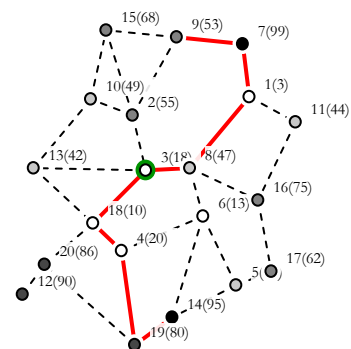
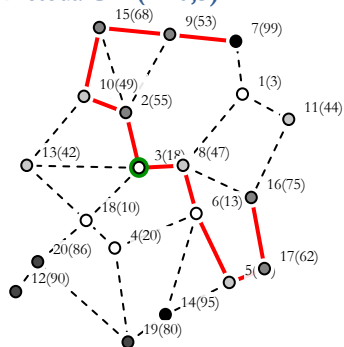
metoda:CH (k=0,2)

P-C 125: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

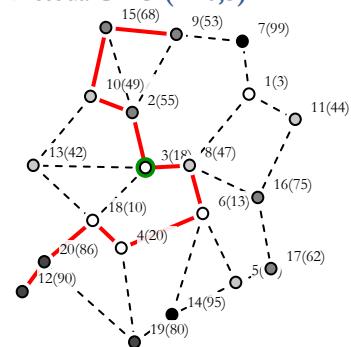
metoda:CHO (k=0,2)

P-C 126: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

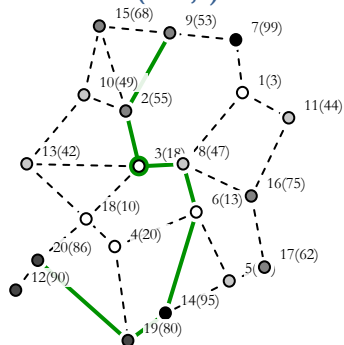
metoda:CH (k=0,3)

P-C 127: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,3)

P-C 128: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:CH (k=0,4)

P-C 129: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:CHO (k=0,4)

P-C 130: Síť č. 10 pro $\lambda = 4$

metoda:EM

Podpora manažerského rozhodování o dopravních sítích

Ing. Vladimír Příbyl, Jindřichův Hradec, říjen 2011